

Combinatorics Mid-test

2023/10/28

1.

$$\text{证明 } n \binom{2n-1}{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2.$$

2.

命数列 $\{h(n)\}$ 为长为 n 的, 完全由 A, B, C 组成的字符串的个数, 且其中没有任何 B 紧跟在 A 后面. 求 $\{h(n)\}$ 的生成函数 (闭式).

3.

(1) $|V(G)| = 5$. 证明 G 或其补图至少有一个有圈导出子图.

(2) 对 K_n 的边集以红蓝两色染色, 证明其存在纯色的生成树.

4.

对于 $[n]$ 的一排列 p , 称 p 在第 i 个位置上”下降”, 当且仅当 $p(i) > p(i+1)$.

给定 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq n$, 利用容斥原理证明 $[n]$ 的在且仅在所有 a_i 处”下降”的排列的数量等于 Formula.

Formula 是一个冗长而缺乏洞见的式子, 几乎看一眼式子的构成就能让人猜到这道题的做法.

5.

利用 Hall 定理证明 Konig 定理.

6.

命 S_n 为 $[n]$ 的所有排列组成的集合. 对一排列 p , 称元素对 (i, j) 在 p 中, 指的是 p 中 i 排在 j 前面. 对 S_n 一子集 P , 称其是完全的, 当且仅当对 $[n]$ 上任一互异元素对 (i, j) , 存在一 $p \in P$ 使得 (i, j) 在 p 中. 称 P 是一极小完全集, 当且仅当 P 是完全的, 而 P 的任何真子集都不是完全的. 换言之, 对任一 $p \in P$, 都有至少一元素对 (i, j) 在 p 中且不在 P 的任何其它元素中.

证明: $n \geq 4$ 时, $[n]$ 的任一极小完全集 P 都有 $|P| \leq \frac{n^2}{4}$.