

物理学中的群论 2023 年秋考题预测

Level 1

1. 请列出所有的 2024 阶 Abel 群
2. 请列出 S_7 群的所有共轭类，并求共轭类中的元素个数。
3. 请化简 $(13265)(1427)$ (直到不含公共客体)
4. 请画出 $O(4, C)$ 的 Dynkin 图，并根据 Dynkin 图给出相应 Cartan 矩阵

Level 2

1. 7 个珠子串一串，4 种颜色，试问多少种不同串子？
2. D_{10} 的共轭类？正规子群？特征标表？所有的一维不可约表示？
3. D_6 群的左正则表示？是否可约？包含了哪些低维表示？请给出来
4. 在 $SL(3, C)$ 上定义某种李群：
 - (1) 维数？连通度？紧致？
 - (2) 加某个条件，再算维度？
 - (3) ρ_L 和 ρ_R
 - (4) 无穷小生成元、李积、理想？
 - (5) 函数空间表示、指数化？
5. 矩阵函数的约化：Cayley-Hamilton 定理的应用
6. S_7 群的杨图杨表杨算符三连问，生成元的标准表示？正则填充法得到特征标表
7. 用 $SU(2)$ 群描述费米子自旋，请给出 6 个费米子自旋耦合后的最高角动量？其中包含多少种不同维数的不变子空间？不同维度的不变子空间数目又是多少？
8. $SO(3)$ 群所描述的四阶张量中对称无迹的独立元素个数有多少？

Level 3:

1. 给出正四面体群 T 的元素，求共轭类，T 群的特征标表，T 群的所有不等价不可约表示？
2. 在 $GL(3, Q)$ 上定义某种李群，其中 Q 是四元数数域
 - (1) 求这个李群的维数？紧致性？连通度？
 - (2) 再给定一条约束，请证明 $SU(2)$ (或者 $SO(3)$) 与该李群同构。
 - (3) 在满足(2)中的约束下，求该李群的无穷小生成元、李积。
 - (4) 求函数空间的表示，并判断理想
3. 暂时想不到更难的了，姐姐应该会有更难的题吧……