5.1.6 定积分的计算

1° 定积分的换元法

定理 1 (定积分的换元法) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导, $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. 则有下面的换元公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

5.1.6 定积分的计算

1° 定积分的换元法

定理 1 (**定积分的换元法**) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导, $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. 则有下面的换元公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证明 由定理中的条件可知, 上式两端的积分都存在, 且函数 $f(x)$ 和 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 分别在区间 $[a,b]$ 及 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ (在 $[a,b]$ 上) 的一个原函数, 则根据复合函数的求导法则可知, $F(\varphi(t))$ 可导, 且

$$(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数. 由 Newton–Leibniz 公

式, 我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

以及

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

这就证明了所说的等式. 证毕.

注1 从定理的证明来看, 没有必要要求 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 只要它可积就可以了.

注2 与不定积分的换元法比较, 这里没有要求 $x = \varphi(t)$ 严格单调. 这是因为不需要象不定积分那样最终应将新变量换回原来的积分变量.

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

解

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

例 2 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \, (a > 0)$.

例 2 求 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\ (a > 0)$.

解 令 $x = a\sin t\,(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$. 则当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$. 所以 (由定积分的换元法则)

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\, dt$$

例 2 求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,(a>0)$.

解 令 $x=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$. 则当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 所以 (由定积分的换元法则)

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt\end{aligned}$$

例 2 求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,(a>0)$.

解 令 $x=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$. 则当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 所以 (由定积分的换元法则)

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

例 2 求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,(a>0)$.

解 令 $x=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$. 则当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 所以 (由定积分的换元法则)

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt\\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

注: 这个例子说明半径为 a 的圆面积的四分之一等于 $\frac{\pi}{4}a^2$. 因此圆的面积是 πa^2.

例 3 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$

例 3 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

解 作变换 $x = \tan\varphi$, 则 $d\varphi = \frac{1}{1+x^2}dx$, 且当 $x = 0$ 时, $\varphi = 0$; 当 $x = 1$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi}\right) d\varphi$$

例 3 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

解 作变换 $x=\tan\varphi$, 则 $d\varphi=\frac{1}{1+x^2}dx$, 且当 $x=0$ 时, $\varphi=0$; 当 $x=1$ 时, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\}\,d\varphi
\end{aligned}
$$

例 3 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

解 作变换 $x=\tan\varphi$, 则 $d\varphi=\frac{1}{1+x^2}dx$, 且当 $x=0$ 时, $\varphi=0$; 当 $x=1$ 时, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\sqrt{2}+\ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\} d\varphi
\end{aligned}
$$

例 3 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解 作变换 $x=\tan\varphi$, 则 $d\varphi=\frac{1}{1+x^2}dx$, 且当 $x=0$ 时, $\varphi=0$; 当 $x=1$ 时, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\sqrt{2}+\ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\} d\varphi \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi)d\varphi.
\end{aligned}
$$

例 3 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

解 作变换 $x=\tan\varphi$, 则 $d\varphi=\frac{1}{1+x^2}dx$, 且当 $x=0$ 时, $\varphi=0$; 当 $x=1$ 时, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\sqrt{2}+\ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\} d\varphi \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi)d\varphi.
\end{aligned}
$$

因为

$$
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi \xlongequal{\varphi=\frac{\pi}{4}-t} -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(\sin(\frac{\pi}{2}-t)\right) dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt.
$$

所以 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

例 4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积的凸函数, 求证

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

例 4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积的凸函数, 求证

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

证明 因为 $f(x)$ 是凸函数, 所以对 $x \in [a,b]$ 有

$$f(x)+f(a+b-x) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

两边积分可得

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx \geqslant 2(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

作换元 $t=a+b-x$, 可得

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = -\int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

由此即得所证.

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

求 $f(x)$.

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

对任意 x, y 有

$$F(x+y) = \int_0^{x+y} f(t)\,dt$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

对任意 x, y 有

$$F(x+y) = \int_0^{x+y} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+y} f(t)\,dt$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

对任意 x,y 有

$$\begin{aligned}F(x+y)&=\int_0^{x+y} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^{x+y} f(t)\,dt\\&=F(x)+\int_0^y f(t+x)\,dt\end{aligned}$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

对任意 x,y 有

$$\begin{aligned}F(x+y)&=\int_0^{x+y} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^{x+y} f(t)\,dt\\&=F(x)+\int_0^y f(t+x)\,dt\\&=F(x)+\int_0^y \big(f(t)+f(x)\big)\,dt\end{aligned}$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

对任意 x,y 有

$$\begin{aligned}F(x+y)&=\int_0^{x+y} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+\int_x^{x+y} f(t)\,dt\\&=F(x)+\int_0^y f(t+x)\,dt\\&=F(x)+\int_0^y \big(f(t)+f(x)\big)\,dt\\&=F(x)+F(y)+yf(x).\end{aligned}$$

即对任意 x, y 有

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + yf(x).$$

交换 x, y 得到

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + xf(y).$$

比较上面二式, 得

$$yf(x) = xf(y).$$

取 $y = 1$, 得

$$f(x) = ax,$$

其中 $a = f(1)$ 是任意常数.

2° 定积分的分部积分法

定理 2 (定积分的分部积分法) 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$. 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

2° 定积分的分部积分法

定理 2 (定积分的分部积分法) 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$. 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

证明 由微分中的求导法则

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

及已知条件可知, 上式的两边都是连续的, 因此可积. 对上式两边进行积分, 并用 Newton–Leibniz 公式, 得出

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

即得所要证明的等式.

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx.$

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

解 根据分部积分法,

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

解 根据分部积分法,

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \ln 2 - \int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \ln 2 - \left(1-\ln(x+1)\Big|_0^1\right)\end{aligned}$$

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \ln 2 - \left(1-\ln(x+1)\Big|_0^1\right) \\ &= 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \ln 2 - \int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \ln 2 - \left(1-\ln(x+1)\Big|_0^1\right)\\ &= 2\ln 2 - 1\\ &= \ln\frac{4}{e}.\end{aligned}$$

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

解 根据分部积分法,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$$

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

解 根据分部积分法,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

解 根据分部积分法,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

解 作换元 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

解 作换元 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

解 作换元 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx \end{aligned}$$

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

解 作换元 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \end{aligned}$$

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

解 作换元 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.
\end{aligned}$$

即 $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, 所以

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

由这递推公式, 我们得出

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)}{2n} I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

类似地得到

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

综合起来, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

例 9 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{1/n}$ 收敛.

例 9 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$ 收敛.

证明 因为 $\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 因而在 $[0,1]$ 可积. 采用等分点

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$$

将 $[0,1]$ 分为 n 等份, 取 $\xi_k=\frac{k}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$. 则 Riemann 和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时收敛到 $A=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\ln\frac{4}{e}$. 因为 S_n 可表示为

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$ 收敛到 $\frac{4}{e}$.

5.1.7 用积分定义函数

连续函数都有原函数. 初等函数在其定义域内是连续函数, 因此, 初等函数都有原函数. 有许多初等函数其原函数仍是初等函数, 但也有一些初等函数, 其原函数不能用初等函数表示, 或者说它不是初等函数. 例如,

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx.$$

如果一个初等函数 $f(x)$ 的原函数仍是初等函数 $g(x)$, 那我们可以得到该初等函数 $g(x)$ 的积分表示. 如果一个初等函数 $f(x)$ 的原函数不是初等函数, 那我们可以用变上限积分

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

(x_0 在 f 的定义域中) 来定义一个新的函数.

用积分定义对数函数

现在假设我们事先不知道什么是对数函数, 用积分定义函数

$$f(x)=\int_1^x \frac{1}{u}\,du, \quad (x>0).$$

它是定义在 $x>0$ 上一个连续而且可导的函数. 从几何上看, 它是曲线 $y=\frac{1}{u}$ 覆盖下的面积. 因此, 无论是几何直观, 还是根据积分的性质, 我们首先得到上式所定义的函数满足

$$f(1)=0, \quad f(x)\text{ 严格单调递增.}$$

因此当 $x>1$ 时, $f(x)>0$, 当 $0<x<1$ 时, $f(x)<0$.

对于 $x>0$, $y>0$, 利用积分的可加性和换元法, 有

$$\begin{aligned} f(xy)&=\int_1^{xy}\frac{1}{u}\,du=\int_1^x\frac{1}{u}\,du+\int_x^{xy}\frac{1}{u}\,du\\ &=\int_1^x\frac{1}{u}\,du+\int_1^y\frac{1}{u}\,du, \end{aligned}$$

因此函数 $f(x)$ 具有下列性质:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

特别, 取 $y = x$, 得

$$f(x^2) = 2f(x)$$

取 $y = x^{-1}$, 则有

$$f(x) + f(x^{-1}) = f(1) = 0, \quad 即 \quad f(x^{-1}) = -f(x)$$

上面结果的自然推广是

$$f(x^n) = nf(x), \quad x > 0, \quad n \text{ 是任何（正或负）的整数}$$

对于任何正的有理数 $\alpha = \frac{m}{n}$, 记 $x^\alpha = y$, 因此 $x^m = y^n$, 则

$$f(x^m) = f(y^n) \quad \Longrightarrow \quad mf(x) = nf(y)$$

所以

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x), \quad x > 0$$

下面证明

$$f(e) = 1$$

根据数列的极限, 我们知道

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

注意到函数 $f(x)$ 的连续性, 有

$$\begin{aligned} f(e) &= f\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} nf\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

利用积分中值定理, 可知存在一点 $\xi \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$, 使得

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\xi}\frac{1}{n}$$

因此, 当 $n \to \infty$ 时, $\xi \to 1$, 所以得 $f(e) = 1$.

我们把上面定义的函数记做 $\log x$ 或 $\ln x$.

5.1.8 Taylor 展开中余项的积分表示

定理 3 (**带积分余项的** Taylor **定理**) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数. 那么对任意固定的 $x_0 \in (a,b)$ 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \tag{5.1}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\ x \in (a,b). \tag{5.2}$$

注意到当 $t \in [x_0, x]$ 时, $(x-t)^n$ 不变号, 且 $f^{(n+1)}(t)$ 连续, 根据推广的积分中值定理, 存在 $\xi \in (x_0, x)$ 使得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t)dt$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t)dt$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \left(\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \right)$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \left(\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt
\end{aligned}
$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \left(\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \left(\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).
\end{aligned}
$$

例 10 设 $f(x) \not\equiv 0$, 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$. 求证至少存在一点 $c \in [a,b]$ 使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

例 10 设 $f(x) \not\equiv 0$, 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=f(b)=0$. 求证至少存在一点 $c \in [a,b]$ 使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

证明 记上式右端为 M. 假设对一切 $c \in [a,b]$ 有 $|f'(c)| \leqslant M$, 我们以下推出矛盾. 首先根据微分中值定理, 对于 $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ 存在 $\xi \in (a,x)$, 使

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

因此由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(x-a),\ x \in [a, \frac{a+b}{2}], \tag{2}$$

因而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{3}$$

再根据微分中值定理, 对于 $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ 存在 $\eta \in (x, b)$, 使

$$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\eta)(x - b),$$

因此由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(b - x),\ x \in [\frac{a+b}{2}, b], \tag{4}$$

因而

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{5}$$

将 (3) 与 (5) 相加可得

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

这说明 (3) 和 (5) 必须是等式, 因而 (2) 和 (4) 必须成为等式. 于是

$$f^2(x) = \begin{cases} M^2(x-a)^2, & x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ M^2(b-x)^2, & x \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases}$$

此分段函数在 $x = \frac{a+b}{2}$ 不可导, 这与 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导矛盾!

例 11 求证: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

例 11 求证: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

证明: 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

取 $a=\frac{\pi}{2n}$. 则有

$$\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = \int_0^{a} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt$$

例 11 求证: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

证明: 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

取 $a=\frac{\pi}{2n}$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \\ &\leqslant \int_0^a tn^4\,dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^4 dt\end{aligned}$$

例 11 求证: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

证明: 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

取 $a=\frac{\pi}{2n}$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \\ &\leqslant \int_0^a tn^4\,dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^4 dt \\ &= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(\pi/2)^2}\right)\end{aligned}$$

例 11 求证: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

证明: 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

取 $a=\frac{\pi}{2n}$. 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \\ &\leqslant \int_0^a tn^4\,dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^4 dt \\ &= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(\pi/2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

例 11 求证: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

证明: 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

取 $a=\frac{\pi}{2n}$. 则有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt &= \int_0^a t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \\
&\leqslant \int_0^a tn^4\,dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^4 dt \\
&= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(\pi/2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{\pi^2}{8} \\
&= \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.
\end{aligned}$$

例 12 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, $f(0)=0$, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且

$$|f'(x)| \leqslant |g(x)f(x)|,\ x \in \mathbb{R}.$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

例 12 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, $f(0)=0$, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且

$$|f'(x)| \leqslant |g(x)f(x)|,\ x \in \mathbb{R}.$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

证明: 令 $u(x) = \int_0^x |g(t)|\,dt$, 则 $u'(x) = |g(x)|$. 再令

$$h(x) = f^2(x)e^{-2u(x)}.$$

我们有

$$h'(x) = \big(2f(x)f'(x) - 2f^2(x)|g(x)|\big)e^{-2u(x)} \leqslant 0.$$

这说明 $h(x)$ 单调递减. 由于 $h(0)=0$, 有 $h(x) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$. 但从定义知 $h(x) \geqslant 0$. 所以 $h(x)=0$, $x \geqslant 0$. 从而当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x)=0$.

例 12 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, $f(0)=0$, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且

$$|f'(x)| \leqslant |g(x)f(x)|,\ x \in \mathbb{R}.$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

证明: 令 $u(x) = \int_0^x |g(t)|\,dt$, 则 $u'(x) = |g(x)|$. 再令

$$h(x) = f^2(x)e^{-2u(x)}.$$

我们有

$$h'(x) = \big(2f(x)f'(x) - 2f^2(x)|g(x)|\big)e^{-2u(x)} \leqslant 0.$$

这说明 $h(x)$ 单调递减. 由于 $h(0)=0$, 有 $h(x) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$. 但从定义知 $h(x) \geqslant 0$. 所以 $h(x)=0$, $x \geqslant 0$. 从而当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x)=0$.

考虑函数 $f_1(x) = f(-x)$, 同上可证 $f_1(x)=0$, $x \geqslant 0$. 于是当 $x \leqslant 0$ 时也有 $f(x)=0$.

问题 $g(x)$ 连续的条件可以放宽吗?