第十一章

1、设L是 $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$.

φ在L上连续 → 可积

$$\int_L \varphi(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

2. 特例：1° $\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=0$ 时：u.v曲线编织了一个相互垂直的向量网

2° S是平面区域时，$d\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$ σ是曲面面积

3° 如果S由 $z=f(x,y)$ 给出. $\sigma(S)=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

3. $$\iint_S \varphi(x,y,z)dS=\iint_D \varphi(x(u,v)\ y(u,v)\ z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

$$=\iint_D \varphi(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$ 用叉乘算面积

$E:\sum \bigcirc_u^2$　　$G:\sum\bigcirc_v^2$　　$F:\sum\bigcirc_u\bigcirc_v$　　$\bigcirc$是x.y.z

4. L_{AB}: $r=x(t)i+y(t)j+z(t)k$　　有连续导函数 → 可积 点乘

$$\int_{L_{AB}} v\,dr=\int_\alpha^\beta [Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)]\,dt$$

设向量场 $\vec{v}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$

5. (Green) $$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$
背

向量场：一点对应一个向量
数量场：一点对应一个数量

6. 对于与路径无关的曲线积分.有下列性质

1) 对任何简单封闭曲线L.　$\oint_L \vec{v}d\vec{r}=0$

或 $\int_{L_{AB}}\vec{v}d\vec{r}=\int_A^B\vec{v}d\vec{r}$

2) $\exists\varphi(x,y)$ 使 $\vec{v}=\mathrm{grad}\,\varphi(x,y)=\nabla\varphi(x,y)$

3) $\vec{v}$的两分量 Q.P 满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$

7. [定义] 设 $V(M)$ 是定义在$\vec{S}$上的向量场. $\vec{S}$正向为单法$\vec{n}$　区分$\vec{S}$与S

$\iint_S\vec{v}d\vec{S}=\iint_S\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$ 称为$\vec{v}$在S上的第二型曲面积分 (第一/二类)

$\oiint_S\vec{v}d\vec{S}$ 称为通量

8. $$\iint_S\vec{v}d\vec{S}=\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$$
$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$ ($\cos\alpha.\beta.\gamma$是方向余弦)

9. $\iint_S \vec v\cdot\vec n\,dS = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dxdy$

$= \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R)\,dxdy$

10. $\oiint_S \vec v\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$ 线.

(Gauss) $\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

或 $\oiint_S \vec v\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec v\,dV = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec v\,dV$

11 (Stokes) $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$ 面.

$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

或 $\oint_L \vec v\,d\vec r = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec v\,dS = \iint_S \nabla\times\vec v\,dS$

12. 梯度、散度和旋度的积分表示:

$$\begin{cases} \nabla\varphi = \lim\limits_{V\to P}\left[\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S \varphi\,d\vec S\right] \\ \nabla\cdot\vec v = \lim\limits_{V\to P}\left[\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S \vec v\,d\vec S\right] \\ \nabla\times\vec v = \lim\limits_{V\to P}\left[\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S d\vec S\times\vec v\right] \end{cases}$$

注释: 这里V是包含点P的一个空间区域

$V\to P$ 表示 V 收缩到P点

$\sigma(V)$ 表示V的体积

$S=\partial V$ 表示V的边界

13. $\oiint_{\partial V} \varphi\,d\vec S = \iiint_V \nabla\varphi\,dV$

$\oiint_{\partial V} d\vec S\times\vec v = \iiint_V \nabla\times\vec v\,dV$

14. 以下三命题等价:

1° v是保守场

2° 存在一个数量场φ使得 $\vec v=\nabla\varphi$, 并称φ是向量场v的势函数.

$\vec v\,dr = \nabla\varphi\,dr = d\varphi$

3° v满足 $\nabla\times\vec v=\vec 0$.

15. 判断一个向量场是保守场 等价于 $\nabla\times\vec v=0$ 即:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \end{cases}$$

补充.

$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (Laplace)

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec i+\frac{\partial f}{\partial y}\vec j+\frac{\partial f}{\partial z}\vec k$ (Nabla)

$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi$ (梯度) [是法向

$\mathrm{div}\,\vec v = \nabla\cdot\vec v = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ (散度)

$\mathrm{rot}\,\vec v = \nabla\times\vec v = \cancel{\frac{\partial R}{\partial y}}$

$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k$

第十二章

16. 偶延拓与奇延拓

偶延拓：$f_e(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le l \\ f(-x) & -l\le x<0 \end{cases}$

奇延拓：$f_o(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le l \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -l\le x<0 \end{cases}$

17. Fourier 公式

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n\ge 1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\begin{cases} a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \\ b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \end{cases}$$

18. (Dirichlet) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期

1° 如果在任何区间上 $f(x)$ 分段可微，则它的 Fourier 级数在整个数轴上收敛。

且：$\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\cos nx)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

2° 在1°条件下再增加一致连续的条件，那么其 Fourier 一致收敛于 $f(x)$

19. 有限区间 $[a,b]$ 上：

$$\begin{cases} a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \\ b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx \end{cases}$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

20. Fourier 变换

像函数：$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi$

原函数：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$

Fourier 积分公式又可写成 $f(x)=\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,dx$

其中 $a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi$

$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$

偶函数 $f(x)\to F_e(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$

$F_e(\lambda)\to f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_e(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda$

奇函数 $f(x)\to F_o(\lambda)=-2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$

[令 $G_o(\lambda)=iF_o(\lambda)=2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$，则：

相应逆变换为 $G_o(x)\to f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} G_o(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda$.

21. (Cauchy) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛：

$\forall \varepsilon>0$. $\exists A_0>a$. 只要 $A', A''>A_0$ 有 $|F(A'')-F(A')|=\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon$ (充要)

22. 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛

23. 非负函数 $f(x)$

$\int_a^A f(x)dx < M$ 对 $\exists M>0$. $\forall A>a$ 成立，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 (充要)

比较判别法，极限 . $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=k$

24 (二中值) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

1° 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且 ↘. 那么 $\exists \xi\in[a,b]$ 使得

$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$

2° 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且 ↗ 那么 $\exists \eta\in[a,b]$ 使得

$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_{\eta}^b f(x)dx$

3° 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调 (不必非负)，那么 $\exists \xi\in[a,b]$ 使得

$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

25. (Dirichlet)

若 $\begin{cases} F(b)=\int_a^b f(x)dx \text{ 作为b的函数在 } (a,+\infty) \text{ 上有界} \\ g(x) \text{在} (a,+\infty) \text{ 上单调}. \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \end{cases}$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛.

26 (Abel) $\begin{cases} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 收敛} \\ g(x) \text{在} [a,+\infty) \text{上单调有界} \end{cases}$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

27. (Cauchy) 设 a 是 $f(x)$ 的瑕点. 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛：当且仅当对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$

只要 $0<\eta',\eta''<\delta$. 有 $\left|\int_{a+\eta'}^{a+\eta''} f(x)dx\right|<\varepsilon$. (充要)

第22.23条对此同样成立.

第十三章(二)

28. 若函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续

则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续

且满足 $\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)dx\right]du=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx$

29. 设函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且对 u 有连续偏微商

则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，并且求导和积分运算可交换。

$$\varphi'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$ [什么东西都可以交换]

30. 设函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 连续，函数 $a(u)$, $b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续

并且 $a\le a(u)$, $b(u)\le b$。

则：$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。

31. [29第一行]，$a(u)$ 和 $b(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，并且 $a\le a(u), b(u)\le b$

则 $\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)$

32. [定义] 若对 $\forall\varepsilon>0$，总有 $X>a$，当 $A>X$ 时，

$\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\varepsilon$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 成立，那么称 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。

33. 无穷区间上含参变量积分一致收敛的充要条件是：

$\lim\limits_{A\to\infty}\beta(A)=0$ 其中 $\beta(A)=\sup\limits_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|$

34. (Cauchy) $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 仅与 ε 有关的 X，使当 $A',A''>X$，有 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)dx\right|<\varepsilon$ 对 $\forall u\in[\alpha,\beta]$ 成立。

35. (Weierstrass) 设 $f(x,u)$ 在区域 $I=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，如果存在一个在 $[a,+\infty)$ 上可积的函数 $p(x)$，使得对于一切充分大的 x 以及 $[\alpha,\beta]$ 上的任意 u

都有 $|f(x,u)|\le p(x)$，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，$p(x)$ 称为它的控制函数

36. (Dirichlet) 设函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 对每个 $u\in[\alpha,\beta]$ 在 $[a,+\infty)$ 中任意有限区间 $[a,b]$ 上可积

若满足 $\begin{cases}\text{积分 }\int_a^b f(x,u)dx\text{ 关于 }b\ge a\text{ 和 }u\in[\alpha,\beta]\text{ 一致有界 即}\exists M>0\text{ 使 }\int_a^b f(x,u)dx\le M\\ \text{对每个固定的 }u\in[\alpha,\beta]\text{，}g(x,u)\text{ 是 }x\text{ 的单调函数，且关于 }u\in[\alpha,\beta]\text{ 一致}\cancel{\text{有界}}\text{ 趋于 }0\end{cases}$

则积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。

37 (Abel) 大体同36. 区别如下

$$\begin{cases} \int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx \text{ 关于 } u\in[\alpha,\beta] \text{ 一致收敛} \\ g(x,u) \text{ 单调. 一致有界} \end{cases}$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

38. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$

有以下性质 1° $\Gamma(s)$ 定义域是 $(0,+\infty)$ 且在其上连续

2° Γ 有任意阶导数. 且 $\Gamma^{(k)}(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}(\ln t)^k\,dt$

3° $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

4° $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin s\pi}$ (余元)

5° $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} u^{2s-1}e^{-u^2}\,du$

39. $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$

有以下性质 1° 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上有定义. 满足对称性且连续

2° $B(p,q)=\int_0^{+\infty} \dfrac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,d\theta$$

3° $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

$\Gamma(2p)=\dfrac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})$

40. [定义] $z=f(x,y)$ 是定义在平面点集 D 上的二元函数，$M_0=(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，

又设 a 是一个数，如果对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. 当 $M=(x,y)\in D$ 时

满 $0<\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

或 $|x-x_0|,\ |y-y_0|<\delta$] 条件

有 $|f(M)-a|<\varepsilon$ 那么称 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a$

或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$

41. 条件：$f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 附近有定义. 在 M_0 处有极限 a

$x=x(t)$. $y=y(t)$ 在 $0<|t-t_0|<l$ 有定义. 使得 $(x(t),y(t))$ 在定义域内属于邻域

且 $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x_0$ $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=y_0$

则：$\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=a$ [只要 lim 存在 则沿任何路径都随便]

42 [定义] $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 f 在 (x_0,y_0) 连续

43 设函数 $f(x,y)$ 在 D 内存在两偏导数

$\begin{cases} \text{偏导有界} \Longrightarrow f\text{连续} \\ \text{偏导连续} \Longrightarrow f\text{可微} \end{cases}$

44. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \underbrace{\operatorname{grad} f}_{\text{函数梯度}} \cdot \vec{e}$ → 方向量（单位）

方导

对于三元. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\operatorname{grad} f\cdot\vec{e}$.

45. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}$

46. $\vec{a}(t)$、$\vec{b}(t)$ 向量值函数，$f(t)$ 数量函数

1° $\frac{d}{dt}(f\vec{a}) = f\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{df}{dt}\vec{a}$

2° $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$

3° $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$

47. Jacobi：$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

48. [隐函数存在] $M_0(x_0,y_0) \in$ 开区域 D

若 D 中 $F(x,y)$ 满足：
$$\begin{cases} 1° & F(x,y) \text{ 在 } D \text{ 中有连续偏导} \\ 2° & F(x_0,y_0)=0 \\ 3° & F'_y(x_0,y_0) \neq 0 \end{cases}$$

那么 $\exists (a,b)\times(c,d) \subset D$ 对 $\forall x\in(a,b)$ $F(x,y)=0$ 存在唯一解 $y=f(x)$

满足 $y_0=f(x_0)$ 且 $y=f(x)$ 连续，并有 $\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ 图容易记

49. 对于向量来说，一个点是一阶导，二个点是二阶导

记 $\vec{k} = \underbrace{\vec{\dot{r}}}_{\text{切向量（若单位化）}} \times \vec{\ddot{r}}$ 这是副法向量.

$|k| = |\ddot{r}|$

50. [二元Taylor]

$$f(x,y) = f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} D^m f(x_0,y_0) + R_n.$$

其中：$R_n = \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ $(0<\theta<1)$ 这是无用的余项！

D^m：
$$D^m = \sum_{i+j=m} \frac{m!}{i!\,j!} h^i k^j \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j}$$

特别地一阶：$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} + R_1$

51 设 $M(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个驻点

在 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2)$ 中

1° $\Delta>0$，$A>(<)0$ 时，他正(负)定，M是f的极小(大)点

2° $\Delta<0$ 他不定，M不是极值点

3° $\Delta=0$ 无法判断

人话：$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$ $B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$ $C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$

52 ~~[我们的进一步归纳]~~

[条件极值，Lagrange乘数法]

条件：$\varphi(x,y)=0$ 要算极值的函数 $f(x,y)$

则引入 $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\underbrace{\varphi(x,y)}_{\to 0}$

$$\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

三个未知数 x,y,λ 进而解出驻点

⚠ 若约束是参数方程 直接解 $g(t)=f(x(t),y(t),\dots)$

53 D上可积函数必有界 但有界函数未必可积（Dirichlet）

54. n重积分可交换

55. [二重积分换元]

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv.$$

特别地 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

56 [三重] [剩下的模仿二重套Jacobi]

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$