11.5.2 Stokes 定理

当 L 是平面上分段光滑闭曲线时, L 可以在平面上围成一个闭区域 D, 此时对于平面上的光滑向量场 $\vec{F}=(P,Q)$, $\vec{F}$ 在 L 上的第二型曲线积分等于 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上的二重积分. 当 L 是空间中的闭曲线, $\vec{F}$ 是空间中的向量场 (P,Q,R) 时, $\vec{F}$ 在 L 上的第二型曲线积分也可以与曲面积分建立联系.

定理 1 (Stokes **公式**) 设 S 是以封闭曲线 L 为边界的分片光滑曲面, P,Q,R 是在包含曲面 S 的一个空间区域上具有连续偏导数的函数. 则有

$$\oint_L P dx+Q dy+R dz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz+ \tag{11.1}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy, \tag{11.2}$$

其中 L 的取向与 S 的方向协调.

证明 考虑三种类型的曲面,

A 型曲面: 平行于 x 轴的直线与 S 至多有一个交点.

B 型曲面: 平行于 y 轴的直线与 S 至多有一个交点.

C 型曲面: 平行于 z 轴的直线与 S 至多有一个交点.

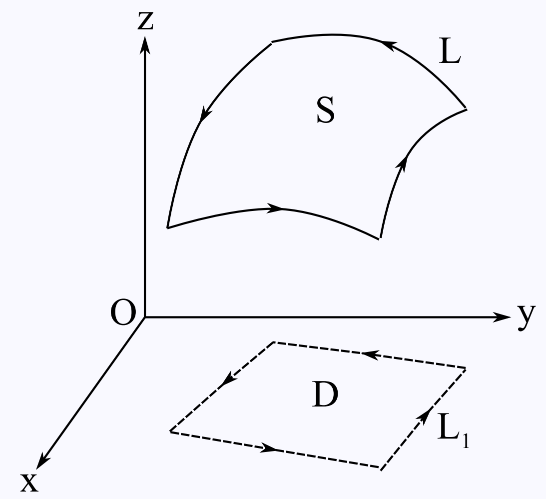
先假设 S 是一个 C 型曲面, 这时 S 有显表示 $z = f(x, y), (x, y) \in D$, D 是 S 在 Oxy 平面上的投影. 设 $L_1 = \partial D$, 且设 L_1 的方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta].$$

这样 L 的方程就是

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t)),\ t \in [\alpha, \beta].$$

不妨设 t 增加的方向就是 L 的方向. 此方向与 S 的方向协调.



根据第二型线积分的计算方法以及 Green 公式, 有

$$\begin{aligned}
\oint_L P(x,y,z)dx &= \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))x'(t)dt \\
&= \oint_{L_1} P(x,y,f(x,y))dx \\
&= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y} P(x,y,f(x,y))dxdy \\
&= -\iint_D \left(P_2'(x,y,f(x,y)) + P_3'(x,y,f(x,y))z_y'\right) dxdy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\because \quad \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy &= \iint_D P_2'(x,y,f(x,y))dxdy \\
\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx &= \iint_D P_3'(x,y,f(x,y))\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}dxdy \\
&= -\iint_D P_3'(x,y,f(x,y))z_y' dxdy
\end{aligned}$$

$$\therefore \oint_L P(x,y,z)dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy. \tag{11.3}$$

类似地, 当 S 是 A 型曲面时, 有

$$\oint_L Q(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz. \tag{11.4}$$

当 S 是 B 型曲面时, 有

$$\oint_L R(x,y,z)dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx. \tag{11.5}$$

于是当 S 既是 A 型曲面, 又是 B 型和 C 型曲面时, (11.3),(11.4),(11.5) 同时成立, 三式相加即得 (11.1) 式. 进一步, 当 S 是由有限个具有上述性质的曲面协调拼接而成时, (11.1) 式仍成立. 在这样的条件下, 已证明了 Stokes 公式.

当 S 是二阶连续可微的正则定向曲面时, 可以下面的方法证明 Stokes 公式. 设 S 的参数方程是

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D.$$

∂D 的参数方程为 $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, t 增加的方向为 $L = \partial S$ 的方向. 于是根据 Green 公式, 有

$$\begin{aligned}\oint_L P(x,y,z)\,dx &= \int_\alpha^\beta P x'(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot v'(t)\right) dt \\ &= \oint_{\partial D} P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}du + P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}dv \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) dudv.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because\ \frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}x'_u + \frac{\partial P}{\partial y}y'_u + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u\right)x'_v + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}x'_v + \frac{\partial P}{\partial y}y'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_v\right)x'_u + P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\end{aligned}$$

‖◀	▶‖	◀	▶	返回	全屏	关闭	退出

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

$$\begin{aligned}\oint_L P(x,y,z)dx&=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv\\&=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge dx-\frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy,\end{aligned}$$

即, (11.3) 成立. 同理 (11.4),(11.5) 也成立. 于是 (11.1) 成立. 证毕.

Stokes 公式可写成

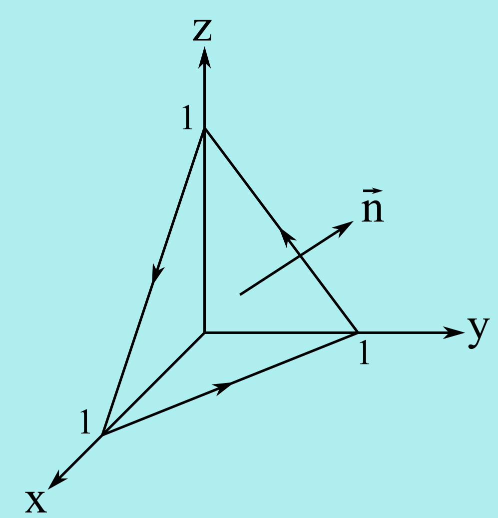
$$\oint_{\partial S}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\begin{vmatrix}dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\tag{11.6}$$

返回 全屏 关闭 退出

例 1 设曲面 S 为 $\{(x,y,z): x+y+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$, 法向与 $(1,1,1)$ 同向. 求力场 $\vec{F}=(y^2,z^2,x^2)$ 绕 S 的正向边界 ∂S 一周所做的功.

解 S 的单位法向量是 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 于是根据 Stokes 公式

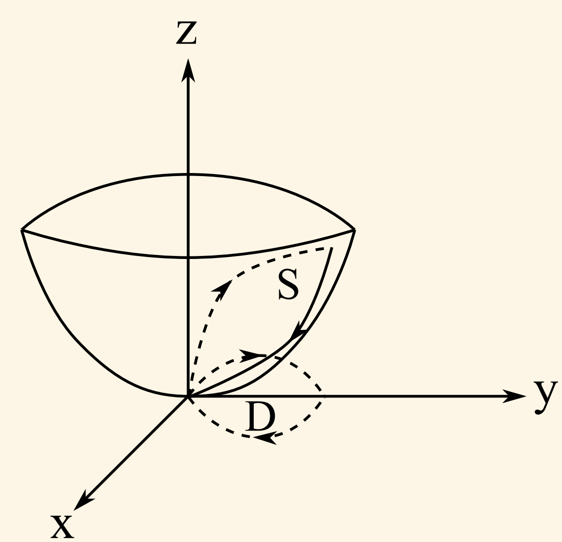
$$\begin{aligned}
\text{做功} &= \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \iint_S (-2z,-2x,-2y)\cdot\vec{n}\,dS \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\,dS \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -1.
\end{aligned}$$



例 2 设曲线 L 是椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2$ 与椭圆柱面 $4x^2 + y^2 = 4y$ 的交线, 从 z 轴的正向看, L 的方向是顺时针方向. 求向量场 $\vec{F} = (y(z+1), xz, xy - z)$ 沿 L 的环量.

解 D 是 Oxy 平面区域 $4x^2 + y^2 \leqslant 4y$, S 是曲面 $z = 3x^2 + 4y^2$ $(x, y) \in D$, 方向朝下. 由 Stokes 公式

$$
\begin{aligned}
\text{环量} &= \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y(z+1) & xz & xy - z \end{vmatrix} \\
&= -\iint_S dx \wedge dy \\
&= \iint_D dxdy = 2\pi.
\end{aligned}
$$



例 3 计算 $I=\int_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中

$$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax\\ x^2+y^2=2bx,\end{cases}\quad z\geqslant 0,\ 0<b<a.$$

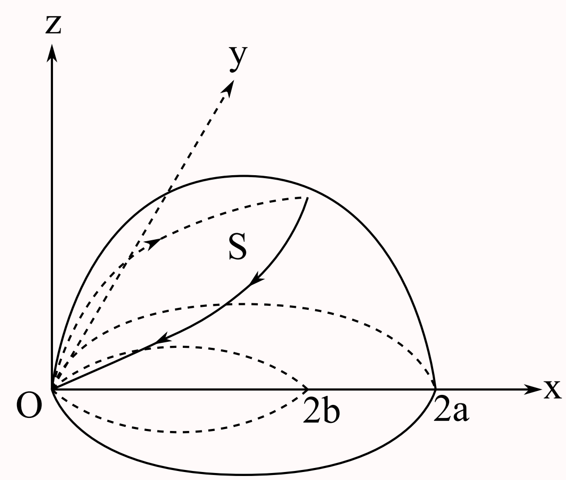
从 x 轴正向看过去, L 的方向是逆时针方向.

解 设 S 是 L 在半球面 $x^2+y^2+z^2=2ax\ (z\geqslant 0)$ 所围成的曲面. 因为从 x 轴正向看, L 的方向是逆时针的, 所以 S 的方向朝下, 指向球心. 因此 S 的法向为 $\vec{n}=-\frac{1}{a}(x-a,y,z)$. 由 Stokes 公式, 有

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}$$

$$=2\iint_S (y-z,z-x,x-y)\cdot\vec{n}dS$$

$$=-2\iint_S (z-y)dS=-2\iint_S zdS$$



因为 S 的方程是 $z=\sqrt{a^2-(x-a)^2+y^2}$, 所以

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$
$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-(x-a)^2+y^2}}dxdy=\frac{a}{z}dxdy,$$

因而

$$I=-2a\iint_D dxdy=-2a\pi b^2=-2\pi ab^2,$$

其中 D 是 S 在 Oxy 平面的投影, 即, $(x-b)^2+y^2\leqslant b^2$.

例 4 计算第二型曲线积分 $I = \int_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L 是柱面 $S_z: x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\pi_y: \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\ (a,h>0)$ 的交线, 从 x 轴正向看去沿逆时针方向.

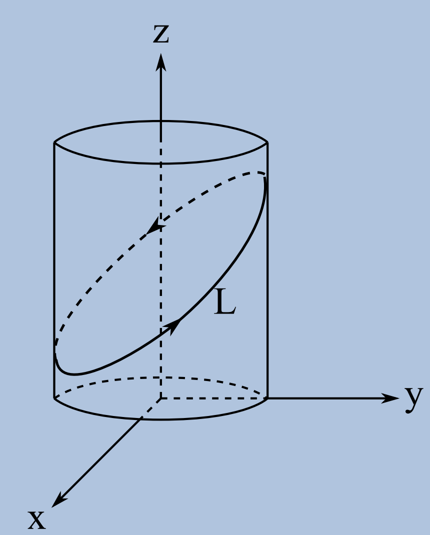
解 方法 1: 设 S 是平面 π_y 被柱面 S_z 所截下的部分, 则 $L=\partial S$. S 在 Oxy 平面上的投影为圆盘 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant a^2$, 在 Oyz 平面上投影为椭圆盘 $D_{yz}: \frac{y^2}{a^2}+\frac{(z-h)^2}{h^2} \leqslant 1$, 在 Ozx 平面上投影为直线段. 由 Stokes 公式

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}$$

$$= -2\iint_S dy\wedge dz + dz\wedge dx + dx\wedge dy$$

$$= -2\iint_{D_{yz}} dydz - 2\iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$= -2\pi ah - 2\pi a^2 = -2\pi(a+h)a.$$



方法 2: S 是半轴分别为 a 和 $\sqrt{a^2+h^2}$ 的椭圆, 它的单位法向量为 $\vec{n}=\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$. 根据 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}
I&=\iint_S \begin{vmatrix} \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\
&=\iint_S \frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}dS \\
&=\frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_S dS \\
&=\frac{-2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\pi\sqrt{a^2+h^2}a \\
&=-2\pi(a+h)a.
\end{aligned}$$

‖◀　▶‖　◀　▶　返回　全屏　关闭　退出

方法 3: 不用 Stokes 公式, 直接用第二型曲线积分的计算方法. 设 L 在 Oxy 平面上的投影的参数方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t\ (t \in [0, 2\pi])$. 因而 L 的参数方程为

$$\vec{r}(t):\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = h(1-\cos t)\quad (t \in [0, 2\pi]).$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, h\sin t).$$

记 $\vec{F} = (y-z, z-x, x-y)$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\big(-a^2 - ah + ah\sin t + ah\cos t\big)dt \\ &= -2\pi(a+h)a. \end{aligned}$$

11.5.3 微分形式的积分

在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 记向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 称

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{1}$$

为一个 p 次微分形式, $a_{i_1,\cdots,i_p}(x)$ 是 n 元函数, 标号 $i_1, \cdots, i_p$ 中的每一个都独立地从 1 取到 n. 上式可以简记为

$$\sum_I a_I(x) dx_I, \tag{2}$$

这里 $I = (i_1, \cdots, i_p)$ 它的每个分量从 1 取到 n. 约定

$$\begin{cases} dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \\ dx_i \wedge dx_i = 0. \end{cases} \tag{3}$$

因此, (1) 可以写成

$$\omega = \sum a_{i_1,\cdots,i_p}(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{4}$$

这里的求和是对一切适合条件 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$ 的指标进行.

设 $\mathbb{R}^n$ 中的 p 维曲面 S 有参数表示

$$\Phi: \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \cdots, u_p) \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n(u_1, \cdots, u_p) \end{cases}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_p) \in E \subset \mathbb{R}^p$, E 称为 S 的参数域, 并且

$$x_i = x_i(u_1, \cdots, u_p)\ (i = 1, \cdots, n)$$

有一阶连续偏导数. 所以 S 就是从 $E \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 的 C^1 向量值函数.

设 ω 是 (4) 中 p 次微分形式. 定义 ω 在 S 上的积分为

$$\int_S \omega = \int_E \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\Phi(u)) \frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})}{\partial(u_1,\cdots,u_p)} du_1\cdots du_p \tag{5}$$

它是 E 上的一个 p 重积分. 我们有如下一般的 Stokes 公式:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega, \tag{6}$$

这里 ω 是 p 次微分形式, Ω 是 $p+1$ 维曲面.