

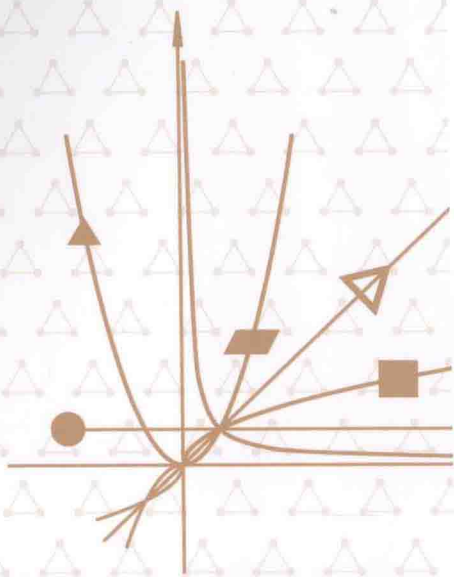


“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



中国科学技术大学 精品教材

“十二五”国家重点图书出版规划项目 | 中国科学院指定考研参考书



中国科学技术大学数学科学学院 / 编著

微积分学 导论（下册）第2版

Introduction to Calculus

中国科学技术大学出版社

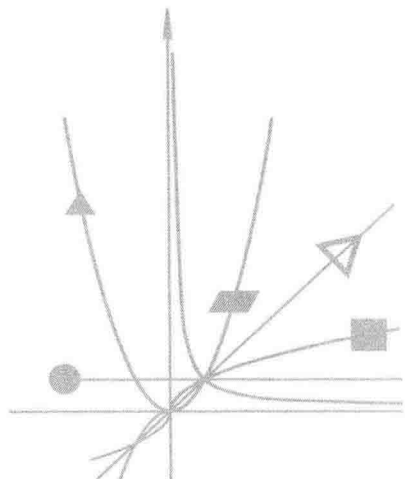


“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



中国科学技术大学 精品教材

“十二五”国家重点图书出版规划项目 | 中国科学院指定考研参考书



中国科学技术大学数学科学学院 / 编著

Introduction to Calculus

微积分学导论 (下册)

第2版

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

《微积分学导论》是在中国科学技术大学高等数学教研室编写的《高等数学导论》基础之上,由参与微积分教学多年的教师分工编写而成的,内容结构方面得以重新组织和优化,而且部分过于烦琐的内容也得到了删除或简化,以适应当今理工科数学教育的发展,并满足培养学生的要求.分上、下两册出版,内容包含微积分学的核心内容及其应用.

本书是下册,内容包括多变量函数的微分学、多变量函数的积分学、无穷级数、含参变量积分、傅里叶分析等五章.本书的编写充分考虑了学生的背景和认知水平,尽量由具体问题引入数学概念,同时采用语言描述、公式表达、数值列表以及图形说明等多种方式,以使抽象深奥的数学概念、思想和方法变得具体、生动、形象和直观.为加深对概念、定理等的理解和掌握,书中编有丰富的例题,并有详细的解答,可给学生提供一个分析问题和解决问题的范本;还提供了大量的习题和复习题供学生练习;另外,每章末的复习都很好地总结了该章的内容,以供学生参考和总结.

本书可作为理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书,也可供具有一定数学基础的读者自学.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学导论.下册/中国科学技术大学数学科学学院编著. —2版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2016.1

(中国科学技术大学精品教材)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

中国科学院指定考研参考书

ISBN 978-7-312-03869-3

I. 微… II. 中… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 292529 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

合肥市宏基印刷有限公司印刷

全国新华书店经销

开本:710×960 1/16 印张:24 插页:2 字数:459 千

2012 年 2 月第 1 版 2016 年 1 月第 2 版 2016 年 1 月第 3 次印刷

定价:45.00 元



编审委员会

主任 侯建国

副主任 窦贤康 陈初升
张淑林 朱长飞

委员 (按姓氏笔画排序)

方兆本	史济怀	古继宝	伍小平
刘 斌	刘万东	朱长飞	孙立广
汤书昆	向守平	李曙光	苏 淳
陆夕云	杨金龙	张淑林	陈发来
陈华平	陈初升	陈国良	陈晓非
周学海	胡化凯	胡友秋	俞书勤
侯建国	施蕴渝	郭光灿	郭庆祥
奚宏生	钱逸泰	徐善驾	盛六四
龚兴龙	程福臻	蒋 一	窦贤康
褚家如	滕脉坤	霍剑青	

总 序

2008年,为庆祝中国科学技术大学建校五十周年,反映建校以来的办学理念 and 特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列.在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列.

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版,共出书50种,在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响,并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划.为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设,结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材,学校决定,将精品教材出版作为常规工作,以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版,并设立专项基金给予支持.国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划.

1958年学校成立之时,教员大部分来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据“全院办校,所系结合”的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.


学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一.当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献.建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养

了一届又一届优秀学生.入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技術.

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献.



中国科学院院士
第三世界科学院院士

第 2 版前言

本书第 1 版于 2011 年 8 月由中国科学技术大学出版社出版,出版后即在中国科学技术大学 2011 级新生中使用.使用三年来,受到了师生们普遍的欢迎和肯定,并被教育部遴选为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材.

这一版在第 1 版的基础上做了一些修订,并对个别内容作了增删或重写.特别是增加了达布定理及其证明,并用它重新证明了换元积分法及洛必达法则等.与第 1 版不同,这一版在“泰勒公式”一节中先讨论函数在给定点近旁的近似行为,即带有佩亚诺型余项的泰勒公式,对余项给出定性的描述;而后研究函数在大范围内的性质,即带拉格朗日型余项的泰勒公式,对余项给出了定量的估计.在每章后面的复习思考题中,有的增加了构造性的问题,以启发学生的思维和提高学生的思考能力.其他修订在此不一一提及.因学时限制,有些可以不讲的内容或者较难的一些证明,我们都标记了星号,供教师选择或供学有余力的学生作为阅读材料.

参加本版修订工作的有李思敏教授、陈祖墀教授,以及宣本金、罗罗、叶盛、汪琥庭和吴健等副教授.修订不足之处在所难免,还望专家和读者指正.

作 者

2015 年 3 月

中国科学技术大学

前 言

本教材是在中国科学技术大学高等数学教研室编写的《高等数学导论》基础之上编写而成的. 而《高等数学导论》脱胎于中国科学技术大学成立之初由曾肯成教授主编的《高等数学讲义》, 是 20 世纪 80 年代由当时的任课教师集体改编而成的. 这两部教材在中国科学技术大学的教学历程中都起到了积极的作用, 培养了一批又一批学子, 功不可没. 随着时代的发展, 《高等数学导论》改编重版的必要性就显得越来越紧迫了. 这主要表现在以下几点:

(1) 《高等数学导论》自 1988 年出版以来, 已经二十多年了. 虽然这二十多年中有过修改, 但只是对错漏的订正. 后来为了适应中国科学技术大学学制“五改四”的需要, 教学课时和周期大大缩减, 将原三册改为上、下两册出版, 但是由于种种原因教材内容和结构等基本没有变动. 所以, 一直以来我们想对《高等数学导论》从内容方面重新撰写, 并从结构方面重新组织和优化, 添加一部分新内容, 删除或简化一部分过于烦琐的内容, 以适应今天培养大学生的要求. 在本教材中有若干定理的证明加上了星号*, 表示该证明利用了后面的结论或者附录中的结论, 对于课时比较紧张的课堂, 可以只要求学生利用该定理的结论即可, 定理证明的细节可以跳过; 还有若干小节加上了星号*, 表示在课时比较紧张时, 可以跳过该小节内容的学习, 而不影响微积分学核心内容的学习和理解, 也可以安排为课外阅读内容, 由授课教师根据教学进度以及学生的接受能力等决定取舍.

(2) 《高等数学导论》包括解析几何和向量代数的内容, 但现在这些内容已经划归为“线性代数”课程的一部分, 所以应该从微积分课程中删除掉; 还有一些内容也要删除, 比如实数的完备性等, 由于非数学系学生对于数学逻辑证明的接受能力以及教学时间紧迫等原因, 这些内容一般在课堂上不

予讲授,但还穿插在教材的正文部分,使学生陷入“学”与“不学”的两难境地,给学生带来困惑,给教学带来麻烦.本教材将改写后的实数构造理论以及实数完备性的几个等价定理,放入附录之中,可供对之感兴趣而又学有余力的学生学习.当然这些内容对于理解建立在实数基础之上的极限理论,乃至整个微积分学都有很大的帮助.本教材将原来分别编写在上、下两册的可积常微分方程和线性微分方程两部分内容进行整合,统一纳入到上册的“微分方程”一章.这样有利于教学安排,节省课时,又方便学生学习理解.同时,由于上册没有讲授幂级数知识,所以应用幂级数求解方程的内容将放入幂级数的应用之中讲授.本教材还纠正了《高等数学导论》中若干错漏之处.

(3) 钱学森先生是中国科学技术大学近代力学系首任系主任,他对非数学系用的微积分教材的编写有过指导性建议:既要写出从哪儿来,即数学概念的“来龙”,也要写出到哪儿去,也就是用在什么地方,即数学知识的“去脉”.钱老的这些意见是我们写作本书始终遵守的原则.在教材编写过程中,我们充分考虑学生的背景和认知水平,尽量由具体问题引入数学概念,同时辅以几百张图片,以使那些抽象深奥的数学概念、思想和方法变得具体、生动、形象和直观.对于微积分学中的概念、思想和方法的物理和几何背景与解释,与数学其他分支之间的联系以及理论和重要公式之间的联系都适当地写入本教材之中,以帮助学生理解,使其不但知其然,也知其所以然.数学理论学习之后,本教材都有意地编排一些物理和几何甚至是生活中的具体应用问题,对这些问题的分析和解决,可以培养学生运用数学知识分析问题和解决问题的能力,激发其学习数学的兴趣.

(4) 华罗庚先生是中国科学技术大学应用数学和计算技术系的首任系主任,他亲自写作的《高等数学》在内容的取舍和写作方法以及叙述论证的风格等方面始终是我们本书写作过程中模仿的楷模.我们尽量做到核心知识突出,理论体系脉络清晰,简繁适当,论证简洁清楚,枝节问题一笔带过,例题针对性强,并且分析透彻,能起到举一反三的作用,应用问题紧贴知识主题且分析细致.在每一章之末,专门编写本章复习.首先,将本章内容作提纲挈领性的回顾,这就是华老提出的“由厚到薄”的学习过程;其次,提出一些与正文内容紧密相连的复习思考题,以利于学生对自己的学习掌握情况作检验,引导学生再“由薄到厚”.同时,本教材用许多开放式的思考题引导学生将数学与其他自然科学以及日常生活紧密地联系起来,增强其学习兴

趣;最后,附有一定量的具有较强综合性的复习题,帮助学生将所学知识融会贯通,提高自己解决问题的能力,其中不乏近年来的考研试题.

本书由长期参加中国科学技术大学微积分课程教学的老师们编写而成.他们是陈祖墀教授、李思敏教授,以及宣本金、罗罗、叶盛、汪琥庭及吴健等副教授.宣本金绘制了全书插图.

在此,我们对在编写本教材过程中所有给予过帮助的同事和朋友表示衷心的感谢,特别对编写《高等数学导论》的同事们表示感谢.初写《微积分学导论》,错误和不足之处在所难免,还望广大专家和读者给予指正.

作 者

2011年5月

中国科学技术大学

目 次

总序	(i)
第 2 版前言	(iii)
前言	(v)
第 6 章 多变量函数的微分学	(1)
6.1 多变量函数的极限与连续	(1)
6.1.1 平面点集	(1)
6.1.2 二元函数的极限	(5)
6.1.3 二元函数的连续性	(7)
6.1.4 多元函数与向量值函数	(8)
6.2 多变量函数的微分与偏导数	(12)
6.2.1 二元函数的微分与偏导数	(12)
6.2.2 高阶偏导数	(17)
6.2.3 多元函数和向量值函数的微分与偏导数	(18)
6.3 复合函数的偏导数	(22)
6.3.1 复合函数偏导数的链式法则	(22)
6.3.2 复合函数的高阶偏导数	(27)
6.3.3 一阶微分的形式不变性	(28)
6.4 隐函数与反函数的微分法	(31)
6.4.1 隐函数的存在定理与微分法	(31)
6.4.2 反函数的存在定理与微分法*	(37)
6.5 多元函数的泰勒公式与极值	(41)
6.5.1 二元函数的泰勒公式	(41)
6.5.2 多元函数的极值	(44)
6.5.3 条件极值	(49)

7.7 场论初步	(161)
7.7.1 场的概念	(162)
7.7.2 数量场的梯度	(162)
7.7.3 向量场的散度	(166)
7.7.4 向量场的旋度	(169)
7.7.5 保守场与势函数	(171)
7.7.6 无源场与向量势*	(177)
7.7.7 哈密顿算符	(180)
复习	(186)
第8章 无穷级数	(189)
8.1 数项级数	(190)
8.1.1 数项级数的基本概念	(190)
8.1.2 正项级数敛散性的判别法则	(193)
8.1.3 一般数项级数的敛散性	(200)
8.2 函数项级数	(214)
8.2.1 函数列的收敛性	(214)
8.2.2 函数项级数的收敛性	(216)
8.2.3 一致收敛级数和函数的性质	(222)
8.3 幂级数与泰勒级数	(229)
8.3.1 幂级数的收敛半径	(229)
8.3.2 幂级数及其和函数的性质	(232)
8.3.3 函数的泰勒级数展开	(235)
8.4 级数应用举例	(241)
复习	(248)
第9章 含参变量积分	(253)
9.1 广义积分收敛的判别法则	(254)
9.1.1 无穷积分收敛的判别法则	(254)
9.1.2 乘积函数积分收敛的精细判别法则	(256)
9.1.3 无界函数积分的收敛性	(260)
9.2 含参变量常义积分	(263)
9.2.1 含参变量常义积分的性质	(264)
9.2.2 积分限依赖于参变量的积分	(268)

第 6 章 多变量函数的微分学

6.1 多变量函数的极限与连续

6.1.1 平面点集

在平面 \mathbb{R}^2 中建立直角坐标系, 则平面中的点可以用有序的二元数组来表示:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

平面中两点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ 间的距离(图 6.1) 定义为

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

它满足距离的三个要素:

- (1) (正定性) $\rho(M_1, M_2) \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $M_1 = M_2$;
- (2) (对称性) $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$;
- (3) (三角不等式) $\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3)$.

仔细考察上册中的单变量微积分学, 可以发现函数的连续性、可微性以及可积性都是建立在极限理论的基础之上的, 而极限是通过距离来定量刻画的. 类似地, 平面中两点间的距离也是刻画平面点集以及定义在平面点集上的函数的极限、连续等概念的基础.

设 M_0 为平面中的一个点, $\epsilon > 0$, M_0 的 ϵ 邻域定义为

$$B(M_0, \epsilon) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(M, M_0) < \epsilon\}.$$

这是以 M_0 为中心、 ϵ 为半径的圆盘(不含边缘). 去掉圆心的圆盘记为

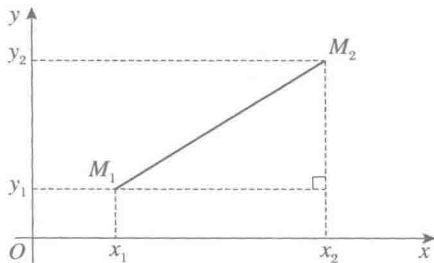


图 6.1 平面中两点间的距离

由定义不难看出:两个开集(闭集)的并集和交集仍为开集(闭集).为了更好地刻画开集和闭集,我们引入聚点的概念.

设 E 为一个给定的平面子集, M 为平面中的一点. 如果对 $\forall \epsilon > 0, B_-(M, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$, 即 M 的任意邻域中都含有异于 M 的 E 中的点, 则称 M 为 E 的聚点.

注意, 聚点的定义中并没有要求 E 的聚点一定在 E 中. 例如, 在例 6.1.1 中, 单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的每一点均为开圆盘 E_1 的聚点, 但它们不属于 E_1 .

定理 6.1.1 (闭集的聚点刻画) 平面非空子集 E 为闭集当且仅当 E 的每个聚点都属于 E .

证明 (1) 必要性. 设 E 为非空闭集, M 为 E 的一个聚点. 如果 $M \notin E$, 则 $M \in E^c$. 由于 E^c 为开集, 故存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B(M, \epsilon) \subset E^c$. 这样 $B(M, \epsilon)$ 与 E 没有交点, 与 M 是 E 的聚点矛盾. 因此, M 属于 E .

(2) 充分性. 设 E 的每个聚点均属于 E . 为证 E 为闭集, 只需证 E^c 为开集. 任取 $M \in E^c$, 因为 $M \notin E$, 故 M 不是 E 的聚点, 从而存在 $\epsilon > 0, B(M, \epsilon) \cap E = \emptyset$, 即 $B(M, \epsilon) \subset E^c$, 所以 E^c 为开集. \square

虽然闭集包含了其所有聚点, 但闭集中可以有不是聚点的点, 例如

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 2)\}$$

为闭集, 但是点 $(2, 2)$ 不是 E 的聚点. 点 $(2, 2)$ 的附近没有 E 中的其他点, 我们称之为孤立点. 一般地, 设 M 为平面子集 E 中的一点, 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B(M, \epsilon) \cap E = \{M\}$, 则称 M 为 E 的孤立点. 易见, 点集 E 中的任意一点要么是 E 的聚点, 要么是 E 的孤立点.

下面的定理告诉我们可以利用边界来刻画开集和闭集.

定理 6.1.2 (开集和闭集的边界刻画) 设 E 为平面点集, 则:

(1) E 为开集的充要条件是 $\partial E \cap E = \emptyset$;

(2) E 为闭集的充要条件是 $\partial E \subset E$.

证明 (1) 利用定义, 结论是显然的.

(2) 必要性. 设 E 为闭集, M 为 E 的一个边界点. 若 $M \notin E$, 则 M 属于开集 E^c , 从而存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B(M, \epsilon) \subset E^c$, 这与 M 是 E 的边界点矛盾.

充分性. 设 $\partial E \subset E$. 为证 E 为闭集, 只需证 E^c 为开集. 设 M 为 E^c 中的任意一点, 则 M 不是 E 的边界点, 因此存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B(M, \epsilon) \cap E = \emptyset$, 即 $B(M, \epsilon) \subset E^c$, 所以 E^c 为开集. \square

设 $x(t), y(t)$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 称点集

$$L = \{(x(t), y(t)) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

为一条连接 $(x(\alpha), y(\alpha))$ 和 $(x(\beta), y(\beta))$ 的平面曲线.

定义 6.1.2(区域) 平面点集 E 称为(道路)连通的, 如果对于 E 中的任意两点 M_1, M_2 , 存在一条包含在 E 中的连接 M_1, M_2 的平面曲线. 非空连通开集称为区域, 一个区域和它的边界的并集称为闭区域. 如图 6.4 所示.

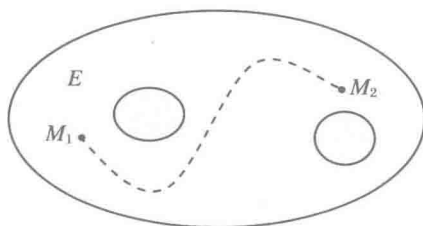


图 6.4 连通集合

定义 6.1.3(点列的极限) 设 $\{M_n\}$ 为平面点列. 如果存在点 $M_0 \in \mathbb{R}^2$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n, M_0) = 0,$$

即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$ 成立, 则称点列 $\{M_n\}$ 收敛, 并称 M_0 为点列 $\{M_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$. 如图 6.5 所示.

不难看出, 若 M_n 的坐标为 (x_n, y_n) , M_0 的坐标为 (x_0, y_0) , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$ 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

利用这个充要条件, 可以将平面点列 $\{M_n\}$ 的极限问题转化为两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的极限问题; 同时, 数列极限的许多性质, 例如极限的唯一性、有界性以及柯西收敛准则等, 通过这个充要条件, 可转移到平面点列的极限上.

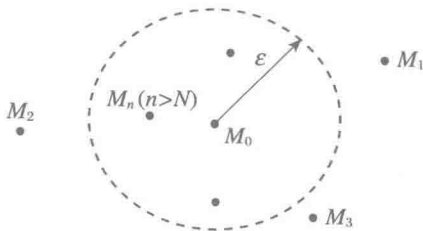


图 6.5 点列的极限

平面点集 E 称为有界集, 如果存在常数 $K > 0$, 使得 $E \subset B(O, K)$ (这里 O 表示坐标原点). 平面点列 $\{M_n\}$ 称为有界点列, 如果存在常数 $K > 0$, 使得 $\rho(M_n, O) \leq K$, 对 $\forall n \geq 1$ 成立. 类似于实数列, 收敛的点列必有界(第2题); 反之, 有界点列未必收敛, 但是波尔察诺证明了: 有界点列必有收敛的子列(第3题).

定义 6.1.4(柯西点列) 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, $\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$, 则称点列 $\{M_n\}$ 为柯西点列.

定理 6.1.3(柯西收敛准则) 点列 $\{M_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{M_n\}$ 为柯西点列.

证明 利用不等式

$$\begin{aligned} \max \{ |x - x'|, |y - y'| \} &\leq \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\ &\leq |x - x'| + |y - y'|, \end{aligned}$$

可知 $\{M_n(x_n, y_n)\}$ 为柯西点列当且仅当 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为柯西数列. 利用实数列的柯西收敛准则, 可得平面点列的柯西收敛准则. \square

6.1.2 二元函数的极限

一元函数和今后要研究的多元函数都是映射的特例.

设 X 与 Y 是两个集合, 所谓映射 $f: X \rightarrow Y$ 是指这样一种对应关系: 对 X 中的每个元素 x , 在 Y 中有且仅有一个元素 y 与之对应, 通常用表达式 $y = f(x)$ 表示这种对应关系. 集合 X 称为映射 f 的定义域, 而集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为 f 的值域或像集.

若 $y = f(x)$, 则称 y 为 x (在映射 f 下) 的像, x 称为 y 的一个原像. 给定一点 $y \in Y$, 称集合 $f^{-1}(y) = \{x | f(x) = y\}$ 为 y 的原像集. 注意, $f^{-1}(y)$ 可能是多于一点的集合, 还有可能是空集.

如果对 X 中任意两个不同的元素 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单映射 (简称单射); 如果对 $\forall y \in Y$, 都存在 $x \in X$, 满足 $f(x) = y$, 则称 f 为满映射 (简称满射). 如果 $f: X \rightarrow Y$ 既是单射又是满射, 则称 f 为一一映射. 当 f 为一一映射时, 对每个 $y \in Y$, 有唯一的 $x \in X$ 满足 $f(x) = y$, 这就给出了从 Y 到 X 的一个对应关系, 称为 f 的逆映射, 记为 $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

如果 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 为映射, 则对每个 $x \in X$, x 被 f 映为 Y 中的元素 $f(x)$, $f(x)$ 又被 g 映为 Z 中的元素 $g(f(x))$, 这样得到的从 x 到 $g(f(x))$ 的对应称为映射 f 和 g 的复合, 记为 $g \circ f: X \rightarrow Z$, 用表达式表示为

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为平面点集, 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 D 上的一个二元函数. 若分别用 (x, y) 和 z 表示定义域和值域中的元素, 则二元函数可用 $z = f(x, y)$ 表示.

若 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为一元函数, f 的图像定义为平面点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in [a, b]\}.$$

当 $f(x)$ 为连续函数时, 它是一条平面曲线. 类似地, 若 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为二元函数, 则 f 的图像定义为空间中的点集

$$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

例如, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的图像为上半球面 (图 6.6), $z = x^2 + y^2$ 的图像为旋转抛物面 (图 6.7).

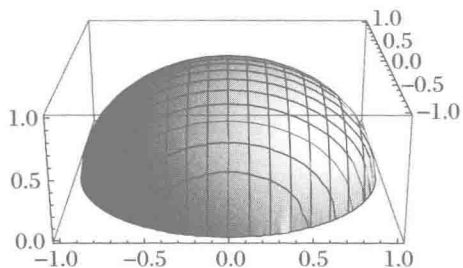


图 6.6 上半球面

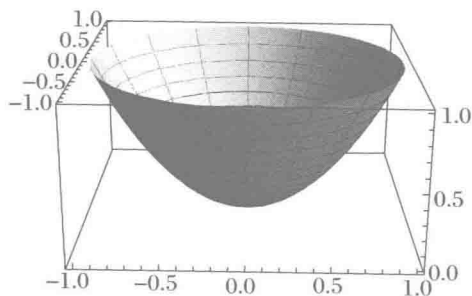


图 6.7 旋转抛物面

定义 6.1.5(二元函数的极限) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为二元函数, M_0 为 D 的聚点. 如果存在常数 a , 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $M \in D$ 且 $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ 时, $|f(M) - a| < \varepsilon$, 则称 M 趋于 M_0 时, $f(M)$ 以 a 为极限, 记为

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = a.$$

如果用 (x_0, y_0) , (x, y) 分别表示点 M_0, M 的坐标, 则也可记为

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = a \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = a.$$

二元函数的上述极限又称为**二重极限**. 二元函数极限的定义与一元函数极限的定义本质上是一样的, 只是将直线上的距离换成了平面上的距离, 所以有关一元函数极限的性质, 例如极限值的唯一性、保号性、局部有界性、两边夹定理以及极限的四则运算等等对二元函数也是成立的. 但是两者之间也有不同的地方. 例如, 对于二元函数, 一般不提左右极限的概念, 这是由于在平面上, 自变量 M 趋于 M_0 的方式更加多样, 而不仅仅从两侧趋近. 正因为如此, 二重极限要比单变量函数极限复杂得多.

例 6.1.2 证明: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0$.

证明 利用不等式 $|2x^2 y| \leq x^4 + y^2$, 可得

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2} |y|.$$

由于 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} |y| = 0$, 由两边夹定理可得结论. 也可以用定义来证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$,

取 $\delta = 2\varepsilon$, 当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时, $|y| < \delta$, 从而有 $\left| \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |y| < \varepsilon$. 如图 6.8 所示. □

例 6.1.3 证明: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在.

证明 取 $y = kx^2$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

显然, 当 (x, y) 沿不同的抛物线 $y = kx^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数有不同的极限, 所以极限不存在. 如图 6.9 所示. \square

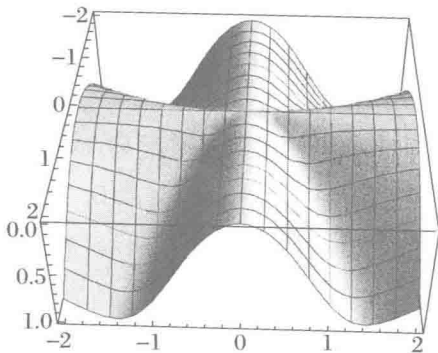


图 6.8 例 6.1.2 中的二重极限

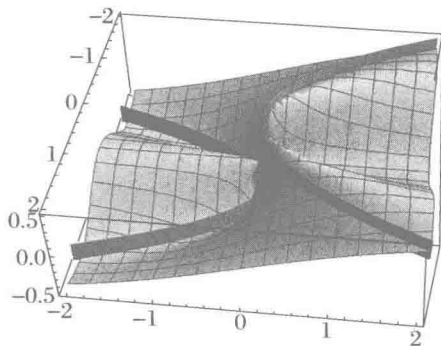


图 6.9 例 6.1.3 中的二重极限

6.1.3 二元函数的连续性

定义 6.1.6 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为二元函数, $M_0 \in D$. 如果对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $M \in D$ 且 $\rho(M, M_0) < \delta$ 时, $|f(M) - f(M_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 M_0 处连续. 如果 f 在 D 中的每一点都连续, 则称 f 在 D 上连续.

从定义可以看出, 若 M_0 为 D 的聚点, 则 f 在 M_0 处连续的充要条件是

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) = f(\lim_{M \rightarrow M_0} M),$$

即极限与函数作用的顺序可交换; 当 M_0 为 D 的孤立点时, 由定义知 f 在 M_0 处连续.

二元连续函数具有与一元连续函数类似的性质, 例如连续函数的局部有界性、保号性, 以及连续函数的四则运算、复合函数的连续性等. 同样, 与有界闭区间上的一元连续函数具有一些良好的整体性质类似, 有界闭集上的二元函数也有类似的整体性质.

定理 6.1.4(介值定理) 设 f 为连通集 D 上的连续函数, $M_1, M_2 \in D$, 则 f 可

以取到介于 $f(M_1)$ 和 $f(M_2)$ 之间的所有值.

定理 6.1.5(最值定理) 设 f 为有界闭集 D 上的连续函数, 则 f 可以在 D 上取到最大值和最小值.

定理 6.1.6(一致连续性) 设 f 为有界闭集 D 上的连续函数, 则 f 在 D 上一致连续, 即对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $M_1, M_2 \in D$ 且 $\rho(M_1, M_2) < \delta$ 时,

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \epsilon.$$

以上定理可以直接利用一元函数相应定理的证明思想, 或者转化为一元函数情形加以证明, 详细证明过程从略, 感兴趣的读者可以尝试自行补充.

例 6.1.4 研究二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$ 的连续性.

解 首先, $f(x, y)$ 在集合 $\{(x, y) | x \neq y\}$ 中的每一点处都是连续的, 因为它是两个连续函数的商.

当 $x_0 = y_0 \neq 0$ 时, 由于 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left| \frac{xy}{x-y} \right| = +\infty$, 所以 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近无界, 从而 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不连续.

当 $x_0 = y_0 = 0$ 时, 令 $x - y = kx^2$ ($k \neq 0$), 则

$$\frac{xy}{x-y} = \frac{x(x-kx^2)}{kx^2} = \frac{1-kx}{k} \rightarrow \frac{1}{k} \quad (x \rightarrow 0),$$

即当 (x, y) 沿不同的抛物线 $y = x - kx^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数有不同的极限. 因此, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的极限不存在, 从而在该点不连续.

综上, $f(x, y)$ 仅在 $\{(x, y) | x \neq y\}$ 中连续. □

6.1.4 多元函数与向量值函数

上面介绍了平面点集以及二元函数, 相关概念可以推广到 n ($n \geq 3$) 维空间和 n 元函数. 设

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

在 \mathbb{R}^n 中定义距离 ρ 如下: 对于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

在 \mathbb{R}^n 中引入距离后, 就可以类似地定义 \mathbb{R}^n 中的 ϵ 邻域、开集、闭集、区域等概念.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$, 称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 n 元函数, 可用 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示. n 元函数的极限和连续性可以用类似于二元函数的方法来定义.

更一般地, 可以考虑映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. 若分别用 (x_1, x_2, \dots, x_n) 和 $(y_1, y_2, \dots,$

y_m)表示 D 和 \mathbb{R}^m 中的点, 则 f 可表示为

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

其中 $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 为 D 上的 n 元函数, 称为映射 f 的第 i 个分量函数. 因此, 映射 f 可以表示为

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots, \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

此外, 由于 (y_1, y_2, \dots, y_m) 可以看成 \mathbb{R}^m 中的向量, 映射 f 也常称为 D 上的 m 维向量值函数, 记为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

今后, 在不同的场合, 我们会使用映射的不同表示方式. 无论使用哪种方式, 必须明确的是定义域中的点和它在映射下的像之间的对应关系.

通常情况下, 如果一个向量值函数的每个分量函数都具有某种性质, 我们就称该向量值函数具有该性质. 例如, 如果 f 的每个分量函数 f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 都在 (x_1, x_2, \dots, x_n) 处有极限, 就称 f 在 (x_1, x_2, \dots, x_n) 处有极限; 如果每个 f_i 都是连续的, 则称 f 是连续的.

设 $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, 我们经常将可逆的映射 $f: D \rightarrow D'$ 称为 D 上的一个变量代换或坐标变换. 大家熟知的极坐标变换

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

是定义在 $0 < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ 上的坐标变换. 如图 6.10 所示, 它将平面 $Or\varphi$ 中的条形区域 $0 < r < +\infty, \alpha < \varphi < \beta$ ($0 \leq \alpha < \beta < \pi/2$) 映为平面 Oxy 中的扇形区域

$$0 < x^2 + y^2 < +\infty, \alpha < \arctan \frac{y}{x} < \beta.$$

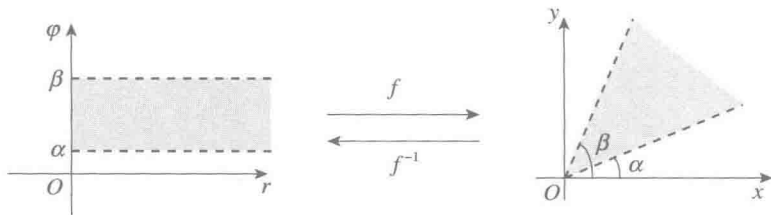


图 6.10 极坐标变换

习题 6.1

- 证明:两个开集(闭集)的交集和并集仍是开集(闭集).
- 证明:平面中收敛的点列必然是有界的.
- 证明:有界的平面点列必有收敛的子列.
- 确定并画出以下函数的定义域,并指出它们是否是区域,是否是闭区域:

(1) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+y^2}$;

(2) $z = \sqrt{\sin \sqrt{(x^2+y^2)}}$;

(3) $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2+2x}}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$;

(4) $u = \ln(1-x^2-y^2-z^2)$;

(5) $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$;

(6) $u = \sqrt{2az-x^2-y^2-z^2} (a>0)$.

- 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 (x \neq 0)$. 求 $f(x, y)$.
- 设 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq x, \\ 0, & y < x, \end{cases}$ 且 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ 求 $F(t) = f(\cos t, \sin t)$.
- 设 $f(x, y) = x^y, \varphi(x, y) = x + y, \psi(x, y) = x - y$. 求 $f(\varphi(x, y), \psi(x, y)), \varphi(f(x, y), \psi(x, y)), \psi(\varphi(x, y), f(x, y))$.
- 判断下列极限是否存在,若存在,求出其极限:

(1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$;

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}$;

(3) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$;

(4) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

(5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

(6) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;

(7) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$;

(8) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(9) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(10) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$;

(11) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}$;

(12) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$.

- 若 $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$,问沿怎样的方向,下列极限存在?

(1) $\lim_{\rho \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2 - y^2}}$;

(2) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy$.

10. 设二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一去心邻域内有定义. 如果对任意固定的 y , 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 令 $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, 它是定义在 y_0 附近的函数. 如果 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$ 存在, 则令

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y),$$

称之为函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的一个累次极限. 类似地, 可以定义另一个累次极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

(1) 求函数 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 在 原点处的两个累次极限;

(2) 证明: 函数 $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 在 原点处的两个累次极限均不存在, 但有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

11. 研究下列函数的连续性:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0. \end{cases}$$

12. 证明: 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 沿着过此点的每一条射线 $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha$ ($0 \leq t < +\infty$) 连续, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$; 但此函数在点 $(0, 0)$ 并不连续.

6.2 多变量函数的微分与偏导数

在上册中我们看到,一元函数的导数对于研究函数的性质、解决物理和工程中的一些问题有重要作用.本节主要讨论多变量函数的偏导数和微分.我们首先对二元函数给出相关的概念和结果,然后将它推广到多元函数和映射(向量值函数),这是因为二元函数相对简单而且与多元函数没有本质的区别.在学习多元函数的微分学时,我们既要看到它与单变量微分学的联系,也要看到它们之间的不同之处.在学习向量值函数的相关内容时,我们需要一些线性代数的基本知识,包括矩阵的概念、矩阵的乘法运算、行列式等.

6.2.1 二元函数的微分与偏导数

首先回顾一元函数的可微与微分的概念.设 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的一元函数, $x_0 \in (a, b)$. 如果存在一个常数 A , 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0), \quad (6.2.1)$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 并称 $dy = A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分. 将这个定义推广到二元函数即可得到二元函数的可微和微分的概念.

定义 6.2.1 (二元函数的可微性) 设 $z = f(x, y)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $(x_0, y_0) \in D$, 记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. 如果存在常数 A, B , 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0), \quad (6.2.2)$$

则称 f 在 (x_0, y_0) 处可微, 且称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 f 在 (x_0, y_0) 处的微分, 记为 $df(x_0, y_0)$.

为了得到式(6.2.2)中 A, B 的值, 取 $\Delta y = 0$, 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 则有

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

上式右边的极限可以看成一元函数 $\varphi(x) = f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数. 类似地, 可以证明 B 是一元函数 $\psi(y) = f(x_0, y)$ 在 y_0 处的导数. 像这样通过固定二元函数的某个变量得到的一元函数的导数, 称为该二元函数的偏导数.

定义 6.2.2 (偏导数) 设 $z = f(x, y)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, (x_0, y_0)

$\in D$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 那么称它为 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数(或偏微商), 记做

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0), \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \text{ 或 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \text{ 等.}$$

类似地, 称极限

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

为 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数(或偏微商), 记做 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$, 或 $f'_y(x_0, y_0)$ 等.

下面的定理给出了二元函数在一点可微的必要条件.

定理 6.2.1(可微的必要条件) 设 $z = f(x, y)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $(x_0, y_0) \in D$.

(1) 若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续;

(2) 若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在, 且

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

设 $z = f(x, y)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数. 如果 $f(x, y)$ 在 D 中的每一点处都可微, 则称 $f(x, y)$ 在 D 中可微. 如果 $f(x, y)$ 在 D 中的任意一点 (x, y) 处有偏导数 $f'_x(x, y)$, 则对应 $(x, y) \mapsto f'_x(x, y)$ 确定了 D 上的二元函数 $f'_x(x, y)$, 称为 $f(x, y)$ 关于 x 的偏导函数(简称偏导数或偏微商). 类似地, 可以定义 $f(x, y)$ 关于 y 的偏导数 $f'_y(x, y)$. 偏导数 f'_x, f'_y 有时也记成 f'_1, f'_2 (分别表示 $f(x, y)$ 对第一个变量和第二个变量的偏导数).

若 $z = f(x, y)$ 在区域 D 中可微, 则对 $\forall (x, y) \in D$,

$$dz(x, y) = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y.$$

特别地, 取 $f(x, y) = x$, 则有 $dx = \Delta x$; 取 $f(x, y) = y$, 则有 $dy = \Delta y$. 因此常记

$$dz(x, y) = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy,$$

或记为

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (6.2.3)$$

df 称为 $f(x, y)$ 在 D 上的微分(或全微分), 如图 6.11 所示.

下面讨论微分和偏导数的几何意义. 对于一元函数 $f(x)$, 微分定义式(6.2.1)表明: 用直线

$$L: y = f(x_0) + A(x - x_0)$$

近似曲线 $y = f(x)$ 产生的误差是一个比 Δx 更高阶的无穷小量. 此时, 直线 L 就是曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处的切线. 类似地, 对于二元函数 $f(x, y)$, 微分定义式(6.2.2)表明: 用平面

$$P: z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

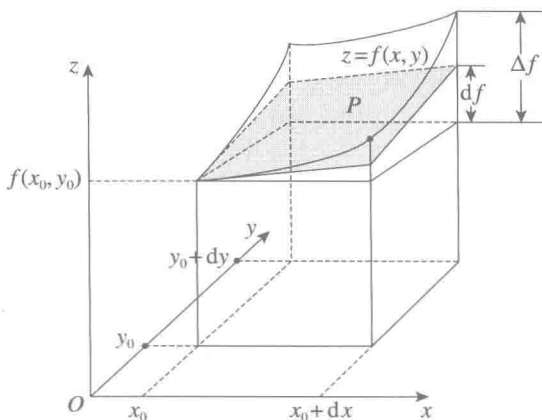


图 6.11 二元函数的全微分

近似曲面 $z = f(x, y)$ 产生的误差是一个比 ρ 更高阶的无穷小量. 此时, 称平面 P 为曲面 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的切平面(图 6.11).

与一元函数的导数一样, 二元函数的偏导数也有相应的几何意义. 如图 6.12 所示, 用平面 $y = y_0$ 去截曲面 $z = f(x, y)$ 得到一条显式曲线 $z = f(x, y_0)$.

偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 就是这条曲线在 (x_0, y_0) 处的切线关于 x 轴正

方向的斜率. 类似地, 可以得到 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 的几何意义(图 6.13).

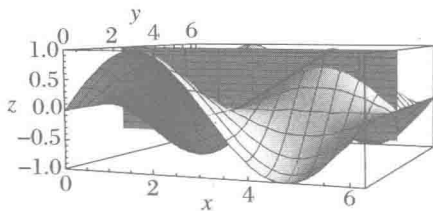


图 6.12 二元函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

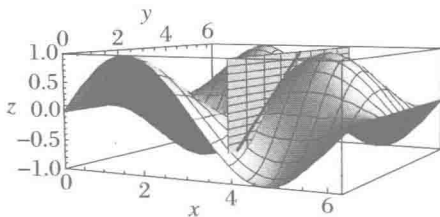


图 6.13 二元函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

下面对二元函数的微分作进一步的说明. 虽然微分定义式(6.2.2)是关于 $\Delta x, \Delta y$ 的等式, 但在式(6.2.3)中, 我们通常认为 dx, dy 可取任意实数, 即视 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的微分为二元线性映射 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 对于 $(h, k) = (dx, dy) \in \mathbb{R}^2$,

$$T(h, k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

线性映射 T 是由 1×2 矩阵 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$ 确定的, 这个矩阵称为 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的雅可比(C. G. Jacobi, 1804~1851)矩阵.

由微分的定义知, 微分是函数值增量的主要部分, 即当 $|h|, |k|$ 很小时,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = T(h, k),$$

或

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + T(h, k). \quad (6.2.4)$$

上式的右边是关于变量 h, k 的一次函数. 因此, 通过函数的微分, 我们得到了 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近的一阶近似, 它可以帮助我们作近似计算. 今后还将给出更高阶的近似(见 6.5.1 小节).

从偏导数的定义知, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数. 因此, 为求二元函数 $f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, 只需将变量 y 看成常数, 对变量 x 求导即可. 对 y 的偏导数也可类似操作.

例 6.2.1 设 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($x^2 + y^2 \neq 0$). 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 易得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

同理, 可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$. □

例 6.2.2 求函数 $z = x^3 + 2x^2y^2 + y^2$ 的微分.

解 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy^2, \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2y + 2y$, 所以

$$dz = (3x^2 + 4xy^2)dx + (4x^2y + 2y)dy. \quad \square$$

定理 6.2.1 表明, 可微二元函数的两个偏导数存在, 但是与一元函数不同的是, 多元函数的偏导数的存在性不能保证它的可微性.

例 6.2.3 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数的存在性和可微性.

解 根据偏导数的定义, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

由例 6.1.3 知, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续, 从而不可微. \square

虽然对二元函数来说, 可微性要强于偏导数的存在性, 但是如果偏导数是连续的, 则它一定是可微的.

定理 6.2.2 若二元函数 $f(x, y)$ 的偏导数在 (x_0, y_0) 处的某个邻域内皆存在, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在 (x_0, y_0) 处连续, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

证明* 给定不全为零的 $\Delta x, \Delta y$, 并记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) \Delta y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1, 0 < \theta' < 1, \varepsilon_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \varepsilon_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

由于 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 所以 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0, \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$. 又由于 $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \right| \leq 1,$

$\left| \frac{\Delta y}{\rho} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\rho} = 0,$$

即 $\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = o(\rho)$. 因此, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微. \square

6.2.2 高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在所定义的区域中每一点都有偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, 即这些偏导数仍是二元函数. 如果它们仍然有偏导数, 则可以继续对它们求偏导, 这样就得到了高阶偏导数(或高阶偏微商). 二元函数有四种可能的二阶偏导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

类似可以定义更高阶的偏导数. 高阶偏导数还有其他记法, 例如, 偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 也可以记成 f''_{xy}, f''_{yx} 等. 其他的可以类推.

例 6.2.4 求函数 $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$ 的两个一阶偏导数和四个二阶偏导数.

解 直接计算可得: 原函数的两个一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 3y^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - x;$$

四个二阶偏导数分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 6xy^2, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 6x^2 y - 9y^2 - 1, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 6x^2 y - 9y^2 - 1, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2x^3 - 18xy.\end{aligned} \quad \square$$

由这个例子, 可以看出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 即二阶偏导数与求导的次序无关. 这个现象并非偶然的. 事实上, 我们有下面的定理:

定理 6.2.3 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义. 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 中连续, 则两者相等, 即求导的次序可交换.

证明* 因为微商是差商的极限, 所以我们可通过二阶偏差分的相等来导出二阶偏微商的相等. 任取 $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ 及 $B(M_0, r) \subset D$, 并取 $(h, k) \neq (0, 0)$, 使得 $(x_0 + h, y_0 + k) \in B(M_0, r)$. 令

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0), \quad \psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

分别是 $f(x, y)$ 关于 y 和 x 的一阶偏差分. 计算表明, 它们分别对 x 和 y 的偏差分等于 $f(x, y)$ 的二阶偏差分(下式的右边), 即

$$\begin{aligned}\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) &= \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \\ &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \\ &\quad - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

由一元函数的微分中值公式, 可知

$$\begin{aligned}\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) &= h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \\ &= h[f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)] \\ &= hkf''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \eta_1 k),\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \eta_1 < 1$. 类似地, 存在 $\theta_2, \eta_2 \in (0, 1)$, 使得

$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = hkf''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \eta_2 k),$$

从而有

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \eta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \eta_2 k).$$

令 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, 由 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的连续性, 即得定理中的结论. \square

注 6.2.1 上述定理中两个偏导数的连续性条件是不可缺少的, 反例参见本节习题中的第 18 题.

6.2.3 多元函数和向量值函数的微分与偏导数

二元函数的可微与偏导数概念可以平行推广到 n 元函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 特别地, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的微分为

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

其中 $1 \times n$ 矩阵 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ 称为 n 元函数 f 的雅可比矩阵.

下面我们考虑向量值函数. 设 D 为 \mathbb{R}^n 中的区域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为 n 元 m 维向量值函数. 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则 f 可以表示为

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T,$$

其中 $y_j = f_j(\mathbf{x})$ 为 D 上的 n 元函数, T 表示矩阵的转置(这里为了方便, 用列向量

表示 \mathbb{R}^m 中的向量). 如果每个分量函数 f_j ($1 \leq j \leq m$) 都是可微的, 则称映射 f 可微, 并且定义 f 的微分 df 为对每个分量函数的微分所形成的有序组, 即

$$df = (df_1, df_2, \dots, df_m)^T,$$

其中

$$df_j = dy_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_j}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_j}{\partial x_n} dx_n \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

利用矩阵的运算, 则有

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

记

$$Jf = J_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

称之为向量值函数 f 的雅可比矩阵. 这与前面提到的多元函数的雅可比矩阵是一致的.

当 $n = m$ 时, 雅可比矩阵的行列式简记为

$$\det J_{xy} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)},$$

并称之为函数的雅可比行列式.

与二元函数的微分类似, 向量值函数 f 的微分可以理解为由雅可比矩阵 Jf 确定的线性映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 对于 $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$T(\mathbf{h}) = Jf \cdot \mathbf{h}^T.$$

当 $|\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}$ 很小时,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{x}) + T(\mathbf{h}).$$

注意, 上式与式(6.2.4)本质上是一样的.

为了今后叙述上的方便, 引入一个记号. 将区域 D 上具有各种 n 阶偏导数, 并且各 n 阶偏导函数连续的函数全体记为 $C^n(D)$. 特别地, $C^0(D)$ 表示 D 上连续函数的全体.

习题 6.2

1. 根据可微的定义, 证明: 函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.

2. 求下列各函数在给定点处指定的偏导数:

$$(1) f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4);$$

$$(2) f(x, y) = \sin x^2 y, \frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi);$$

$$(3) f(x, y) = 2\sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(x, 1);$$

$$(4) f(x, y) = \ln[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}], \frac{\partial f}{\partial x}(1, y), \frac{\partial f}{\partial y}(1, y).$$

3. 求下列各函数对于每个自变量的偏导数:

$$(1) z = \frac{xe^y}{y^2};$$

$$(2) z = 3^{-\frac{x}{y}};$$

$$(3) z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x};$$

$$(4) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$(5) u = \arctan \frac{x+y}{x-y};$$

$$(6) u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$(7) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(8) u = (xy)^z;$$

$$(9) u = x^{y^z};$$

$$(10) u = xe^{-z} + \ln(x + \ln y) + z.$$

4. 设 $f(x, y) = \int_1^{x^2 y} \frac{\sin t}{t} dt$. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

5. 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 考察函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的偏导数.

6. 证明: 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 但偏导数不存在.

7. 求曲面 $z = \frac{x^2 + y^2}{4}$ 与平面 $y = 4$ 的交线在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与 Ox 轴的正向所成的角度.

8. 求曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \\ x = 1 \end{cases}$ 上点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角.

9. 求下列函数在给定的点及给定的 $\Delta x, \Delta y$ 时的微分 dz 及全增量 Δz :

(1) $z = x^2 y^3$, 点 $(2, -1)$, $\Delta x = 0.02, \Delta y = -0.01$;

(2) $z = e^{xy}$, 点 $(1, 1)$, $\Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$;

(3) $z = \ln(x^2 + y^2)$, 点 $(2, 1)$, $\Delta x = 0.1, \Delta y = -0.1$.

10. 求下列函数在给定点的微分:

(1) $z = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$, 点 $(0, 0), (1, 1)$;

(2) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 点 $(1, 0), (0, 1)$.

11. 求下列函数的微分:

(1) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

(2) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;

(3) $u = \frac{s+t}{s-t}$;

(4) $u = \arctan \frac{y}{x}$;

(5) $z = \sin xy$;

(6) $z = x^{yz}$.

12. 证明: 函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但不可微.

13. 证明: 函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处连续且偏导数存在, 但偏导数在点 $(0, 0)$ 处不连续, 而 f 在原点 $(0, 0)$ 可微.

14. 证明: 函数 $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ 满足热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

15. 求下列函数的所有二阶偏导数:

(1) $z = \frac{x-y}{x+y}$;

(2) $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$;

(3) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

(4) $z = \sin^2(ax + by)$;

(5) $z = y^{\ln x}$;

(6) $z = \arcsin xy$.

16. 设 $u = e^{xyz}$. 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$.

17. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 当 $r \neq 0$ 时, 证明:

(1) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$;

$$(2) \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2};$$

$$(3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

18. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明: 函数 f 的二阶偏导数存在, 但所有二阶偏导数 (特别是两个混合偏导数) 在 $(0, 0)$ 处不连续, 且 $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

19. 求直角坐标和极坐标的坐标变换 $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ 的雅可比行列式.

6.3 复合函数的偏导数

6.3.1 复合函数偏导数的链式法则

在单变量微积分学中, 复合函数的导数具有所谓的链式法则, 同样, 多变量函数的复合函数也有类似的链式法则. 为了简洁而又不失一般性, 先考虑如下情形.

设 D, D' 为 \mathbb{R}^2 中的区域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ 为两个映射. 若 $f(D) \subset D'$, 则存在复合映射 $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (图 6.14):

$$D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

记 $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, $g(y_1, y_2) = z$, 那么 $z = g \circ f(x_1, x_2) = g(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$ (图 6.15).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{g} z$$

图 6.14 复合映射

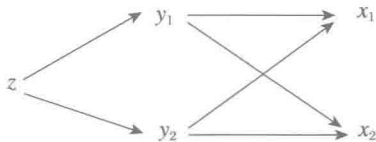


图 6.15 复合映射中变量之间的依赖关系

定理 6.3.1 设函数 f, g 如上所述.

(1) 若 f, g 分别在 D 和 D' 中可微, 则复合函数 $g \circ f$ 在 D 中可微.

(2) 复合函数 $z = g \circ f(x_1, x_2)$ 关于 x_1, x_2 的偏导数满足:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \quad (6.3.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2}. \quad (6.3.2)$$

证明* 由条件知, 函数 $y_1 = y_1(x_1, x_2), y_2 = y_2(x_1, x_2)$ 及 $z = z(y_1, y_2)$ 都是可微的. 给定 D 中的一点 (x_1, x_2) , 并分别给 x_1, x_2 以增量 $\Delta x_1, \Delta x_2$, 记

$$\Delta y_1 = y_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - y_1(x_1, x_2) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + o(\rho),$$

$$\Delta y_2 = y_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - y_2(x_1, x_2) = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$, 则

$$\begin{aligned} \Delta z &= z(y_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2), y_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)) \\ &\quad - z(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) \\ &= z(y_1(x_1, x_2) + \Delta y_1, y_2(x_1, x_2) + \Delta y_2) - z(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) \\ &= \frac{\partial z}{\partial y_1} \cdot \Delta y_1 + \frac{\partial z}{\partial y_2} \cdot \Delta y_2 + o(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2}) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) \Delta x_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right) \Delta x_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \right) o(\rho) + o(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2}). \end{aligned}$$

由于 (x_1, x_2) 是给定的一点, 相应的 $(y_1, y_2) = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$ 也是确定的, 由此不难看出上式中的余项

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \right) o(\rho) + o(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2})$$

是比 ρ 更高阶的无穷小量. 根据二元函数可微的定义, 知 $z = g \circ f(x_1, x_2)$ 可微, 且 z 关于 x_1, x_2 的偏导数满足式(6.3.1)和(6.3.2). \square

更一般的复合映射的偏导数也有相应的链式法则. 设 D, D' 分别为 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 中的区域, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, g: D' \rightarrow \mathbb{R}^l$ 为映射(或向量值函数). 若 $f(D) \subset D'$, 则存在复合映射 $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}^l$. 如果分别用 $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m), (z_1, \dots, z_l)$ 表示 D, D' 及 \mathbb{R}^l 中的点, 则有

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{f} (y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{g} (z_1, \dots, z_l).$$

这个方程是数学物理中的一个重要的方程,称为拉普拉斯方程.满足这个方程的函数称为调和函数.

例 6.3.2 可微函数 $u = f(x, y)$ 通过极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可以看做 r, θ 的函数.试证:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

证明 由链式法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \theta,\end{aligned}$$

两式平方后相加,即得欲证的等式. □

例 6.3.3 计算下列各小题:

(1) 设 $u = f(x, y, z), y = y(x), z = z(x)$, 求 $\frac{du}{dx}$;

(2) 设 $u = f(x, \varphi(x, t), \psi(x, t))$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 (1) 复合函数 $u(x) = f(x, y(x), z(x))$ 是以 x 为自变量的单变量函数, 图 6.16 表明了变量之间的依赖关系.由链式法则知

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}.$$

注意,上式中 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 指的是偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, 它与全导数 $\frac{du}{dx}$ 的含义是不一样的.

(2) 所给的函数 $u = u(x, t)$ 可以看做是由函数 $u = f(x, y, z)$ 与 $y = \varphi(x, t), z = \psi(x, t)$ 复合得到的, 图 6.17 表明了变量之间的依赖关系.由链式法则知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$
 □

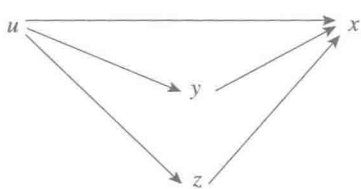


图 6.16 例 6.3.3(1)中变量之间的依赖关系

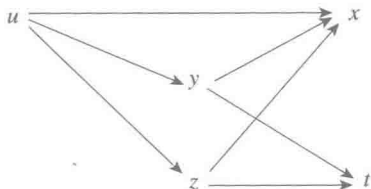


图 6.17 例 6.3.3(2)中变量之间的依赖关系

注意,上例中 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示的是复合后的二元函数 $u(x, t)$ 关于 x 的偏导数, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是外层三元函数 $f(x, y, z)$ 关于 x 的偏导数,不能简单地用 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 来代替,以免引起混淆.

如果不愿引入中间变量 y, z ,我们也可以把它写成如下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'_3 \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

其中 f'_1, f'_2, f'_3 分别表示三元函数 f 关于第一、第二、第三个变量的偏导数.

利用复合函数的求导法则,可以得到多变量函数的微分中值定理.下面以二元函数为例.

定理 6.3.2(微分中值定理) 设 $f(x, y)$ 在区域 D 中可微.若连接 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 的线段包含在 D 中,则存在 $\theta \in (0, 1)$,使得

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h + f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k.$$

证明 构造从区间 $[0, 1]$ 到以 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 为端点的线段上的一一映射 φ :

$$\varphi(t) = (x_0 + th, y_0 + tk).$$

考虑复合映射

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

ψ 是定义在 $[0, 1]$ 上的一元可微函数.由一元函数的中值定理知,存在 $\theta \in (0, 1)$,使得

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta) = f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h + f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k.$$

上式即为所求证的等式. \square

注 6.3.2 如果记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$,则二元函数的中值定理可以写成

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + Jf(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}^T \quad (0 < \theta < 1).$$

这与一元函数的中值定理在形式上是一致的.

推论 6.3.1 设 $f(x, y)$ 在区域 D 中的每一点处的微分 $df = 0$,即 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$,那么 $f(x, y) = c$ (常数).

证明 给定 $M_0(x_0, y_0) \in D$.对 $\forall M(x, y) \in D$,可作连接 M_0 和 M 的折线,设其顶点依次为 M_0, M_1, \dots, M_n, M .由中值定理知

$$f(M_0) = f(M_1) = \dots = f(M_n) = f(M).$$

由 M 的任意性知 $f(x, y) \equiv f(x_0, y_0) = c$ (在 D 中). \square

6.3.2 复合函数的高阶偏导数

在计算复合函数的高阶偏导数时,只要反复运用复合函数求导的链式法则即可,无需新的求导公式.

例 6.3.4 求复合函数 $z = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$ 的三个二阶偏导数(假设 f 具有二阶连续偏导数).

解 所给函数的一阶偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 - \frac{y}{x^2}f'_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 + \frac{1}{x}f'_2,$$

从而它的二阶偏导数分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y\left(yf''_{11} - \frac{y}{x^2}f''_{12}\right) - \frac{y}{x^2}\left(yf''_{21} - \frac{y}{x^2}f''_{22}\right) + \frac{2y}{x^3}f'_2 \\ &= y^2f''_{11} - \frac{2y^2}{x^2}f''_{12} + \frac{y^2}{x^4}f''_{22} + \frac{2y}{x^3}f'_2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= y\left(xf''_{11} + \frac{1}{x}f''_{12}\right) + f'_1 - \frac{y}{x^2}\left(xf''_{21} + \frac{1}{x}f''_{22}\right) - \frac{1}{x^2}f'_2 \\ &= xyf''_{11} - \frac{y}{x^3}f''_{22} + f'_1 - \frac{1}{x^2}f'_2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x\left(xf''_{11} + \frac{1}{x}f''_{12}\right) + \frac{1}{x}\left(xf''_{21} + \frac{1}{x}f''_{22}\right) \\ &= x^2f''_{11} + 2f''_{12} + \frac{1}{x^2}f''_{22}. \end{aligned} \quad \square$$

例 6.3.5 证明:函数 $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明 注意, φ, ψ 为一元函数,故

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \varphi'(x - at)(-a) + \psi'(x + at) \cdot a \\ &= a[-\varphi'(x - at) + \psi'(x + at)], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a[-\varphi''(x - at)(-a) + \psi''(x + at) \cdot a] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad \square$$

这个方程是数学物理中另一个重要的方程,称为**波动方程**.对任意具有二阶连续编导数的函数 φ, ψ , 函数 $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ 都是方程的解.

6.3.3 一阶微分的形式不变性

对于一元函数 $y = f(x)$, 无论 x 是自变量还是中间变量, 一阶微分都具有相同的形式

$$dy = f'(x)dx.$$

这种一阶微分的形式不变性对于多变量函数也是正确的.

例如, 对于二元函数 $z = f(x, y)$, 如果 x, y 是自变量, 则它的一阶全微分可以写成

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

若 x, y 是中间变量, 不妨设 $x = \varphi(r, s), y = \psi(r, s)$, 则复合函数 $z = f(\varphi(r, s), \psi(r, s))$ 的全微分

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds \right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

利用一阶微分的形式不变性, 易得到如下命题:

命题 6.3.1 设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 为可微的二元函数, 则:

- (1) $d(u + v) = du + dv$;
- (2) $d(uv) = u dv + v du$;
- (3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} (v \neq 0)$.

证明 这里只证明(3). 由一阶微分的形式不变性, 不妨设 u, v 为自变量, 记

$f(u, v) = \frac{u}{v}$, 则

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{v du - u dv}{v^2}. \quad \square$$

例 6.3.6 设 $u = f(x, \xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 + y^2 + z^2$. 求复合函数的全微分 du .

解 直接计算, 得

$$\begin{aligned} du &= f'_1 dx + f'_2 d\xi + f'_3 d\eta \\ &= f'_1 dx + f'_2 (2x dx + 2y dy) + f'_3 (2x dx + 2y dy + 2z dz) \\ &= (f'_1 + 2x f'_2 + 2x f'_3) dx + 2y (f'_2 + f'_3) dy + 2z f'_3 dz. \end{aligned} \quad \square$$

例 6.3.7 解微分方程 $xydz + yzdx + zxdy = 0$.

解 原方程等价于 $d(xyz) = 0$. 由推论 6.3.1 知 $f(x, y, z) = xyz = c$ (c 为任意常数). \square

这种微分方程的解法称为凑微分法.

习 题 6.3

1. 求下列给定的复合函数的偏导数或导数:

(1) $u = e^t + \arctan(t^2 + 1)$, $t = x^y$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$;

(2) $u = e^{xyz}$, $x = rs$, $y = \frac{r}{s}$, $z = r^s$, $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$;

(3) $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a \sin x$, $z = \cos x$, $\frac{du}{dx}$;

(4) $u = \rho^2 + \varphi^2 + \theta^2$, $\rho = \tan \varphi \theta$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

2. 求下列给定的复合函数的偏导数或导数, 其中各小题中的 f 均有连续的二阶偏导:

(1) $u = f(x, y)$, $x = t^3$, $y = 2t^2$, $\frac{du}{dt}$;

(2) $u = f(x, y, z)$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = e^t$, $\frac{du}{dt}$;

(3) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$;

(4) $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$;

$$(5) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z};$$

$$(6) u = f(x, xy, xyz), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

3. 设 $u = f(t)$, $t = \varphi(xy, x + y)$, 其中 f, φ 分别具有连续的二阶导数及偏导数. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

4. 设 $z = f(xy)$, f 为可微函数. 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5. 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, f 为可微函数. 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. 设 $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$, 其中 φ, ψ 具有连续的二阶微商. 证明: u 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

7. 设 $u = e^{a\theta} \cos(a \ln r)$. 证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

8. 试证: 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 经变换 $\xi = x + y, \eta = 3x - y$ 后变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ (设二阶偏导数均连续).

9. 试证: 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos x - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 x - \frac{\partial u}{\partial y} \sin x = 0$ 经变换 $\xi = x - \sin x + y, \eta = x + \sin x - y$ 后变成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ (设二阶偏导数均连续).

10. 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. 求常数 a (设二阶偏导数均连续).

11. 若函数 $u = f(x, y, z)$ 满足恒等式 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ ($t > 0$), 则称 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理: 可微函数 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = kf(x, y, z).$$

12. 求方程 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ 满足条件 $z(x, x^2) = 1$ 的解 $z = z(x, y)$.

13. 设 $u = f(x, y)$, 且当 $y = x^2$ 时, 有 $u = 1, \frac{\partial u}{\partial x} = x$. 求当 $y = x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

14. 设 $u = u(x, y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 以及条件 $u(x, 2x) = x, u'_x(x, 2x) = x^2$. 求 $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$ (设二阶偏导数均连续).
15. 求下列复合函数的一阶全微分 du :
- (1) $u = f(t), t = x + y$;
 - (2) $u = f(\xi, \eta), \xi = xy, \eta = \frac{x}{y}$;
 - (3) $u = f(x, y, z), x = t, y = t^2, z = t^3$;
 - (4) $u = f(\xi, \eta, \zeta), \xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2, \zeta = 2xy$.

6.4 隐函数与反函数的微分法

6.4.1 隐函数的存在定理与微分法

以前所讨论的一元或多元函数,都是用自变量的一个表达式直接给出的,因此也称为显函数.在很多情况下,一个方程或方程组也能给出变量间的函数关系,这种由方程或方程组确定的函数关系称为隐函数.首先来看几个例子(图 6.18 ~ 6.21):

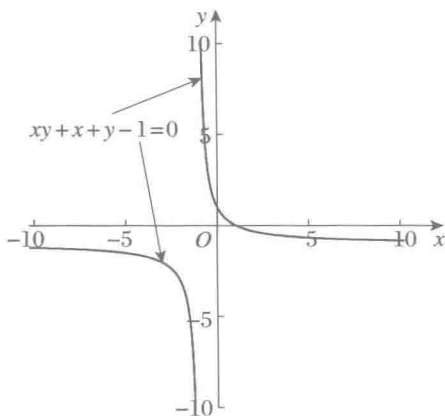


图 6.18 隐函数 $xy + x + y - 1 = 0$

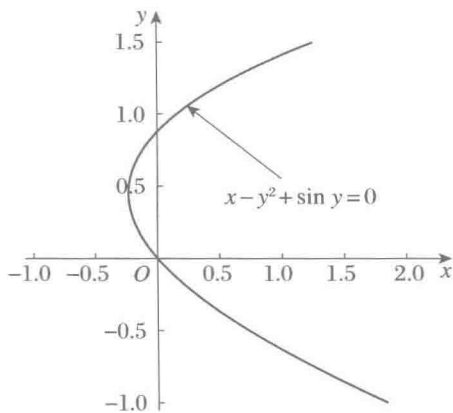


图 6.19 隐函数 $x - y^2 + \sin y = 0$

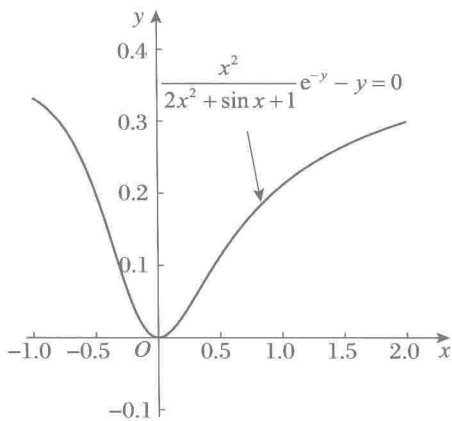


图 6.20 隐函数 $\frac{x^2}{2x^2 + \sin x + 1} e^{-y} - y = 0$

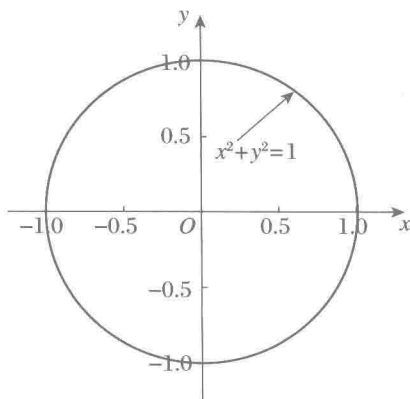


图 6.21 隐函数 $x^2 + y^2 = 1$

- (1) $xy + x + y - 1 = 0$;
- (2) $x - y^2 + \sin y = 0$;
- (3) $\frac{x^2}{2x^2 + \sin x + 1} e^{-y} - y = 0$;
- (4) $x^2 + y^2 = 1$.

从第一个方程很容易解出 $y = \frac{1-x}{1+x}$, 也可以解出 $x = \frac{1-y}{1+y}$. 从第二个方程可以解出 $x = y^2 - \sin y$, 但解不出 y 依赖于 x 的表达式. 从第三个方程尽管写不出 y 依赖于 x 的初等函数表达式, 但可以证明, 对于每个实数 x , 有且仅有一个 y 值, 使得 (x, y) 满足方程(3). 第四个方程中, 由于每个 x 对应两个 y 值, 所以 y 不能整体上表示为 x 的函数, 同样地, x 也不能表示为 y 的函数; 虽然整体上不行, 但局部上是可以的. 例如, 在 $(0, 1)$ 附近, 可以解出 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$), 而在 $(1, 0)$ 附近, 可以解出 $x = \sqrt{1-y^2}$ ($-1 \leq y \leq 1$).

从上面的例子可以看出, 利用方程定义函数时有两个问题, 第一个是未必能得到函数的解析表达式, 第二个是得到的函数可能只是在局部有定义. 因此, 引入如下关于隐函数的定义是自然的.

定义 6.4.1 设 $F(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上有定义, $(x_0, y_0) \in D$ 且 $F(x_0, y_0) = 0$. 如果存在 (x_0, y_0) 的邻域 $I \times J \subset D$, 对于任一 $x \in I$ 都有唯一的 $y \in J$, 使得 $F(x, y) = 0$, 则由此对应关系确定的 I 上的函数 $y = \varphi(x)$ 称为在 (x_0, y_0) 的邻域中由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数. 如果对于任一 $y \in J$ 都有唯一的 $x \in I$, 使得

$F(x, y) = 0$, 则由此确定的 J 上的函数 $x = \psi(y)$ 也称为在 (x_0, y_0) 的邻域中由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.

考察由方程 $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 所确定的曲线(图 6.22), 在 $(0, 0)$ 的无论多么小的邻域中, 都存在 x , 其对应三个 y 值; 同样, 也存在 y , 其对应三个 x 值. 因此, 在 $(0, 0)$ 附近, y 不能写成 x 的函数, x 也不能写成 y 的函数, 即原方程不能在 $(0, 0)$ 处确定隐函数. 由此可见, 确实有隐函数不存在的例子, 那么在什么条件下, 一个方程可以确定一个隐函数? 当这个隐函数不能显示表达时, 它是否连续与可微呢? 下面的隐函数定理回答了这些问题, 定理的证明略去.

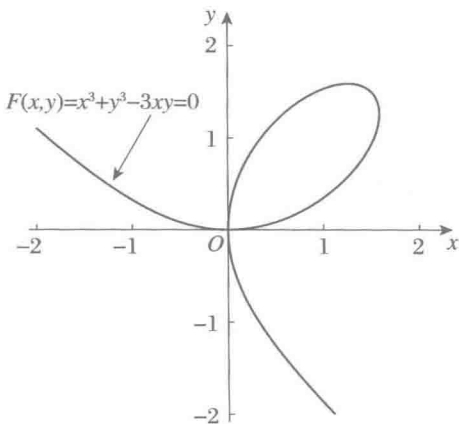


图 6.22 方程 $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$

定理 6.4.1(隐函数定理) 设区域

$D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$. 如果 $F(x, y)$ 在 D 中有定义并满足:

- (a) $F(x, y) \in C^1(D)$, 即 F 在区域 D 上有连续的偏导函数;
- (b) $F(x_0, y_0) = 0$, 即点 (x_0, y_0) 在方程确定的曲线上;
- (c) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则有以下结论(图 6.23):

(1) 方程 $F(x, y) = 0$ 在 (x_0, y_0) 附近确定了隐函数 $y = \varphi(x)$, 即存在 (x_0, y_0) 的邻域 $I \times J \subset D$ 及函数 $\varphi: I \rightarrow J$, 使得 $y = \varphi(x)$ 是 J 中满足 $F(x, y) = 0$ 的唯一元素 $(x \in I)$;

(2) 隐函数 $y = \varphi(x)$ 是 C^1 的, 且

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (x \in I).$$

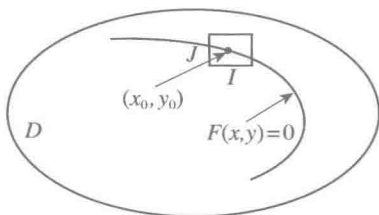


图 6.23 隐函数存在定理

注 6.4.1 (1) 如果方程 $F(x, y) = 0$ 确定了可微的隐函数 $y = \varphi(x)$, 则有恒等式

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in I).$$

等式两边对 x 求导, 利用复合函数求导法则, 知

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

由此可得隐函数的导数公式. 这种处理方法可以直接应用到解题中, 而不必去套用公式.

(2) 如果 $F(x, y)$ 是 $C^n (n \geq 2)$ 的, 那么由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数也是 C^n 的.

例 6.4.1 设方程

$$\sin(x + y) + 2x + y = 0$$

确定了 y 是 x 的函数. 求 $y'(x), y''(x)$.

解 设 $y = y(x)$, 则有恒等式

$$\sin[x + y(x)] + 2x + y(x) = 0.$$

两边对 x 求导, 得

$$\cos(x + y)[1 + y'(x)] + 2 + y'(x) = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{2 + \cos(x + y)}{1 + \cos(x + y)} = -1 - \frac{1}{1 + \cos(x + y)}, \\ y''(x) &= -\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{1 + \cos(x + y)} \right] \\ &= -\frac{\sin(x + y)}{[1 + \cos(x + y)]^2} [1 + y'(x)] \\ &= \frac{\sin(x + y)}{[1 + \cos(x + y)]^3}. \end{aligned} \quad \square$$

定理 6.4.1 只是隐函数定理的最简单情形. 类似地, 可以写出 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数定理(第 1 题). 更一般地, 考虑由 m 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots, \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \quad (6.4.1)$$

我们希望能够附加某些适当的条件, 从这 m 个方程中解出 m 个未知元 y_1, \dots, y_m , 即解出

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots, \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (6.4.2)$$

为此, 记 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, 并记

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T,$$

则 $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为向量值函数. 式(6.4.1)和(6.4.2)可分别简记为

$$F(x, y) = 0, \quad y = f(x).$$

记

$$J_x F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad J_y F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

注意, $J_x F$ 是 $m \times n$ 矩阵, $J_y F$ 是 m 阶方阵, 而 $(J_x F, J_y F)$ 就是映射 F 的雅可比矩阵. 有了这些准备, 我们就可以来表述下面的隐映射定理:

定理 6.4.2 (隐映射定理) 设 $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 为开集, 映射 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足下列条件:

- (a) $F \in C^1(D)$;
- (b) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (c) $\det J_y F(x_0, y_0) \neq 0$.

则有以下结论:

(1) 方程组 $F(x_0, y_0) = 0$ 在 (x_0, y_0) 附近确定了隐映射 $y = f(x)$, 即存在 (x_0, y_0) 的邻域 $U \times V \subset D$ 及映射 $f: U \rightarrow V$, 使得 $y = f(x)$ 是 V 中满足 $F(x, y) = 0$ 的唯一元素 ($x \in U$);

(2) 隐映射 $y = f(x)$ 是 C^1 的, 且

$$Jf(x) = -[J_y F(x, y)]^{-1} J_x F(x, y) \quad (x \in U).$$

隐映射定理是定理 6.4.1 的推广, 两者在形式上也很相似, 只要将导数换成雅可比矩阵即可. 这里虽然给出了隐映射的求导公式, 但是并不需要记住这些公式. 可以用类似于例 6.4.1 的方法来解隐函数或隐映射的求导问题.

例 6.4.2 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 所确定的隐函数. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 在所给方程的两边分别对 x 与 y 求偏导, 得

$$ax + cz \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad by + cz \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ax}{cz}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{by}{cz}$. 再将上述等式分别对 x, y 求偏导, 就得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a}{cz} + \frac{ax}{cz^2} \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{b}{cz} + \frac{by}{cz^2} \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{ax}{cz^2} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 的表达式代入并化简, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{abxy}{c^2z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}. \quad \square$$

例 6.4.3 设 $y = f(x+t)$, 其中 t 是由方程 $y + g(x, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数. 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 设 $t = t(x, y)$ 是由 $y + g(x, t) = 0$ 确定的隐函数, 在等式 $y + g(x, t(x, y)) = 0$ 的两边分别对 x, y 求导, 得

$$g'_x + g'_t \cdot t'_x = 0, \quad 1 + g'_t \cdot t'_y = 0,$$

所以

$$t'_x = -\frac{g'_x}{g'_t}, \quad t'_y = -\frac{1}{g'_t}.$$

在等式 $y = f(x + t(x, y))$ 两边对 x 求导, 得

$$y'_x = f' \cdot (1 + t'_x + t'_y \cdot y'_x),$$

解得

$$y' = \frac{f'(g'_t - g'_x)}{g'_t + f'}.$$

事实上, 由题意知, 方程组

$$\begin{cases} y = f(x+t), \\ y + g(x, t) = 0 \end{cases}$$

确定了函数 $y = y(x), t = t(x)$. 由此出发, 可以更简洁地得到答案 (请读者自行验证). 此外, 利用微分来求微商也是一个重要的方法. 将 x, y, t 都看做自变量, 在方程组的两边求全微分, 得

$$\begin{cases} dy = f' \cdot (dx + dt), \\ dy + g'_x dx + g'_t dt = 0. \end{cases}$$

从中可以解出 dy, dt (以 dx 为变量), 例如, $dy = \frac{f'(g'_t - g'_x)}{g'_t + f'} dx$, 即 $y'(x) = \frac{f'(g'_t - g'_x)}{g'_t + f'}$. \square

例 6.4.4 证明: 方程组

$$\begin{cases} u^2 - v + x = 0, \\ u + v^2 - y = 0 \end{cases}$$

在点 $(0, 0, 0, 0)$ 的邻域中确定了隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 并求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

解 令

$$\begin{cases} F_1(u, v, x, y) = u^2 - v + x = 0, \\ F_2(u, v, x, y) = u + v^2 - y = 0. \end{cases}$$

因为 $F_1(0, 0, 0, 0) = F_2(0, 0, 0, 0) = 0$, 且 $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ 关于 u, v 的雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2v \end{vmatrix} = 1 + 4uv$$

在 $(0, 0, 0, 0)$ 处不为零, 所以隐映射定理保证了函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 的存在性和可微性.

在方程组的两个方程的两边分别对 x 求导, 得到

$$\begin{cases} 2uu'_x - v'_x + 1 = 0, \\ u'_x + 2vv'_x = 0, \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2v}{1+4uv}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+4uv}. \quad \square$$

6.4.2 反函数的存在定理与微分法*

首先, 我们回顾一下一元函数的反函数及其微商. 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, $x_0 \in (a, b)$ 且 $f'(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f'(x_0) > 0$, 则存在区间 $I \subset (a, b)$, 使得 f' 在 I 上恒正, f 在 I 上严格单调增. 记 $J = f(I)$, 则 f 在 I 上的限制 $f|_I: I \rightarrow J$ 有反函数 $f^{-1}: J \rightarrow I$. 不难证明 $f^{-1}|_J$ 也是可微的, 且对 $\forall y \in J$, 有

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

其中 $x \in I$ 且 $f(x) = y$.

这个结论可以推广到多元映射,即所谓的逆映射定理.

定理 6.4.3(逆映射定理) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^1 映射, $x_0 \in D$ 且 $\det Jf(x_0) \neq 0$, 则存在 x_0 的邻域 U , 使得 $f|_U: U \rightarrow V = f(U)$ 为一一映射, 从而有逆映射 $f^{-1}: V \rightarrow U$, 且对 $\forall y \in V$, 有

$$Jf^{-1}(y) = [Jf(x)]^{-1},$$

其中 $x \in U$ 且 $f(x) = y$.

可以利用隐映射定理来证明, 具体细节请读者自行补充.

例 6.4.5 求极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 的反变换的偏导数.

解 极坐标变换即映射 $f: (r, \theta) \mapsto (x, y)$, 其中 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. 由于

$$Jf(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

$\det Jf(r, \theta) = r$, 故由逆映射定理知, 只要 $r \neq 0$, f 在 (r, θ) 附近就有逆映射 $f^{-1}: (x, y) \mapsto (r, \theta)$, 且

$$Jf^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad \square$$

由于逆映射定理是隐函数定理的一个简单推论, 因此本题也可以用隐函数求导方法直接计算.

将此变换中的 r, θ 看做是 x, y 的函数, 两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \cos \theta \frac{\partial r}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1, \\ \sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

这是关于 $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$ 的二元一次方程组, 解之得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

同理, 可得

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

习题 6.4

1. 写出 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数定理.
 2. 求由下列方程所确定的隐函数的给定的导数:

$$(1) \sin xy - e^{xy} - x^2 y = 0, \frac{dy}{dx};$$

$$(2) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$(3) x^y = y^x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2};$$

$$(4) e^{-xy} - 2z + e^z = 0, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$(5) e^z - xyz = 0, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$(6) \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$(7) F(x, x+y, x+y+z) = 0, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(8) F(xz, yz) = 0, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数. 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

4. 试求由下列方程所确定的隐函数的给定的微分:

$$(1) \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1, dz; \quad (2) xyz = x + y + z, dz;$$

$$(3) u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0, du; \quad (4) F(x-y, y-z, z-x) = 0, dz.$$

5. 证明: 当 $1 + xy = k(x - y)$ (k 为常数) 时, 有

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

6. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ 所确定的隐函数. 试证:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

7. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的隐函数. 试证: 不论 φ 为怎样的可微函数, 都有 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

8. 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 所确定的函数. 求 $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$.

9. 设 $z = f(u)$, 方程 $u = \varphi(u) + \int_y^x p(t) dt$ 确定了 u 是 x, y 的函数, 其中 $f(u), \varphi(u)$ 可微, $p(t), \varphi'(u)$ 连续, 且 $\varphi'(u) \neq 1$. 求 $p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y}$.

10. 求下列方程组所确定的隐函数的给定的导数.

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 0, & \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, & \end{cases} \quad (2) \begin{cases} F(x, y, z) = 0, & \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}; \\ G(x, y, z) = 0, & \end{cases}$$

11. 设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 是由下列方程组所确定的隐函数组, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$(1) \begin{cases} u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1, \\ u + v + x + y = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} u = f(ux, v + y), \\ v = g(u - x, v^2 y). \end{cases}$$

12. 求下列函数组所确定的反函数组的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$:

$$(1) \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v); \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v. \end{cases}$$

13. 设 $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0. \text{ 求 } \frac{du}{dx}.$$

14. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x + y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数. 求 $\frac{dz}{dx}$.

15. 设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, u, v) = 0$ 和 $G(x, y, u, v) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 F 和 G 都具有一阶连续偏导数. 求 du, dv .

16. 设函数 $u = u(x, y)$ 由方程组 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 定义. 求

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}.$$

17. 已知方程 $\begin{cases} \cos(2x + 2y + 2z) = 1 - y, \\ \sin(12x + 6y - 6z) = 6z \end{cases}$ 在原点 $(0, 0, 0)$ 的某邻域中确定了 C^∞ 的隐函数 $y(x), z(x)$. 试求 $y'(0), y''(0), z'(0), z''(0)$.

6.5 多元函数的泰勒公式与极值

对于单变量函数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $f(x)$ 在给定点 $x_0 \in (a, b)$ 附近可微, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

即函数 $f(x)$ 可由一次多项式

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

近似. 如果函数有更高阶的导数存在, 比如存在 n 阶导数, 则泰勒定理告诉我们, $f(x)$ 可以用 n 次多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

近似. 当 $n+1$ 阶导数存在时, 我们还可以估计出近似的误差.

对于多变量函数, 也有类似的泰勒公式. 为了简便起见, 我们只讨论两个变量的情形, 对于多个变量的一般情形, 不难作类似的推广.

6.5.1 二元函数的泰勒公式

平面区域 D 称为凸区域, 如果 D 中任意两点的连线都包含在 D 中. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为凸区域, $f(x, y) \in C^{n+1}(D)$, $M_0(x_0, y_0), M(x_0 + h, y_0 + k)$ 为 D 中的两点. 记

$$\varphi(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

则 $\varphi(t) \in C^{n+1}([0, 1])$. 由一元函数的泰勒公式知, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^n \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}. \quad (6.5.1)$$

利用复合函数的求导法则, 得

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k,$$

因此

$$\varphi'(0) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{M_0}.$$

利用归纳法, 不难证明:

$$\varphi''(0) = \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{M_0},$$

...

$$\varphi^{(m)}(0) = \sum_{l=0}^m C_m^l h^l k^{m-l} \frac{\partial^m f}{\partial x^l \partial y^{m-l}} \Big|_{M_0}.$$

为了书写的方便, 引进算符

$$\mathcal{D} = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}.$$

利用二项展开式, 可得

$$\mathcal{D}^m = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m = \sum_{l=0}^m C_m^l h^l k^{m-l} \frac{\partial^m}{\partial x^l \partial y^{m-l}}.$$

因此

$$\varphi^m(0) = \sum_{l=0}^m C_m^l h^l k^{m-l} \frac{\partial^m f}{\partial x^l \partial y^{m-l}} \Big|_{M_0} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0).$$

将上式代入式(6.5.1), 并令 $t=1$, 就得到了二元函数的泰勒公式.

定理 6.5.1 (泰勒公式) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为凸区域, $f \in C^{n+1}(D)$. 如果 $(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0 + k) \in D$, 则存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) + R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

称为拉格朗日型余项; 特别地, 在 $(0, 0)$ 处展开的泰勒公式也叫麦克劳林公式.

特别地, 一阶展开公式是

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + R_1;$$

二阶展开公式是

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \\ &\quad + \frac{1}{2} (Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + R_2, \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

一般称矩阵

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

为二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的黑塞(L. O. Hesse, 1811~1874)矩阵. 显然 $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ 就是由对称方阵 $Hf(x_0, y_0)$ 确定的二次型.

例 6.5.1 将函数 $f(x, y) = e^x \cos y$ 的麦克劳林公式展开至二次项.

解 先计算所给函数及其偏微商在点 $(0, 0)$ 的值:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, & f'_x(0, 0) &= 1, & f'_y(0, 0) &= 0, \\ f''_{xx}(0, 0) &= 1, & f''_{xy}(0, 0) &= 0, & f''_{yy}(0, 0) &= -1, \end{aligned}$$

从而得

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_2,$$

其中 R_2 是余项. 见图 6.24~6.26. □

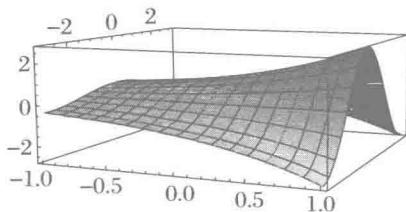


图 6.24 函数 $e^x \cos y$

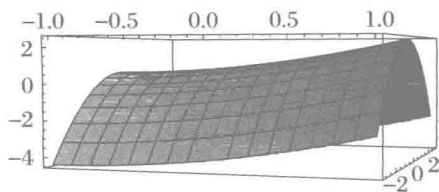


图 6.25 函数 $1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

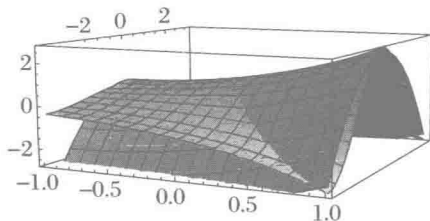


图 6.26 函数 $e^x \cos y$ 和 $1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

如果直接利用一元函数的泰勒公式分别展开 e^x 和 $\cos y$, 再将两个展开式相乘, 所得的结果相同, 但余项的形式不同.

同一元函数类似, 多元函数也有带佩亚诺型余项的泰勒展开式. 我们略去下述定理的证明.

定理 6.5.2 (带佩亚诺型余项的泰勒公式) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为凸区域, $f \in C^n(D)$. 若 $(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0 + k) \in D$, 则有

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) + R_n,$$

其中 $R_n = o(\rho^n)$ ($\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$).

6.5.2 多元函数的极值

导数是研究函数极值的重要手段. 若可微函数 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 处取到极值, 则 $f'(x_0) = 0$. 反过来, 如果 f 有二阶导函数, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 为 f 的极值点. 对多元函数也有类似的结论, 不过比单变量情形要复杂一些. 这里我们只讨论二元函数的极值问题, 对一般多元函数的情形可以类推.

定义 6.5.1 设 $f(x, y)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, $(x_0, y_0) \in D$. 如果存在 (x_0, y_0) 的邻域 U , 使得对 $\forall (x, y) \in U$, 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 则称 (x_0, y_0) 为函数 f 的一个极小值点, $f(x_0, y_0)$ 称为 f 的一个极小值. 类似可以定义极大值点和极大值. 极小值点和极大值点统称为极值点.

下面的定理给出了极值点的必要条件.

定理 6.5.3 若可微函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取到极值, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

证明 若 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取到极值, 则单变量函数 $\varphi(x) = f(x, y_0)$ 在 x_0 取到极值, 故 $\varphi'(x_0) = 0$. 由于

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi'(x_0),$$

所以 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. 同理, 可得 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. □

两个偏导数都为零的点称为驻点. 由上面的定理知, 可微函数的极值点都是驻点, 但一般来说, 驻点不一定是极值点. 例如, 对于函数 $f(x, y) = xy$, $(0, 0)$ 是一个驻点, 但显然不是极值点.

与一元函数类似, 我们希望通过二阶偏导数来判断一个驻点是否为极值点. 设

(x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点. 在 (x_0, y_0) 的一个凸邻域内, 由泰勒公式知

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + R_2,$$

其中 $h = x - x_0, k = y - y_0$. 记 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, 由定理 6.5.2 知 $R_2 = o(\rho^2)$. 因此, 当 h, k 很小时, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ 的符号由 $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ 的符号决定, 而 $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ 恰好是 f 在 (x_0, y_0) 处的黑塞矩阵对应的二次型. 利用二次型的知识, 可得到如下结论:

定理 6.5.4 设 $f(x, y)$ 为区域 D 上的 C^2 函数, $(x_0, y_0) \in D$ 为 $f(x, y)$ 的驻点. 记 $\Delta = AC - B^2$, 其中

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

那么:

- (1) 当 $A > 0$ 且 $\Delta > 0$ 时, (x_0, y_0) 为严格极小值点;
- (2) 当 $A < 0$ 且 $\Delta > 0$ 时, (x_0, y_0) 为严格极大值点;
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, (x_0, y_0) 不是极值点.

证明* 下面用初等方法给出该定理的证明. 在 (x_0, y_0) 的一个凸邻域内, 由定理 6.5.2 知

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + o(\rho^2),$$

其中 $h = x - x_0, k = y - y_0, \rho = \sqrt{h^2 + k^2}$.

记 $\cos \alpha = \frac{h}{\rho}, \sin \alpha = \frac{k}{\rho}$, 则有

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\rho^2}{2} [A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha + \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2)].$$

记

$$\varphi(\alpha) = A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi).$$

(1) 当 $A > 0, \Delta > 0$ 时,

$$\varphi(\alpha) = A \left(\cos \alpha + \frac{B}{A} \sin \alpha \right)^2 + \frac{\Delta}{A} \sin^2 \alpha. \quad (6.5.2)$$

由于 $\cos \alpha + \frac{B}{A} \sin \alpha$ 与 $\sin \alpha$ 不同时为零, 故 $\varphi(\alpha)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恒正. 由闭区间上连续函数的性质知, 存在 $m > 0$, 使得

$$\varphi(\alpha) \geq m \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi).$$

由于 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2) = 0$, 所以当 ρ 充分小时, $\left| \frac{2}{\rho^2} \cdot o(\rho^2) \right| < \frac{m}{2}$, 从而

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \frac{\rho^2 m}{4} > 0 \quad (\rho > 0).$$

因此, (x_0, y_0) 为极小值点.

(2) 证明与(1)类似.

(3) 先假定 $A \neq 0$, 由式(6.5.2)知 $\varphi(0) = A$. 若取 α_0 使得 $\cos \alpha_0 + \frac{B}{A} \sin \alpha_0 = 0$, 则 $\sin \alpha_0 \neq 0$, 从而 $\varphi(\alpha_0)$ 与 A 异号, 于是 $\varphi(\alpha)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内可变号. 由此不难看出, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ 在 (x_0, y_0) 的任意小邻域中可变号, 所以 (x_0, y_0) 不是极值点.

若 $C \neq 0$, 利用对称性, 同样可证得 (x_0, y_0) 不是极值点.

若 $A = C = 0$, 则 $B \neq 0$, 且 $\varphi(\alpha) = 2B \sin \alpha \cos \alpha = B \sin 2\alpha$. 由 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = B$, $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -B$ 知, (x_0, y_0) 不是极值点. \square

注 6.5.1 当 $\Delta = AC - B^2 = 0$ 时, 不能断言 (x_0, y_0) 是否是极值点. 此时可利用更高阶的泰勒公式进行讨论.

例 6.5.2 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ (图 6.27) 的所有极值点.

解 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0, \end{cases}$$

得驻点

$$M_1(1, 0), M_2(1, 2), M_3(-3, 0), M_4(-3, 2).$$

再计算出所给函数的二阶偏导数:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad f''_{yy}(x, y) = -6y + 6.$$

在点 $M_1(1, 0)$, $A = 12 > 0$, $B = 0$, $C = 6$, $AC - B^2 = 72 > 0$, 因而 M_1 是极小值点, 极小值为 $f(1, 0) = -5$ (图 6.28).

在点 $M_2(1, 2)$, $A = 12$, $B = 0$, $C = -6$, $AC - B^2 = -72 < 0$, 因而 M_2 不是极值点.

在点 $M_3(-3, 0)$, $A = -12$, $B = 0$, $C = 6$, $AC - B^2 = -72 < 0$, 因而 M_3 也不是极值点.

在点 $M_4(-3, 2)$, $A = -12 < 0$, $B = 0$, $C = -6$, $AC - B^2 = 72 > 0$, 因而 M_4 是

极大值点,极大值为 $f(-3,2)=31$. □

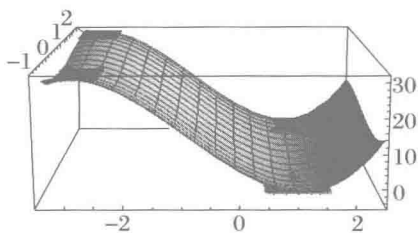


图 6.27 例 6.5.2 中函数的图像

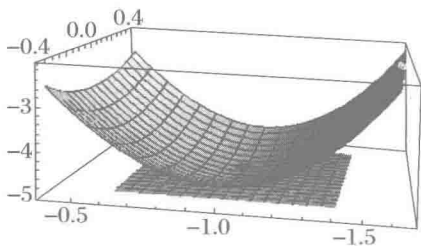


图 6.28 例 6.5.2 中函数的极小值点

例 6.5.3 若用钢板做一容积为 2 m^3 的无盖长方体水箱,问如何选择尺寸使用料最省?

解 设水箱的长为 x , 宽为 y , 则其高为 $\frac{2}{xy}$. 易知用料的面积是

$$S = xy + \frac{4(x+y)}{xy} = xy + 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

于是问题归结为求二元函数 S 在 $x>0, y>0$ 上的最小值问题. 由极值的必要条件得

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{4}{x^2} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{4}{y^2} = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = \sqrt[3]{4}$. 根据问题的实际意义, 容积一定的水箱其用料不可能无限减小, 即必有最小值. 由于定义域 $x>0, y>0$ 不含边界点, 所以达到最小值的点必是定义域中的驻点, 而点 $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{4})$ 是区域 $x>0, y>0$ 内唯一的驻点, 因此 S 就在这点达到最小. 也就是说, 取长、宽都是 $\sqrt[3]{4}$, 高等于 $\frac{2}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ 时, 即将无盖水箱的长、宽、高

之比取成 $1:1:\frac{1}{2}$ 时, 用料最省. □

例 6.5.4 求函数 $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ 在区域 $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \pi$ 上的最大值与最小值.

解 已知函数(图 6.29)的定义域为一个闭三角形(图 6.30). 由连续函数的性质可知, 函数 z 在这个区域上一定达到最大值与最小值.

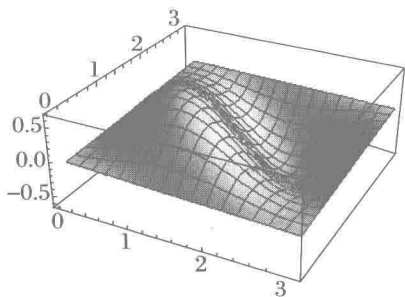
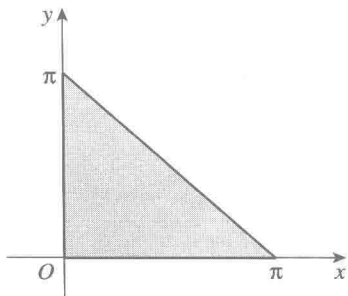


图 6.29 例 6.5.4 中函数的图像

图 6.30 区域 $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi$

先求函数 z 在三角形内部的驻点. 对函数 z 求偏导数并令其为零, 可得方程组:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \\ &= \sin y \sin(2x+y) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) \\ &= \sin x \sin(x+2y) = 0.\end{aligned}$$

但在三角形的内部 $\sin x$ 与 $\sin y$ 都不为 0, 因此

$$\sin(2x+y) = 0, \quad \sin(x+2y) = 0,$$

且 $0 < 2x+y < 2\pi, 0 < x+2y < 2\pi$. 于是有

$$2x+y = \pi, \quad x+2y = \pi.$$

解之可得, 唯一的驻点为

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

函数在驻点处的值为 $z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \sin^3 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$. 因为函数在三角形边界上的值为零, 所以 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ 为函数的极大值点, 也是最大值点, 函数在闭三角形上的最大值为 $\frac{3}{8}\sqrt{3}$; 而最小值为 $z=0$, 可以在三角形的三条边上任何一点取得. \square

例 6.5.5 试求由方程 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的极大值和极小值.

解 在方程 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得

$$y'(x) = -\frac{x+y}{x+2y}.$$

令 $y'(x) = 0$, 得 $y = -x$, 代入原方程, 解得 $x = 1$ 或 $x = -1$.

当 $x=1$ 时, 由原方程解得 $y=0$ 或 $y=-1$. 由于 $x=1, y=0$ 并不满足驻点方程, 所以对在 $(1, 0)$ 附近确定的隐函数 $y=y(x)$ 而言, $x=1$ 不是驻点, 从而不是极值点. 而 $x=1, y=-1$ 是满足驻点方程的, 所以对在 $(1, -1)$ 附近确定的隐函数 $y=y(x)$ 而言, $x=1$ 是驻点. 为了判别该驻点是否为极值点, 我们来计算隐函数的二阶导数. 由于

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{[1+y'(x)](x+2y)-(x+y)[1+2y'(x)]}{(x+2y)^2} \\ &= \frac{-y+xy'(x)}{(x+2y)^2}, \end{aligned}$$

将 $x=1, y=-1, y'(1)=0$ 代入上式, 得 $y''(1)=1>0$, 所以 $x=1$ 为隐函数 $y=y(x)$ 的极小值点, 对应的极小值 $y=-1$.

经类似的讨论可知, 在 $(-1, 1)$ 附近确定的隐函数 $y=y(x)$ 具有极大值 $y=1$. \square

事实上, 方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 表示的是平面上的一个椭圆, 如图 6.31 所示. 读者可以结合这个图形来回味一下上述的求解过程.

例 6.5.6 若 $f(x, y)$ 为区域 D 上的 C^2 函数, 且 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极小值点. 证明:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0.$$

证明 对于固定的 y_0 , 考虑单变量函数 $\varphi(x) = f(x, y_0)$. 由题设知 x_0 为 $\varphi(x)$ 的极小值点, 从而 $\varphi''(x_0) \geq 0$. 利用偏导数的定义, 知

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi'(x_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \varphi''(x_0),$$

所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0$. 同理, 可得 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$. 综上, 可知

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0. \quad \square$$

6.5.3 条件极值

设 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续, 在 D 的内部 D° 可微. 为了计算 $f(x, y)$ 在 D

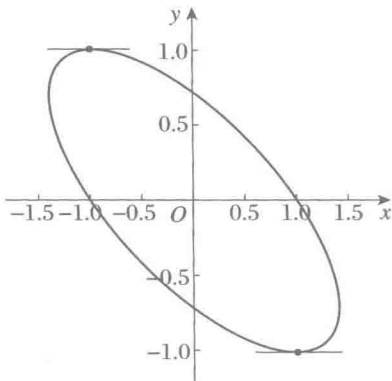


图 6.31 椭圆 $x^2+2xy+2y^2=1$

上的最大、最小值点,需要求出 $f(x, y)$ 在 D° 中的所有驻点以及在 ∂D 上的最大、最小值点,然后将这些点上的函数值加以比较.

设 ∂D 是由方程

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (6.5.3)$$

表示的隐式曲线. $f(x, y)$ 在 ∂D 上的极大值点 $M_0(x_0, y_0)$ 是指 $\varphi(x_0, y_0) = 0$, 且在 M_0 的某个邻域中, 凡是满足 $\varphi(x, y) = 0$ 的点 $M(x, y)$ 都满足

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

类似可以定义 $f(x, y)$ 在 ∂D 上的极小值点.

这种极值问题与前面介绍的极值问题有很大区别. 这里讨论的是在满足条件式(6.5.3)下, $f(x, y)$ 的极值, 所以称为条件极值问题. $f(x, y)$ 称为问题的目标函数, 方程(6.5.3)称为联系方程或约束条件.

若能够从联系方程 $\varphi(x, y) = 0$ 中解出 $y = y(x)$, 则条件极值问题就转化为函数

$$z = f(x, y(x))$$

在通常意义下的极值问题. 但是当联系方程比较复杂时, 从它解出一个变量通常是不可能的. 在这种情况下如何确定条件极值问题的极值呢? 下面将要讲述的拉格朗日乘数法就解决了这个问题.

为简单起见, 不妨设曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 是光滑的, 即 $\varphi(x, y)$ 为 C^1 函数, 且 $\varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)$ 中至少有一个不为零. 假设 (x_0, y_0) 是一个条件极值点, 不妨设 $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 由隐函数定理知, 存在定义在 x_0 附近的函数 $y = y(x)$, 且 x_0 为一元函数

$$g(x) = f(x, y(x))$$

的极值点. 因此

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0) = 0.$$

又由 $\varphi(x, y(x)) = 0$ 知

$$y'(x_0) = -\frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)},$$

所以

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}.$$

令

$$\lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)},$$

则有

$$(f'_x + \lambda\varphi'_x) |_{(x_0, y_0)} = 0,$$

$$(f'_y + \lambda\varphi'_y) |_{(x_0, y_0)} = 0.$$

引进辅助函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

则辅助函数 $F(x, y, \lambda)$ 的极值点应满足下面的驻点方程组:

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ F'_\lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

因此,要求条件极值,首先从上述方程中解出驻点,然后再根据题意去判别哪些驻点是极值点.这种方法称为拉格朗日乘数法, λ 称为拉格朗日乘子.

一般在解驻点方程时,不必求出 λ 的值,所以在求解过程中应当先把 λ 消去.

例 6.5.7 求在约束条件 $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ 下, $z = xy$ 的极值.

解 作辅助函数

$$F(x, y) = xy + \lambda[(x-1)^2 + y^2 - 1].$$

于是得到驻点方程组

$$\begin{cases} y + 2\lambda(x-1) = 0, \\ x + 2\lambda y = 0, \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

解得驻点: $M_1(0, 0)$, $M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

约束条件是图 6.32 所示的圆周.当点 (x, y) 沿上半平面内圆周接近 M_1 时,函

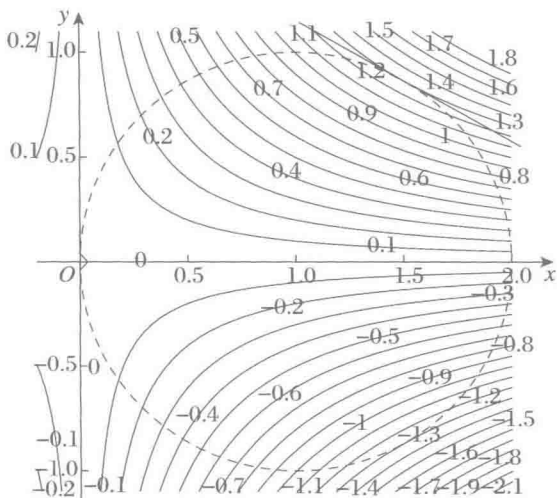


图 6.32 拉格朗日乘数法

数值始终保持为正;而当它在下半平面中沿圆周接近 M_1 时,函数值始终保持为负.即在 M_1 附近, $f(x, y) - f(0, 0)$ 有不同的符号,因此 M_1 不是极值点.

因为连续函数 $z = xy$ 在圆周上连续,所以它一定在圆周上的某点达到最大值,而在另一点达到最小值.既然 M_2, M_3 是可能取极值的仅有的两点,可见它们中必有一点是最大值点,而另一点是极小值点.计算可得 $z(M_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 是最大值, $z(M_3) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 是最小值. □

图 6.32 画的是函数 $z = xy$ 的等高线,以及约束条件——圆周 $(x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$.由图可以发现,在极小值点 M_3 和极大值点 M_2 处,函数 $z = xy$ 的等高线的切线与约束条件在极值点处的切线平行,这就是拉格朗日乘数法的几何意义.

上述二元函数的条件极值求解法可以推广到一般情形.考虑目标函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $m (< n)$ 个约束条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots, \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

下的极值问题.作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是 m 个辅助常量.由此构成驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

从中可以解出 $m+n$ 个未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 则 (x_1, x_2, \dots, x_n) 就有可能是条件极值点.

例 6.5.8 求由原点到曲面 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 的距离.

解 考虑原点到曲面上点 (x, y, z) 的距离的平方 $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 则问题就化成求函数

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

在限制条件 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 下的最小值.

按乘法法作辅助函数

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1],$$

并求得驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda(x-y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

由第三个方程得 $z(1-\lambda) = 0$. 但当 $\lambda = 1$ 时, 容易看出这组方程不相容, 所以只能有 $z = 0$, 从而解得

$$x = \pm \frac{1}{2}, \quad y = -x = \mp \frac{1}{2}.$$

于是点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 与 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 便可能是极值点. 由问题本身的意义知, 最小值一定存在, 而函数在这两点上取相同的值 $\frac{1}{2}$. 因此这两点都是函数的最小值点,

并得出所求的最短距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

例 6.5.9 试将正数 a 分成 n 个正数的和, 使得这 n 个正数的乘积最大.

解 设 a 分成的 n 个正数为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则问题就化成在限制条件 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ 下, 求函数 $u = x_1 x_2 \cdots x_n$ 的最大值. 作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a),$$

求得驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0, \\ \cdots, \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a. \end{cases}$$

比较这些等式,可知

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

代入限制条件,求得

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}.$$

由题意知,最大值一定存在,因此这个唯一可能的极值点就是函数的最大值点.从而推得,若将正数 a 分成 n 个相等的正数,则这 n 个正数的乘积最大,其最大值为 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$. \square

从上述结果还可以得到一个重要的不等式.由于

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{a}{n}\right)^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

即 n 个正数的几何平均值不大于它们的算术平均值.

习题 6.5

- 求下列函数从点 (x_0, y_0) 变到 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 时的函数增量:
 - $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4, (x_0, y_0) = (5, 6)$;
 - $f(x, y) = x^2 y + xy^2 - 2xy, (x_0, y_0) = (1, -1)$.
- 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点 $(1, -2)$ 处的泰勒展开式.
- 求下列函数在给定点处的泰勒公式:
 - $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$, 点 $(0, 0)$, 直到三阶为止;
 - $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 点 $(0, 0)$, 直到四阶为止;

- (3) $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$, 点(0,0), 直到 n 阶为止;
- (4) $f(x, y) = e^{x+y}$, 点(0,0), 直到 n 阶为止;
- (5) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, 点(0,0), 直到 n 阶为止;
- (6) $f(x, y) = \sin x \sin y$, 点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, 直到二阶为止;
- (7) $f(x, y) = x^y$, 点(1,1), 直到二阶为止.
4. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所确定的隐函数. 当 $x = 1, y = 1$ 时, $z = 1$, 试按 $x-1$ 和 $y-1$ 的乘幂展开函数 z 至二次项.
5. 利用二元函数的泰勒公式, 证明当 $|x|, |y|$ 充分小时, 有下列近似等式成立:
- (1) $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$;
- (2) $\arctan \frac{1+x+y}{1-x+y} \approx \frac{\pi}{4} + x - xy$.
6. 求下列函数的极值:
- (1) $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$;
- (2) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} (x > 0, y > 0)$;
- (3) $f(x, y) = e^{2x}(x + 2y + y^2)$;
- (4) $f(x, y) = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.
7. 利用隐函数微分法, 求下列式子确定的隐函数 $y = y(x)$ 或 $z = z(x, y)$ 的极大值和极小值:
- (1) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;
- (2) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$;
- (3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.
8. 求下列函数在指定条件下的极值:
- (1) $u = x^2 + y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;
- (2) $u = x + y + z, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 (x > 0, y > 0, z > 0)$;
- (3) $u = \sin x \sin y \sin z, x + y + z = \frac{\pi}{2} (x > 0, y > 0, z > 0)$;
- (4) $u = xyz, x + y + z = 0$ 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
9. 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值:
- (1) $z = x^2 - y^2, \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$;

- (2) $z = x^2 - xy + y^2, \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
- (3) $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y), \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}$;
- (4) $z = x^2 y(4 - x - y), \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$.
10. 在平面 $3x - 2z = 0$ 上求一点, 使它与点 $A(1, 1, 1)$ 和 $B(2, 3, 4)$ 距离的平方和最小.
11. 在曲线 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 上, 求使竖坐标分别为最大值和最小值的点.
12. 设 $f(x, y) = 3x^2 y - x^4 - 2y^2$. 证明: $(0, 0)$ 不是它的极值点, 但沿过 $(0, 0)$ 点的每条直线, $(0, 0)$ 都是它的极大值点.
13. 设有一帐篷, 其下部为圆柱形, 上部盖以圆锥形的顶篷, 设帐篷的容积为一定数 V_0 . 试证: 当 $R = \sqrt{5}H, h = 2H$ (R, H 分别为圆柱形的底半径和高, h 为圆锥形的高) 时, 所用篷布最省.
14. 已知平行六面体的所有棱长之和为 $12a$. 求其最大体积.
15. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上求一点 $M(x, y)$ ($x, y \geq 0$), 使得椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积最小, 并求其面积.
16. 求平面上一点 (x_0, y_0) , 使得它到 n 个定点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 距离的平方和最小.
17. 在椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的内接长方体中, 求体积最大的长方体的体积.
18. 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 上, 求距平面 $x + y + 2z = 9$ 最远和最近的点.

6.6 空间中的曲线与曲面

在空间中建立坐标系后, 空间中的曲线和曲面可以用它们上面的点的坐标满足的方程来表示. 在解析几何中, 主要研究的是相对简单的直线、平面、二次曲面等. 本节中, 我们将利用微积分来研究一般曲线、曲面的表示和性质, 特别是曲线的切线、曲面的切平面等.

6.6.1 参数方程表示的空间曲线

在空间中取定空间直角坐标系 $Oxyz$ 后, 空间中的点与它的坐标 (x, y, z) 是一

一对应的. 假设一个质点在空间中运动, 为了刻画质点的运动轨迹(一条曲线), 只需指出它在每个时刻 t 所在的位置 $(x(t), y(t), z(t))$. 也就是说, 映射

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

完全刻画了质点的运动轨迹. 由于空间中的点 $M(x, y, z)$ 与向量 \overrightarrow{OM} 之间又存在一一对应, 上述映射 f 在 t 时刻的像 $(x(t), y(t), z(t))$ 可以看做一个向量, 因此经常用表示向量的黑体 r 来代替 f , 即

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (6.6.1)$$

像这样用一元向量值函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 表示曲线上的点的向径, 称为曲线的向径式方程, 它等价于方程组

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (6.6.2)$$

我们称之为空间曲线的参数方程.

设空间曲线 L 满足向径式方程(6.6.1). 如果 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且不同时为零, 则称 L 为光滑曲线. 如果 L 自身不相交, 即对任意 $\alpha \leq t_1 < t_2 < \beta$, 都有 $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$, 则称 L 是简单曲线或若尔当(Jordan)曲线. 若 $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, 则称 L 为闭曲线. 而简单闭曲线就是指首尾相连且没有其他自相交点的曲线.

设 L 为光滑曲线, $M_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $M = \mathbf{r}(t)$ 为曲线上的两点. 向量

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}$$

是平行于割线 M_0M 的一个向量, 并且不论 $t > t_0$ 或 $t < t_0$, 这个向量的方向总是指向 t 增加的方向. 当 M 趋于 M_0 , 即 $t \rightarrow t_0$ 时, 该向量的极限向量(记为 $\mathbf{r}'(t_0)$)必然平行于割线的极限位置—— M_0 处的切线. 由于 L 是光滑曲线, 故 $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. 我们称 $\mathbf{r}'(t_0)$ 为曲线在 M_0 处的切向量, $\mathbf{r}'(t_0)$ 总是指向参数增加的方向. 容易看出

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))}{t - t_0} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \right) \\ &= (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \end{aligned}$$

由此可得曲线 L 在 M_0 处的切线方程

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)};$$

曲线在 M_0 处的法平面方程

$$x'(t_0)[x - x(t_0)] + y'(t_0)[y - y(t_0)] + z'(t_0)[z - z(t_0)] = 0.$$

根据本章 6.2 节映射的微分定义, 可得 $r(t)$ 的微分

$$\begin{aligned} dr &= (dx, dy, dz) \\ &= (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt) = r'(t)dt. \end{aligned}$$

如果将曲线 L 理解为质点的运动轨迹, 由定义知 $r'(t)$ 就是质点在 t 时刻的瞬时速度(包含大小和方向). 假设质点从 t 时刻到 $t + dt$ ($dt > 0$) 时刻沿曲线从 M_0 点运动到 M_1 点(图 6.33), 当 dt 很小时, 可以近似地认为质点沿切线方向做匀速直线运动至 M_2 点, 其中 $|M_0M_2| = |r'(t)|dt$. 用切向量 $\overrightarrow{M_0M_2}$ 近似割向量 $\overrightarrow{M_0M_1}$, 就是用微分 $r'(t)dt$ 近似函数值增量 $r(t + dt) - r(t)$. 像这样用割线段 M_0M_1 近似一小段曲线 $\overline{M_0M_1}$, 再用切线段 M_0M_2 近似, 是微积分以直代曲思想的体现. 在处理曲线的弧长时, 也可类似处理.

上述观点在平面曲线中体现得更加直观. 设 $y = f(x)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) 为一条平面曲线. 它可以看做是一条特殊的空间曲线, 其方程是

$$r(x) = (x, f(x), 0) \quad (\alpha \leq x \leq \beta),$$

微分为

$$dr = r'(x)dx = (1, f'(x), 0)dx = (dx, dy, 0).$$

如图 6.34 所示, dr 就是切向量 \overrightarrow{MQ} , 其长度为

$$|dr| = |r'(x)|dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

在上册中, $|dr|$ 称为弧长微元, 对弧长微元积分就可得到弧长, 即

$$l = \int_a^\beta |dr| = \int_a^\beta |r'(x)|dx = \int_a^\beta \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

这与上册中给出的平面曲线弧长公式是完全一致的. 注意, 这里的处理方式与上册是不一样的, 我们甚至没有通过弧长的定义, 仅仅是通过对微元的分析, 就得到了弧长的公式. 同理, 如果我们对空间曲线的弧长微元 $|dr|$ 积分, 得到的结果

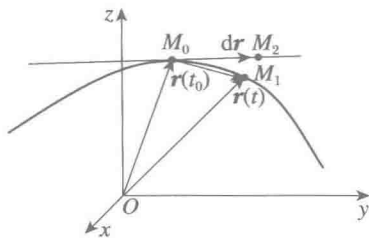


图 6.33 空间曲线的割线与切线

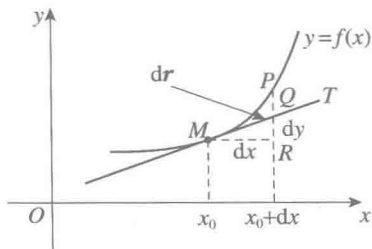


图 6.34 平面曲线的弧长微元

$$\int_a^\beta |d\mathbf{r}| = \int_a^\beta |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

应该就是该曲线的弧长.事实上确实如此,参见第7章7.3.1小节.

6.6.2 参数方程表示的空间曲面

空间曲线是一维的,因此用一个参数就可以表示.而空间中的曲面是二维的,自然需要用两个参数来表示.一般地,设 D 为 \mathbb{R}^2 中的区域,定义在 D 上的一个二元向量值函数

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D) \quad (6.6.3)$$

确定了空间中的一个曲面.上述方程称为曲面的向径式方程,它等价于方程组

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad ((u, v) \in D).$$

这称为曲面的参数方程.

如果固定一个 v 值,让 u 在允许值内变化,则向径 $\mathbf{r}(u, v)$ 的终点就在曲面上画出一条曲线,称为 u 曲线.同样可以定义 v 曲线.整张曲面就是由这些 u 曲线和 v 曲线交织而成的.如图6.35所示.

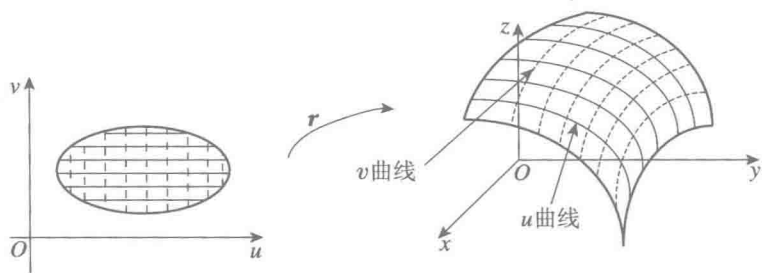


图 6.35 曲面的参数方程

例 6.6.1 球面的方程为

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

当 θ 固定时所得到的 φ 曲线就是纬线,而 φ 固定时所得的 θ 曲线就是经线(图6.36和6.37).

设曲面 S 具有向径式方程(6.6.3),并且 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ 均为 D 上的 C^1 函数.记

$$\mathbf{r}'_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{r}'_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

当 r'_u 和 r'_v 在 D 中处处满足 $r'_u \times r'_v \neq 0$ 时, 称曲面 S 为光滑曲面.

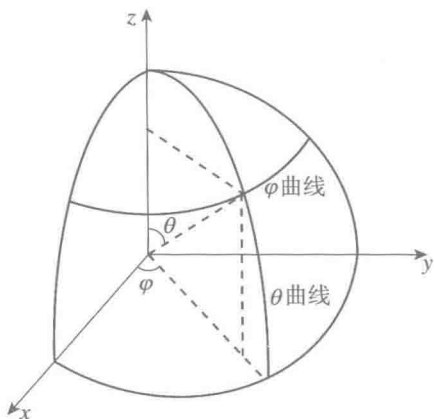


图 6.36 球面的参数方程

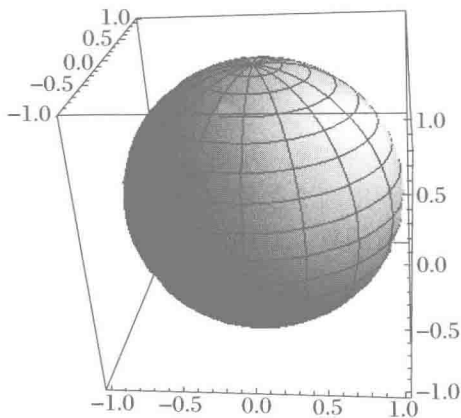


图 6.37 球面

设 S 为光滑曲面, $M_0 = r(u_0, v_0)$ 为曲面上的一点. 过 M_0 点的 u 曲线的参数方程为

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad z = z(u, v_0).$$

它在 M_0 处的切向量就是 $r'_u(u_0, v_0)$. 同理, $r'_v(u_0, v_0)$ 是过 M_0 的 v 曲线在 M_0 处的切向量. 下面我们来说明这两个向量张成了曲面的切平面.

任取一条包含在曲面 S 中且过 M_0 点的光滑曲线 L , L 在映射 r 下的原像为平面区域 D 中过 (u_0, v_0) 的曲线, 记为 L' . 设 L' 具有参数方程

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

其中 $u_0 = u(t_0), v_0 = v(t_0)$, 则 L 具有参数方程

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)), \\ y = y(u(t), v(t)), \\ z = z(u(t), v(t)). \end{cases}$$

曲线 L 在 M_0 处的切向量

$$\begin{aligned} \tau &= (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \\ &= r'_u(u_0, v_0) \cdot u'(t_0) + r'_v(u_0, v_0) \cdot v'(t_0). \end{aligned}$$

上式表明: 曲面 S 上过 M_0 点的任何一条曲线的切向量为 $r'_u(u_0, v_0)$ 与 $r'_v(u_0, v_0)$ 的线性组合, 因此在 $r'_u(u_0, v_0)$ 与 $r'_v(u_0, v_0)$ 张成的平面上. 我们称这张平面为曲面 S 在 M_0 处的切平面, 它的法向量是

$$\mathbf{n}(u_0, v_0) = r'_u(u_0, v_0) \times r'_v(u_0, v_0).$$

利用雅可比行列式的记号,法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ 也可以表示为

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right).$$

知道了法向量,自然就能够写出曲面的切平面和法线的方程(图 6.38),不再赘述.

由二元函数 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) 所表示的曲面是一类重要的曲面,常称这种曲面为显示曲面.显示曲面有如下的参数表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \\ &((x, y) \in D). \end{aligned}$$

这里 x, y 视为参数.若 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 都在 D 中连续,则

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_x &= (1, 0, f'_x), \quad \mathbf{r}'_y = (0, 1, f'_y), \\ \mathbf{n} &= \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-f'_x, -f'_y, 1). \end{aligned}$$

最后,我们来讨论一下映射 \mathbf{r} 的微分.根据本章 6.2 节中映射微分的定义,如果 \mathbf{r} 是可微的,则 \mathbf{r} 的微分

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= (dx, dy, dz) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv \\ &= \mathbf{r}'_u du + \mathbf{r}'_v dv. \end{aligned}$$

设 $(u, v) \in D, M = \mathbf{r}(u, v)$. 分别给变量 u, v 以小的增量 du, dv . 如图 6.39 所示,参数区域 D 中的小矩形在映射 \mathbf{r} 下的像为曲面上的一个曲边四边形 $MNPQ$.由上一小节的讨论知,当 du, dv 都很小时, u 曲线上一小段弧 MN 可以用

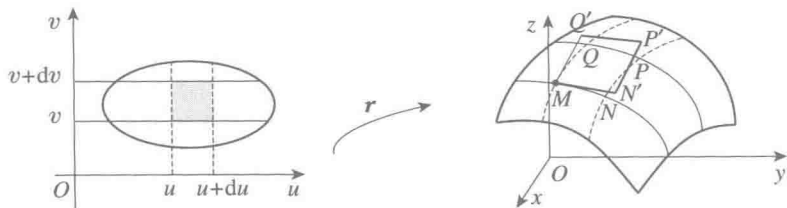


图 6.38 曲面的切平面和法向量

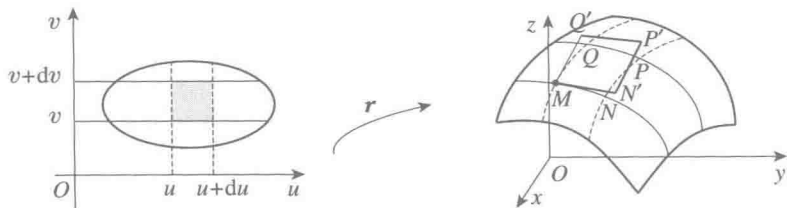


图 6.39 曲面的面积微元

其切线上的向量 \overrightarrow{MN} 近似, v 曲线上一小段弧 \widehat{MQ} 可以用其切线上的向量 $\overrightarrow{MQ'}$ 近似, 其中

$$\overrightarrow{MN} = r'_u du, \quad \overrightarrow{MQ'} = r'_v dv.$$

因此空间四曲边曲面 $MNPQ$ 可以由切平面上的平行四边形 $MN'P'Q'$ 近似. 而

$\overrightarrow{MP} = r(u + du, v + dv) - r(u, v) = \Delta r$, $\overrightarrow{MP'} = r'_u du + r'_v dv = dr$ 分别是函数 r 的增量和增量的线性主部——微分.

可以证明 Δr 与 dr 相差的是比 $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$ 更高阶的无穷小量 ($\rho \rightarrow 0$). 事实上, 由 r 可微的定义知, 其三个分量函数 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 都是可微的, 因此

$$\begin{aligned} \Delta r &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + o(\rho), \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + o(\rho), \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + o(\rho) \right) \\ &= r'_u du + r'_v dv + (o(\rho), o(\rho), o(\rho)) \\ &= dr + (o(\rho), o(\rho), o(\rho)). \end{aligned}$$

如果用模长表示, 上式就变为

$$|\Delta r - dr| = o(\rho).$$

上述微元分析法对将来计算曲面的面积是有很大帮助的. 曲面上的一小块曲边四边形 $MNPQ$ 可以用切平面上的平行四边形 $MN'P'Q'$ 来近似, 而后者的面积是

$$|r'_u du \times r'_v dv| = |r'_u \times r'_v| dudv.$$

这就是曲面的面积微元.

如同曲线的弧长微元的积分是弧长, 曲面的面积微元的积分就是曲面的面积, 详见第 7 章 7.3.3 小节.

注 6.6.1 设曲面 S 由二元向量值函数

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

确定. 映射 r 将 D 映为曲面 S , 它在 $(u_0, v_0) \in D$ 处的微分为线性映射

$$T(h, k) = r'_u(u_0, v_0)h + r'_v(u_0, v_0)k.$$

注意, $r'_u(u_0, v_0)$ 和 $r'_v(u_0, v_0)$ 是曲面 S 在 $r(u_0, v_0)$ 处的切平面中两个不共线的切向量, 所以

$$r'_u(u_0, v_0)h + r'_v(u_0, v_0)k$$

在该切平面中. 由于 D 在 (u_0, v_0) 处的切平面为 \mathbb{R}^2 , 如果将 (h, k) 看成该切平面中的切向量, 那么 r 的微分是从 D 在 (u_0, v_0) 处的切平面到 S 在 $r(u_0, v_0)$ 处的切平面的映射.

由于微分是从切空间到切空间的映射, 故也可称之为切映射. 对于研究弯曲空

间(流形)之间的映射,切映射是一个基本概念.

6.6.3 隐函数表示的曲面及曲线

设三元函数 $F(x, y, z)$ 为区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的 C^1 函数. 点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ 满足 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 并且

$$(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)) \neq \mathbf{0}.$$

根据隐函数存在定理, F 在 M_0 附近确定了一个连续可微的二元隐函数, 因而在 M_0 附近给出了一张曲面. 我们将由方程

$$F(x, y, z) = 0$$

所确定的曲面称为隐式曲面.

设 Γ 是曲面上过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一条光滑曲线, 其参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

其中 $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. 由于 Γ 在曲面上, 故有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

等式两边对 t 求导, 并取 $t = t_0$, 就得到

$$F'_x(M_0)x'(t_0) + F'_y(M_0)y'(t_0) + F'_z(M_0)z'(t_0) = 0.$$

也就是说, 向量

$$\mathbf{n} = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0))$$

与曲面上任一条过 M_0 的曲线的切向量

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

垂直, 所以向量 \mathbf{n} 就是曲面在 M_0 处的法向量.

显式曲面 $z = f(x, y)$ 可以看做由方程

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

确定的隐式曲面. 因此它的法向量为 $(-f'_x, -f'_y, 1)$, 这与前面得到的结论是一致的.

例 6.6.2 试用不同方法计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在点 (x, y, z) 处的法向量, 并比较所得到的结果.

解 易知, $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ 是球面的隐式方程, 故其法向量为

$$\mathbf{n} = (2x, 2y, 2z) = 2\mathbf{r}.$$

因曲面上 x, y, z 不全为零, 不妨设 $z < 0$. 由方程解得球面在 (x, y, z) 附近的显式方程为

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

再由显式曲面的法向量的求法,得一个法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \\ &= \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) = \frac{1}{z} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

利用球坐标,可用参数方程表示球面:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{r}'_{\theta} \times \mathbf{r}'_{\varphi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & -R \sin \theta \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= R \sin \theta (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = R \sin \theta \mathbf{r}. \end{aligned}$$

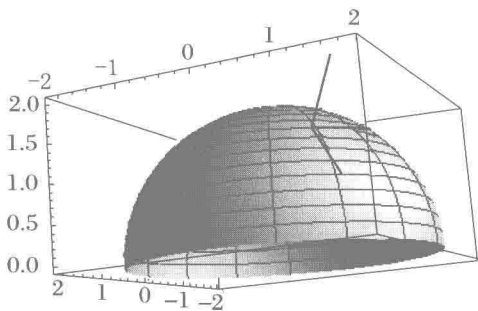


图 6.40 球面的切向量与法向量

由立体几何知识可知,球面上任意一点处的切平面与过该点的半径垂直,从而得知 \mathbf{r} 就是所要求的一个法向量(图 6.40). \square

由以上可知,四种方法所求得的结果是一致的.但用显示方程计算时,要先讨论 x, y, z 的符号,因而比较烦琐;而用参数方程计算时,实际上并未求出 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 时的法向量.为求出球面在两极处的法向量,要改用另

外的参数方程.例如,用参数方程

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \cos s, \quad z = R \sin t \sin s.$$

虽然也可求出结果,但毕竟还要费些笔墨.本题用几何方法显得较为简单,但几何方法往往只能处理一些相对简单的几何对象.相对而言,隐函数方法是比较简洁和明快的,是比较好的方法.

如同直线可以表示为两个平面的交线,空间中的一般曲线也可以表示为两个曲面的交线,即用下面的方程组来表示:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad ((x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3).$$

设 M_0 为交线上的一点,则交线在 M_0 处的切向量与两个曲面 $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ 在 M_0 处的法向量都垂直,从而

$(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)) \times (G'_x(M_0), G'_y(M_0), G'_z(M_0))$
为交线在 M_0 处的一个切向量.

例 6.6.3 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases}$$

在 $M_0(a, a, \sqrt{2}a)$ 处的切线和法平面方程, 其中 $a \neq 0$.

解 方程组表示的曲线是球面与柱面的交线(图 6.41). 记

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2,$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ax.$$

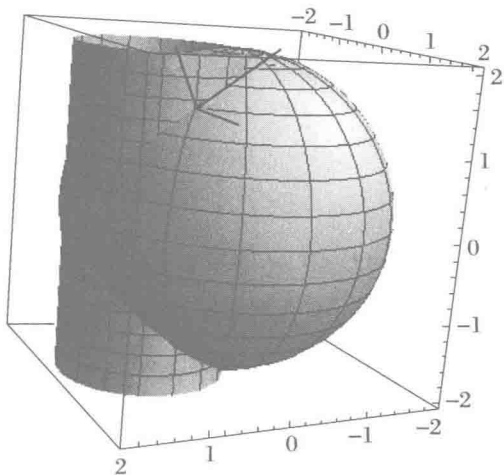


图 6.41 球面与柱面交线的切线

球面 $F(x, y, z) = 0$ 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = (F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)) = (2a, 2a, 2\sqrt{2}a);$$

而柱面 $G(x, y, z) = 0$ 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_2 = (G'_x(M_0), G'_y(M_0), G'_z(M_0)) = (0, 2a, 0).$$

由此, 曲线在 M_0 处的一个切向量为

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-4\sqrt{2}a^2, 0, 4a^2).$$

从而, 所求的切线方程是

$$\frac{x-a}{-\sqrt{2}} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\sqrt{2}a}{1},$$

所求的法平面方程是

$$-\sqrt{2}(x-a) + 0(y-a) + (z-\sqrt{2}a) = 0,$$

即 $\sqrt{2}x - z = 0$.

□

习题 6.6

1. 设 $r = (a \sin t, -a \cos t, bt^2)$ (a, b 是常数), 求 $r'(t)$ 和 $r''(t)$.
2. 设 $r^0(t)$ 是单位向量. 试证明 $\frac{dr^0}{dt} \perp r^0$, 并说明其几何意义.
3. 设 $r(t), r_1(t), r_2(t)$ 均为可微的向量值函数. 证明以下结论:
 - (1) $[r_1(t) + r_2(t)]' = r_1'(t) + r_2'(t)$;
 - (2) 如果 $f(t)$ 可微, 则 $[f(t)r(t)]' = f(t)r'(t) + f'(t)r(t)$;
 - (3) $[r_1(t) \cdot r_2(t)]' = r_1'(t) \cdot r_2(t) + r_1(t) \cdot r_2'(t)$;
 - (4) $[r_1(t) \times r_2(t)]' = r_1'(t) \times r_2(t) + r_1(t) \times r_2'(t)$;
 - (5) 如果 $f(u)$ 可微, 则 $\frac{d}{du}[r(f(u))] = f'(u)r'(f(u))$.
4. 证明: 曲线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 的切线与 z 轴成定角.
5. 设 $r(t) = \left(\frac{t}{1+t}, \frac{1+t}{t}, t^2\right)$ ($t > 0$), 判断它是不是简单曲线, 是不是光滑曲线, 并求出它在 $t=1$ 所给点处的切线方程和法平面方程.
6. 求下列曲线在所给点处的切线与法平面方程:
 - (1) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t, t = \frac{\pi}{4}$;
 - (2) $x = t - \cos t, y = 3 + \sin^2 t, z = 1 + \cos 3t, t = \frac{\pi}{2}$.
7. 求下列曲面在所给点处的切平面与法线方程:
 - (1) $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av, (u_0, v_0)$;
 - (2) $x = a \sin \theta \cos \varphi, y = b \sin \theta \sin \varphi, z = c \cos \theta, (\theta_0, \varphi_0)$.
8. 求下列曲面在指定点处的切平面和法线方程.
 - (1) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, (3, 4, -7)$;
 - (2) $z = \arctan \frac{y}{x}, \left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$;
 - (3) $e^x - z + xy = 3, (2, 1, 0)$;
 - (4) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z, (2, 3, 6)$.

9. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.
10. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使得这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z = 0$, 并写出这个法线方程.
11. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程, 使 π 过已知直线 L :

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}.$$
12. 设直线 $L: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$. 求 a, b 的值.
13. 试证: 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = ax$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = by$ 互相正交.
14. 证明: 曲面 $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ 和 $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ 在点 $(2, -3, 1)$ 处相切 (即有公共的切平面).
15. 证明: 曲面 $z = xe^{\frac{x}{y}}$ 的所有切平面都通过原点.
16. 求下列平面曲线在指定点处的切线和法线方程:
 (1) $x^3y + xy^3 = 3 - x^2y^2, (1, 1)$;
 (2) $\cos xy = x + 2y, (1, 0)$.
17. 求下列曲线在指定点处的切线和法平面方程:
 (1) $\begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}, (1, 3, 4)$;
 (2) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}, (-2, 1, 6)$.

复 习

本章主要内容

1. 平面点集的相关概念: 距离、邻域、开集、闭集、区域、闭域, 内点、外点、边界点、聚点;
2. \mathbb{R}^2 的完备性, 平面点列的极限, 柯西收敛准则;
3. 映射、二元函数与多元函数、向量值函数的概念;
4. 二元函数、多元函数和向量值函数的极限与连续性;

19. 空间曲线、曲面如何用向量值函数表示? 这些向量值函数的微分与曲线、曲面的关系如何?

复习题

1. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - 1}{x - y}, & x > y, \\ 1, & x = y, \\ \frac{\sin x - \sin y}{x - y}, & x < y. \end{cases}$$

讨论 $f(x, y)$ 的连续性.

2. 设 $z = \ln(e^x + e^y)$. 验证:

$$(1) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1;$$

$$(2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

3. 设 $u = f(x, y, z)$, $y = \varphi(x, r)$, $z = h(x, y, r)$. 当把 u 看成 x, r 的复合函数时, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

4. 若 $u = \varphi(x + \psi(y))$, 试证:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5. 若 $u = f(x, y, z)$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 而 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, 试证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

6. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数. 试证:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

7. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数. 证明:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^3}.$$

8. 求下列函数的极值或条件极值:

$$(1) f(x, y) = xy \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

$$(2) f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y) \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(3) u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \text{ 要求 } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a^2}.$$

9. 求函数 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在有界闭域 $x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值和最小值.

10. 求平面 $Ax + By + Cz = 0$ (A, B, C 都不为零) 与柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 相交所成的椭圆的面积.

11. 求抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.

12. 证明: 曲面 $F(nx - lz, ny - mz) = 0$ 上任意一点的切平面都平行于直线 $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

13. 已知曲面 $e^{2x-z} = f(\pi y - \sqrt{2}z)$, 其中 f 可微. 证明该曲面为柱面.

14. 设曲面 $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$).

(1) 证明: S 上任意点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于 a .

(2) 在 S 上求一切平面, 使得切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最大, 并求四面体体积的最大值.

第 7 章 多变量函数的积分学

在本章中,我们将研究多元函数的积分学.在介绍了二重积分、三重积分后,还将讨论曲线和曲面上的第一型积分和第二型积分.这些概念特别是第二型积分与物理学中的场论有着密切的关系.我们将证明反映单变量函数的微分学和积分学之间相互关系的重要公式——牛顿-莱布尼茨公式在多元函数的情形下仍然成立,但表现形式有所变化.

7.1 二重积分

7.1.1 二重积分的概念和性质

与由曲边梯形面积问题引导出定积分概念一样,由空间曲顶柱体的体积问题就引导出一个新的概念——二重积分.

如图 7.1 所示,为求以平面 Oxy 上一个有界矩形区域 R 为底、 $z = f(x, y)$ 为顶的柱体的体积(不妨设在 R 中, $f(x, y) > 0$),将 R 分割成互不重叠的小矩形块 R_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$),其面积记为 ΔR_{ij} .在 R_{ij} 内任取一点 (x_{ij}^*, y_{ij}^*) ,于是 $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta R_{ij}$ 就是以 R_{ij} 为底、 $f(x, y)$ 为顶的小柱体的近似体积,而所有小矩形上的近似体积之和

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta R_{ij}$$

就是要求的柱体体积的近似值.当 R 的分割越来越细时, σ 的极限就是曲顶柱体的体积.

与分割区间为一些小小区间不同的是,对于一般的平面区域 D ,其分割方式是多种多样的,每个小块是否有面积以及如何计算它们的面积,是建立二重积分定义的最大困难.为了克服这些困难,我们首先仿照图 7.1 的方式,讨论 D 为平面上的矩形区域 R ,并且限定分割的每个小块也是矩形.定义矩形区域上的二重积分.然后,利用对函数作零延拓,讨论一般平面区域上的二重积分.

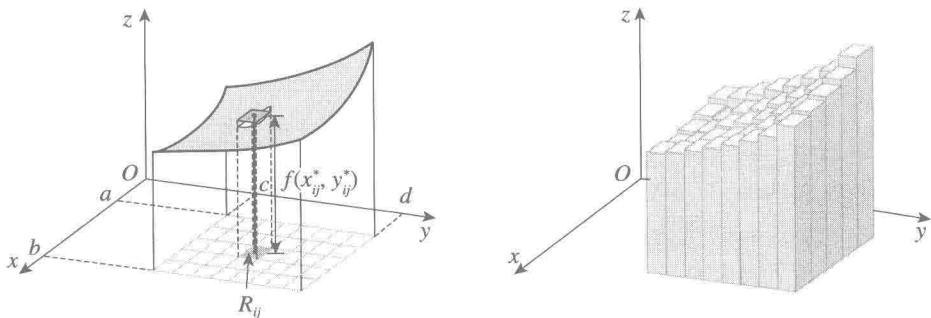


图 7.1 曲顶柱体的体积

定义 7.1.1(矩形区域上的二重积分) 设 $R = [a, b] \times [c, d]$ 是一个二维闭区间, $f(x, y)$ 是 R 上的一个函数. 作 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 的分割:

$$T_x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$T_y: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

两组平行直线 $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 和 $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) 将 R 分割成 $n \times m$ 个二维子区间

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

这样就得到 R 的一个分割 T , 并记 $T = T_x \times T_y$, $\|T\| = \max\{\|T_x\|, \|T_y\|\}$, 称 $\|T\|$ 为分割 T 的宽度.

在 R_{ij} 中, 任意取定一点 $M_{ij}(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), 用 M 表示这样一组取值. 对 $f(x, y)$ 作黎曼和(也称为积分和)

$$S(f, T, M) = \sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$).

如果存在实数 A , 使得对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|T\| < \delta$ 时, 对 $\forall M_{ij}(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$), 都有

$$|S(f, T, M) - A| < \epsilon,$$

则称二元函数 $f(x, y)$ 在二维闭区间 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上黎曼可积, 而

$$A = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

称为 $f(x, y)$ 在 R 上的二重积分, 记为 $\iint_R f(x, y) dx dy$ 或 $\int_R f$. 这里 $f(x, y)$ 称为被积函数, $R = [a, b] \times [c, d]$ 称为积分区间, $f(x, y) dx dy$ 称为被积表达式, $dx dy$ 称为面积元.

利用上述定义, 我们可以给出平面上任一有界集 D 上的二重积分的定义.

定义 7.1.2 (平面区域上的二重积分) 设 $f(x, y)$ 是有界集 D 上的一个函数. 取二维闭区间 $R \supset D$, 作 $f(x, y)$ 的零延拓 $f_D(x, y)$, 即

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

如果 $f_D(x, y)$ 在 R 上可积, 则称 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 并称 $\iint_R f_D(x, y) dx dy$ 为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分, 记为 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 或 $\int_D f$.

注意, 上述定义中的二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 与闭区间 R 的选取无关. 这是因为: 如果 R_1, R_2 是包含 D 的任意两个闭区间, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是包含 D 的闭区间, 从而有

$$\iint_{R_1} f_D(x, y) dx dy = \iint_{R_1 \cap R_2} f_D(x, y) dx dy = \iint_{R_2} f_D(x, y) dx dy.$$

利用二重积分, 可以给出一个有界集有面积的定义.

定义 7.1.3 (有界集的面积) 设 D 是有界的平面点集. 如果 D 上的取值为 1 的常值函数可积, 则称 D 是有面积的, 并称 $S_D = \iint_D 1 dx dy$ 为 D 的面积.

利用可积性来定义平面点集有面积是比较抽象的, 传统的做法是通过定义内面积和外面积来处理的, 相对直观一点. 考虑到本书的阅读对象, 我们并不打算详细研究如何建立二重积分的理论, 而只是提供一个可行的且相对严谨的思路, 我们将略去几乎所有证明. 这是因为其中有些证明与定积分的情形是类似的, 而有些则涉及可积性的讨论或点集的面积, 严格的论证会相当困难, 超出了本书的范围. 例如, 我们有下面的定理:

定理 7.1.1 有界平面点集 D 有面积的充要条件是 ∂D 的面积为零. 特别地, 由有限条分段光滑曲线围成的区域或闭域是有面积的.

为了保证性质较好的函数(例如常值函数)在点集 D 上可积, 我们需要假设 D

是有面积的有界点集. 今后, 如果不作特殊声明, 我们总是假设积分域 D 是由有限多条分段光滑曲线围成的区域或闭域.

下面的定理给出了一个函数可积的一些必要或充分条件.

定理 7.1.2 设 D 是由有限多条分段光滑曲线围成的有界区域, $f(x, y)$ 是 D 上的函数.

(1) 若 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 则 $f(x, y)$ 为 D 上的有界函数;

(2) 若有界函数 $f(x, y)$ 的不连续点分布在 D 中的有限条光滑曲线上, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积;

(3) 若有界函数 $f(x, y), g(x, y)$ 也是 D 上的函数, 且使得 $f(x, y) \neq g(x, y)$ 的点分布在有限条光滑曲线上, 则 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 在 D 上有相同的可积性. 当它们可积时, 有

$$\int_D f = \int_D g.$$

注 7.1.1 由定理 7.1.2(3) 知, 若区域 D 由有限多条分段光滑曲线围成, 则任意改变函数在边界上的取值, 并不会改变函数的可积性和积分的值. 因此, 在区域 D 上的积分和在闭域 \bar{D} 上的积分是一样的.

同定积分类似, 二重积分有下列运算性质:

定理 7.1.3 设 D 是由有限多条分段光滑曲线围成的有界区域, $f(x, y), g(x, y)$ 在 D 上可积.

(1) (线性性) 对任意常数 c_1 和 c_2 , $c_1f + c_2g$ 在 D 上可积, 且

$$\int_D (c_1f + c_2g) = c_1 \int_D f + c_2 \int_D g.$$

(2) (乘积) $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的乘积 $f(x, y)g(x, y)$ 在 D 上可积.

(3) (保序性) 若在 D 上 $f(x, y) \geq g(x, y)$, 则 $\int_D f \geq \int_D g$.

(4) (绝对可积性) 可积函数 $f(x, y)$ 的绝对值函数 $|f(x, y)|$ 在 D 上可积, 且

$$\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|.$$

(5) (对区域的可加性) 设 D_1, D_2 是由有限多条分段光滑曲线围成的有界区域, 且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. 若函数 $h(x, y)$ 在 D_1, D_2 上均可积, 则 $h(x, y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上可积, 且

$$\int_{D_1 \cup D_2} h = \int_{D_1} h + \int_{D_2} h.$$

(6) (积分中值定理) 若 $f(x, y)$ 在闭域 \bar{D} 中连续, 则存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$\int_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S_D,$$

其中 S_D 表示 D 的面积.

尽管二重积分与定积分十分类似,但是从定义的引入就可以看出二重积分比定积分要复杂很多,其根本原因是以前没有平面子集的面积概念的确切定义.我们采用的方法是,首先定义矩形区域上矩形分割下的积分,然后定义一般有界子集上的积分,并利用积分来定义面积.当平面点集的面积有了确切定义以后,可以证明如下定理:

定理 7.1.4 设 D 为有面积的有界平面点集, $f(x, y)$ 为 D 上的函数,那么 $f(x, y)$ 在 D 上可积且积分等于 A 的充要条件是,对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 若将 D 分割为有限个内部互不相交的有面积的小块 D_1, D_2, \dots, D_n , 记 $\lambda_i = \sup_{M_i, N_i \in D_i} |M_i - N_i|$ ($M_i, N_i \in D_i$) 为 D_i 的直径, 只要分割的宽度 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ 满足 $\lambda < \delta$, 那么对于 $\forall (x_i, y_i) \in D_i$ ($1 \leq i \leq n$), 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta D_i - A \right| < \epsilon.$$

这个定理为我们运用积分解决理论和实际问题提供了方便,例如,利用变量代换法计算二重积分以及利用微元分析法解决实际问题.

7.1.2 二重积分的累次积分法

我们首先考虑矩形区域上的二重积分. 设函数 $f(x, y)$ 在二维闭区间 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上可积. 如果把二重积分 $\iint_R f(x, y) dx dy$ 看做是以平面区域 R 为底、 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积, 那么

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy$$

就是用平面 $x = x_0$ 去截这个柱体所得到的截面面积(图 7.2). 于是, 曲顶柱体的体积可以用截面面积的定积分表示为

$$V = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

这就是下面的富比尼(G. Fubini, 1879~1943)定理, 即二重积分的累次积分法:

定理 7.1.5 (富比尼定理) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区间 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上可积.

(1) 如果对每个 $y \in [c, d]$, $f(x, y)$ 作为 x 的函数在 $[a, b]$ 上可积, 记 $\varphi(y)$

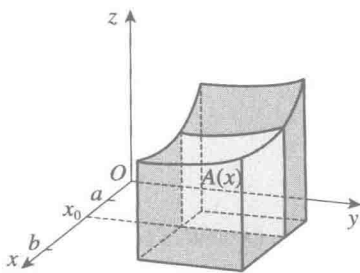


图 7.2 二重积分的累次积分法

下面来讨论积分区域是曲边梯形的情形. 设 I 型区域 D 是由曲线 $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ 和直线 $x = a, x = b$ 所围成的, 即

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

I 型区域 D 的形状如图 7.4 所示.

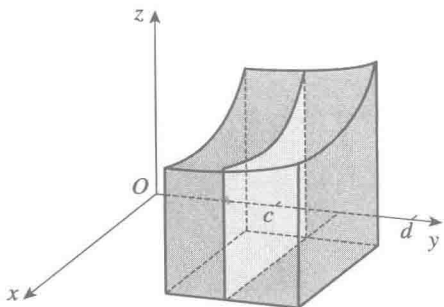


图 7.3 富比尼定理

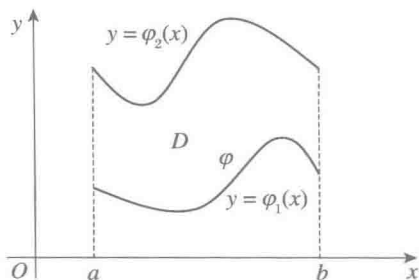


图 7.4 I 型区域

定理 7.1.6 设

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\},$$

其中 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 为连续函数. 函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 且对于 $\forall x \in [a, b]$,

积分 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ 存在, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

证明 作闭区间 $R = [a, b] \times [c, d]$, 使得 $D \subset R$ (图 7.5). 令

$$f_D(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

在 R 上对 $f_D(x, y)$ 使用定理 7.1.5, 得

$$\iint_D f_D(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_D(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

从而定理得证. \square

类似地, 可以证明下述定理:

定理 7.1.7 设 $D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$ (称为 II 型区域, 见图 7.6), 其中 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 为连续函数. 函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 且对于

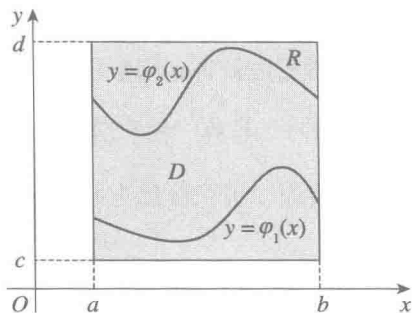


图 7.5 I 型区域 D 与闭区间 R

$\forall y \in [c, d]$, 积分 $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$ 存在, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

对应于定理 7.1.6 证明中的闭区间 R , 该定理的证明中用到的闭区间 R 如图 7.7 所示. 证明细节请读者补充完整.

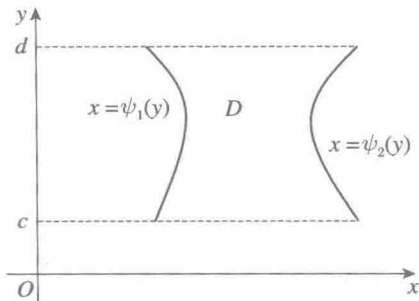


图 7.6 II 型区域

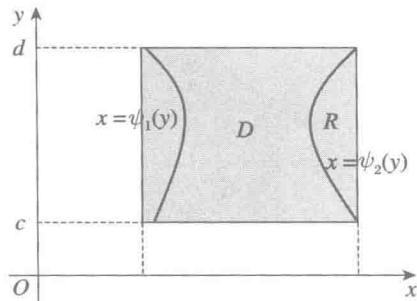


图 7.7 II 型区域 D 与闭区间 R

当积分区域 D 不是曲边梯形时, 利用积分对区域的可加性, 可以把 D 分成有限个互不相交的曲边梯形区域之并, 在每个小区域上用相应的累次积分来求积分, 再将积分值相加就得到函数在 D 上的积分.

例 7.1.1 计算二重积分 $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$, 其中 $D = [3, 4] \times [1, 2]$.

解 将原二重积分化为累次积分:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} \right] dy.$$

先求出里面关于变量 x 的积分, 此时变量 y 是固定的:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y} \Big|_3^4 = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4},$$

于是

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right) dy = \ln \frac{25}{24}. \quad \square$$

例 7.1.2 计算二重积分 $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, 其中 D 是由 $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $x = a$ 三条直线围成的.

解 方法1 对 $\forall x \in [0, a], y \in [0, \frac{b}{a}x]$ (图 7.8), 于是有

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} x^2 y^2 dy = \int_0^a x^2 \left(\frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{b}{a}x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} \int_0^a x^5 dx = \frac{1}{18} a^3 b^3. \end{aligned}$$

方法2 对 $\forall y \in [0, b], x \in [\frac{a}{b}y, a]$ (图 7.9), 于是有

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \int_0^b dy \int_{\frac{a}{b}y}^a x^2 y^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^b y^2 \left(a^3 - \frac{a^3}{b^3} y^3 \right) dy \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a^3}{3} y^3 - \frac{a^3}{6b^3} y^6 \right) \Big|_0^b = \frac{1}{18} a^3 b^3. \end{aligned}$$

□

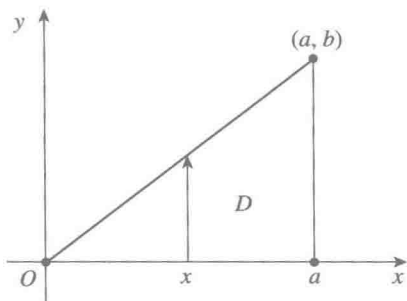


图 7.8 例 7.1.2 中方法 1 的积分顺序

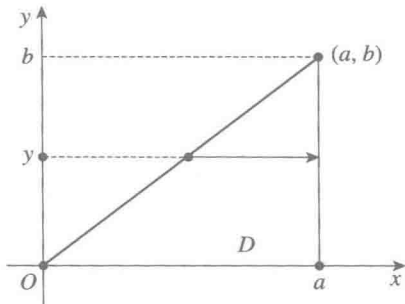


图 7.9 例 7.1.2 中方法 2 的积分顺序

例 7.1.3 计算累次积分 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.

解 由于 $\frac{\sin y}{y}$ 的原函数是不能用初等函数表达的, 所以, 按照题中顺序求累次积分是计算不出来的. 我们自然想到先将累次积分变回二重积分, 再改变累次积分的顺序, 试一试能否算出. 由此先确定积分区域 D . 由条件可知, D 由直线 $x=0, x=1, x=y$ 及曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围成 (图 7.10).

综上, 可将累次积分的顺序改变为如下的顺序来计算:

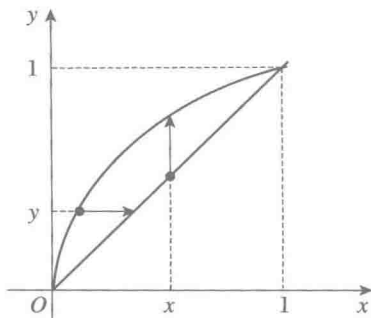


图 7.10 例 7.1.3 中的积分区域

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy &= \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_{y^2}^y dx \\
 &= \int_0^1 (y - y^2) \frac{\sin y}{y} dy \\
 &= \int_0^1 (1 - y) \sin y dy = \int_0^1 (1 - y) d(-\cos y) \\
 &= (1 - y)(-\cos y) \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos y d(1 - y) \\
 &= 1 - \sin y \Big|_0^1 = 1 - \sin 1. \quad \square
 \end{aligned}$$

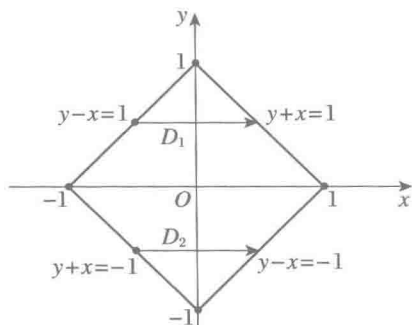


图 7.11 例 7.1.4 中的积分区域

这个例题说明了正确选择积分顺序的重要性. 有时候, 利用积分区域的几何对称性和被积函数的奇偶性, 也可简化二重积分的计算.

例 7.1.4 计算二重积分 $\iint_D xy^2 dx dy$,

其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

解 如图 7.11 所示, 积分区域 D 是一个正方形, 横坐标轴将 D 分成上下两个对称的区域 D_1 和 D_2 , 则

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy^2 dx dy &= \iint_{D_1} xy^2 dx dy + \iint_{D_2} xy^2 dx dy \\
 &= \int_0^1 y^2 dy \int_{y-1}^{1-y} x dx + \int_{-1}^0 y^2 dy \int_{-y-1}^{1+y} x dx \\
 &= \int_0^1 y^2 \cdot 0 dy + \int_{-1}^0 y^2 \cdot 0 dy \quad (\text{因 } x \text{ 是奇函数}) \\
 &= 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

事实上, 由于被积函数 $f(x, y) = xy^2$ 关于自变量 x 是奇函数, 而积分区域关于 y 轴是对称的, 利用积分的定义不难得出 $\iint_D xy^2 dx dy = 0$.

例 7.1.5 计算由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $x^2 + z^2 = a^2$ 所围成的立体的体积 V .

解 从图 7.12 和 7.13 看出, 这个立体在第一卦限的部分是一个曲顶柱体, 其顶为 $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, 底是平面区域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$). 由对称性可知

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{a^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \\
 &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3.
 \end{aligned}$$

□

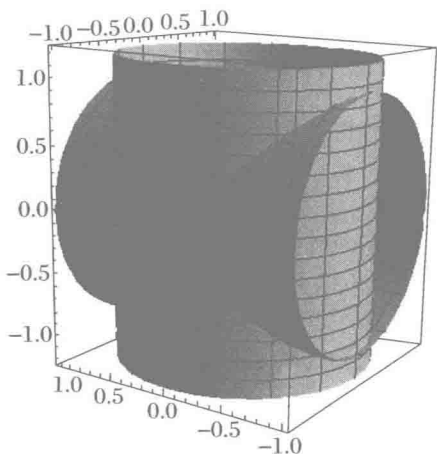


图 7.12 两个圆柱面相交

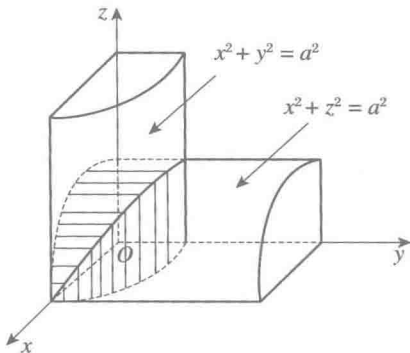


图 7.13 两个圆柱面相交的体积

从以上例子我们可以看出,计算二重积分的最基本的步骤就是根据积分区域 D 确定累次积分的积分限.这也是初学者不易掌握和容易出错的地方.作出积分区域 D 的图像可以给我们提供非常直观的认识,减少出错率,因此切不可忽视作图.

必须熟练地掌握确定累次积分的积分限的方法,它是计算重积分的基础.

7.1.3 二重积分的变量代换

在学习定积分时,我们已经知道可以利用换元法来计算定积分.类似地,在二重积分的计算中也可以用换元法.

首先我们来看下面的例子:

例 7.1.6 计算积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是以原点为圆心的单位圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$.

解 原积分表示的是圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 1$ 挖去锥体 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 后所余立体的体积(图 7.14),因此用几何方法是很容易将这个数值算出来的,即

$$V = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi. \quad \square$$

下面用累次积分法计算这个积分. 由于积分区域和被积函数关于 x, y 都是对称的, 所以采用任何一种积分次序, 计算方法都将是同样的. 然而

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \\ &= 2 \int_0^1 [y \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})] \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} + x^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right) dx = \dots, \end{aligned}$$

再往下计算将十分复杂, 应考虑别的简便方法.

在上例中, 积分区域是圆盘, 被积函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在圆周 $x^2 + y^2 = r$ 上都取相同的值, 但我们的积分计算却是相对于矩形分割的累次积分. 是否可以考虑利用极坐标的坐标曲线来分割积分区域呢? 设

$$D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

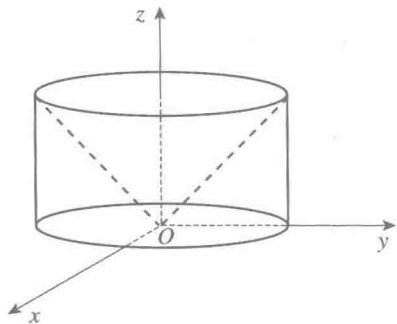


图 7.14 圆柱与圆锥

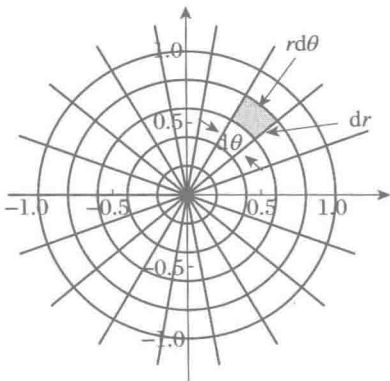


图 7.15 极坐标下的分割

极坐标变换 $\Phi: D' \rightarrow D$ 定义为

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

如图 7.15 所示, 考虑 D' 中平行于坐标轴的分割:

$$T_r: 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = 1,$$

$$T_\theta: 0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = 2\pi.$$

直线段 $r = r_i$ 和 $\theta = \theta_j$ 在映射 Φ 下的像为 D 中的 θ 曲线和 r 曲线. 这些曲线给出了 D 的一个分割 $T: D_{ij} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, 其中

$$D_{ij} = \Phi([r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]).$$

不难看出,如果 T_r, T_θ 的宽度很小,则 T 的宽度也很小.令

$$M_{ij} = \Phi(r_i, \theta_j) = (r_i \cos \theta_j, r_i \sin \theta_j) \in D_{ij}.$$

根据定理 7.1.4 知,黎曼和 $\sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta D_{ij}$ 的极限为 $\iint_D f(x, y) dx dy$.

如何计算 ΔD_{ij} ? 当分割的宽度很小时, D_{ij} 近似于一个矩形,它相邻两边的长是 Δr_i 和 $r_i \Delta \theta_j$,因此小区域 D_{ij} 的面积 $\Delta D_{ij} \approx r_i \Delta r_i \Delta \theta_j$,从而有

$$\sum_{i,j} f(M_{ij}) \Delta D_{ij} \approx \sum_{i,j} f(r_i \cos \theta_j, r_i \sin \theta_j) r_i \Delta r_i \Delta \theta_j.$$

上式的右边是函数 $f(r \cos \theta, r \sin \theta) r$ 在区域 D' 上的黎曼和.因此,我们得到了

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (7.1.2)$$

这就是从直角坐标变换成极坐标时的二重积分的计算公式,式中 $r dr d\theta$ 是极坐标下的面积元.

现在利用公式(7.1.2)来重新计算例 7.1.6:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D'} r \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3} \pi.$$

可见在极坐标下计算是何等地简单.

注意,公式(7.1.2)并非只适用于圆盘区域,后面我们会作更加详细的讨论.现在我们将这个公式推广到一般的坐标变换.事实上,前面的分析过程对于一般的坐标变换也是适用的,只是在计算面积微元 ΔD_{ij} 时利用了极坐标的一些特性.下面我们来分析如何对一般坐标变换来计算面积微元.

设 D 为平面 Oxy 上的有界区域, $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数. D' 为平面 Ouv 上的有界区域, $\Phi: D' \rightarrow D$ 为一一的 C^1 映射(坐标变换),并且 Φ 的雅可比行列式 $\det J\Phi \neq 0$. 记

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

则 $f(x(u, v), y(u, v))$ 为 D' 上的可积函数.

注意,平面区域 D 可以看做是特殊的曲面,其向径式方程是

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), 0) \quad ((u, v) \in D').$$

在 D' 中作平行于 u, v 坐标轴的分割(图 7.16):

$$T_u: a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b,$$

$$T_v: c = v_0 < v_1 < \cdots < v_m = d.$$

线段 $u = u_i$ 和 $v = v_j$ 在映射 Φ 下的像分别为 D 中的 v 曲线和 u 曲线.这些曲线给出了 D 的一个分割 $T: D_{ij} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$, 其中

$$D_{ij} = \Phi([u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]).$$

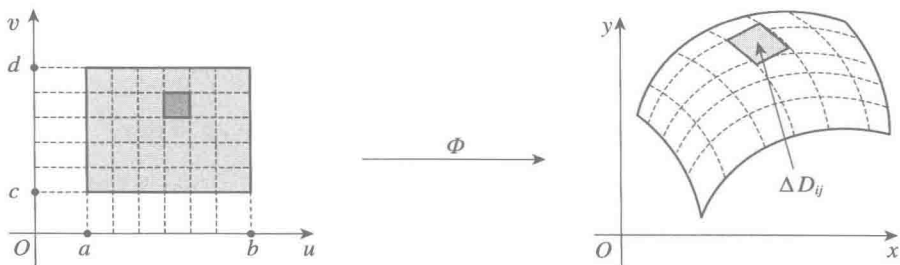


图 7.16 一般坐标变换下的分割

利用第 6 章 6.6 节的分析, 可知当 $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ 和 $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$ 充分小时, D_{ij} 的面积 $\Delta D_{ij} \approx |r'_u \times r'_v| \Delta u_i \Delta v_j$. 而

$$|r'_u \times r'_v| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|,$$

因此

$$\Delta D_{ij} \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j. \quad (7.1.3)$$

记 $(x_{ij}, y_{ij}) = \Phi(u_i, v_j) = (x(u_i, v_j), y(u_i, v_j))$, 则

$$\sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta D_{ij} \approx \sum_{i,j} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j.$$

上式的两边分别为积分

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

的黎曼和, 取极限即可得如下定理:

定理 7.1.8 设 D, D' 为由分段光滑曲线围成的区域, $\Phi: D' \rightarrow D, \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ 为 C^1 的一一映射, 且 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. 若 $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (7.1.4)$$

注 7.1.2 (1) 上述定理的证明过程不是十分严格. 例如, 当 D' 不是矩形区域时, D' 的分割元素并不都是矩形. 但当分割很细时, 不是矩形的分割元素所占的比

例是很小的,所以对求和的影响不大.

(2) 等式(7.1.3)说明了区域 D 的面积元素 $dx dy$ 与 D' 的面积元素 $du dv$ 之间有如下关系:

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (7.1.5)$$

(3) 如果变换为极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

因此

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

这与前面得到的公式是一致的.

若区域 D 由极坐标曲线 $\theta = \alpha, \theta = \beta, r = r_1(\theta)$ 和 $r = r_2(\theta)$ ($r_2(\theta) \geq r_1(\theta)$) 围成, 那么 D' 就是平面 $O'r\theta$ 上的区域 $D' = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$ (图 7.17). 于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \end{aligned}$$

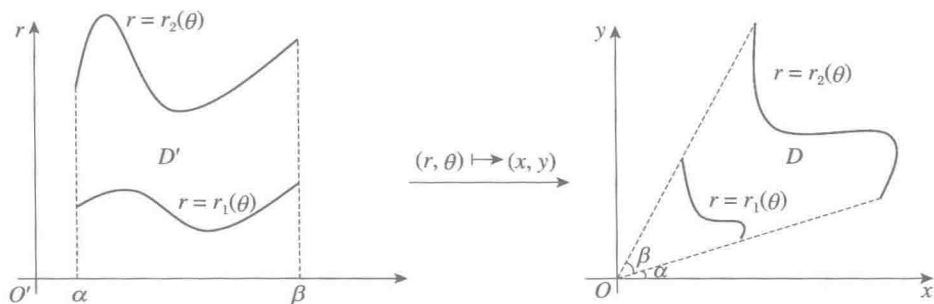


图 7.17 极坐标系与直角坐标系

如果原点在区域 D 的边界上或在 D 中, ∂D 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, 则把原点当成退化曲线 $r = r_1(\theta) \equiv 0$.

例 7.1.7 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 为由 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ($y > 0$), $(x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2$ ($y > 0$) 和 $y = x$ 围成的区域(图 7.18 中, $a = 1$).

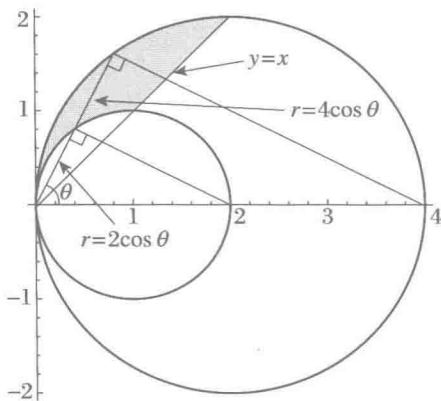


图 7.18 例 7.1.7 中的积分区域

解 作极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 从而把区域 D 的边界曲线方程化为极坐标方程 $r = 2a \cos \theta$, $r = 4a \cos \theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, 所以, 区域 D 变为 D' : $2a \cos \theta \leq r \leq 4a \cos \theta$ ($\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). 因此

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{D'} r \cdot r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a \cos \theta}^{4a \cos \theta} r^2 dr \\ &= \frac{56}{3} a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{112 - 70\sqrt{2}}{9} a^3. \quad \square \end{aligned}$$

例 7.1.8 求球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$ 相交部分的体积.

解 两个球体表面的交线满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} z = \frac{R}{2}, \\ x^2 + y^2 = \frac{3R^2}{4}. \end{cases}$$

由图 7.19 和 7.20 ($R = 1$) 容易看出, 体积 V 等于以 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($x^2 + y^2 \leq \frac{3R^2}{4}$) 为顶的曲顶柱体体积 V_1 与以 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$

$(x^2 + y^2 \leq \frac{3R^2}{4})$ 为顶的曲顶柱体体积 V_2 之差, 即

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3R^2}{4}} (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} (2\sqrt{R^2 - r^2} - R) r dr = \frac{5}{12}\pi R^3. \end{aligned} \quad \square$$

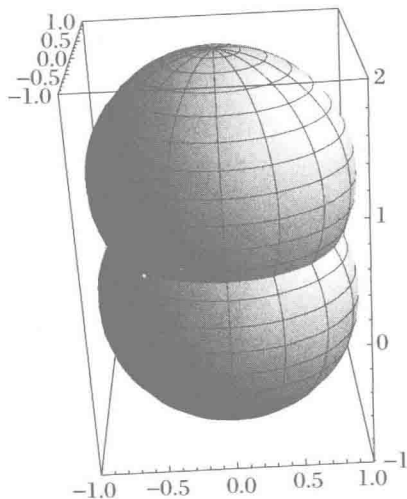


图 7.19 两个球面相交

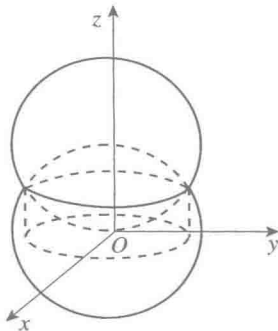


图 7.20 例 7.1.8 中的积分区域

例 7.1.9 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0, a > 0$) 围成的区域 (图 7.21 中, $a = 1$).

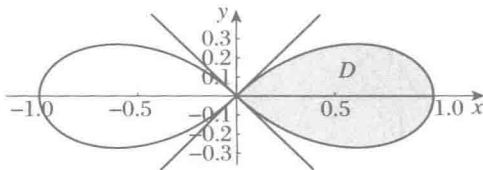


图 7.21 例 7.1.9 中的积分区域

解 作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则双纽线的极坐标方程为 $r = a \sqrt{\cos 2\theta}$ ($-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$). 由于区域和被积函数关于 x 轴对称, 故

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{16}. \end{aligned}$$

例 7.1.10 计算二重积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

解 利用极坐标变换,有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

利用例 7.1.10 的结果,可以求出一个重要的广义积分,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

的值.具体过程如下:

我们有

$$\left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

其中 $D = \{(x, y) \mid -R \leq x, y \leq R\}$. 由 $e^{-x^2-y^2} > 0$ 及积分区域的包含关系(图 7.22),可知

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 2R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

利用例 7.1.10 的结果,得

$$\begin{aligned} \pi(1 - e^{-R^2}) &\leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &\leq \pi(1 - e^{-2R^2}). \end{aligned}$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \text{或} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这个积分称为概率积分.

例 7.1.11 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

的体积.

解 原椭球体被平面 Oxy 截成对称的两个半椭球,因此

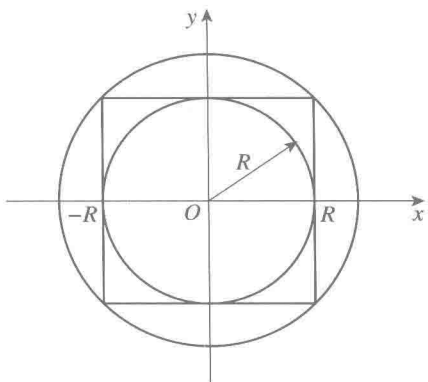


图 7.22 积分区域 D 及其包含关系

$$V = 2 \iint_D z dx dy = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

其中积分区域 D 是平面 Oxy 上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 作代换

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta,$$

则区域 $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 被映成椭圆 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, 其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = abr,$$

从而得

$$V = 2c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi abc. \quad \square$$

如果 $a = b = c = R$, 就得到半径为 R 的球的体积为 $\frac{4}{3} \pi R^3$.

例 7.1.12 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的面积.

解 星形线的参数方程为

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

如这里把 a 换成 r ($0 \leq r \leq a$), 则得到一族相似星形线

$$x = r \cos^3 t, \quad y = r \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

并充满原星形线所围成的整个区域. 因此, 我们作代换

$$x = r \cos^3 t, \quad y = r \sin^3 t,$$

则区域 $D': 0 \leq r \leq a, 0 \leq t \leq 2\pi$ 被映成区域 $D: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$, 其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = 3r \sin^2 t \cos^2 t.$$

利用对称性, 可得

$$\begin{aligned} S &= \iint_D 1 dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^a 3r \sin^2 t \cos^2 t dr \\ &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned} \quad \square$$

例 7.1.13 计算二重积分 $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=0, y=0$ 和 $x+y=1$ 所围成的区域.

解 为了有理化被积函数, 作变量代换

$$x = r^2 \cos^2 t, \quad y = r^2 \sin^2 t.$$

此代换把区域 $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 映成区域 D , 其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = 4r^3 \sin t \cos t.$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{y}) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 r (\cos t + \sin t) 4r^3 \sin t \cos t dr \\ &= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t + \cos^2 t \sin t) dt = \frac{8}{15}. \quad \square \end{aligned}$$

例 7.1.14 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由抛物线 $y^2 = x, y^2 = 4x$ 和 $x^2 = y, x^2 = 4y$ 所围成的区域.

解 在积分区域 D (图 7.23) 中引入两族抛物线:

$$y^2 = ux, \quad x^2 = vy,$$

则当 u 从 1 变到 4, v 从 1 变到 4 时, 这两族抛物线分别扫过整个区域 D . 因此变换

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y}$$

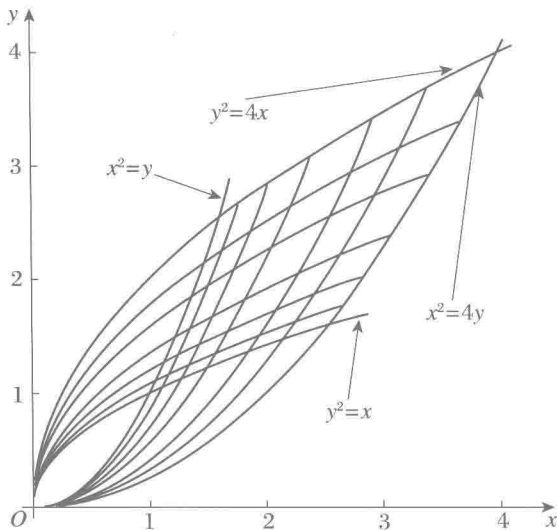


图 7.23 两族抛物线所围成的区域

把区域 D 一一映成区域 $D': 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4$. 从这个变换式得到其逆变换

$$x = (uv^2)^{\frac{1}{3}}, \quad y = (u^2v)^{\frac{1}{3}},$$

其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{3}.$$

因此

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D'} uv \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_1^4 u du \int_1^4 v dv = \frac{75}{4}. \quad \square$$

7.1.4 广义二重积分*

二重积分要求积分区域是有界集, 被积函数是有界函数, 但在实际问题中, 又往往会遇到不满足以上条件的情形. 因此, 正如从定积分推广到广义积分一样, 我们也可讨论无界集上的二重积分和无界函数的二重积分, 这些统称为广义(或反常)二重积分. 由于广义二重积分的复杂性, 我们在这里仅引进常见的绝对收敛的广义二重积分的概念, 且不作深入的讨论.

定义 7.1.4(瑕积分与无穷积分) (1) 设 $f(x, y)$ 是定义在有界区域 D 及其边界 ∂D 上的非负函数. 在 ∂D 上某些点的邻域中, $f(x, y)$ 无界, 这种点叫做函数的瑕点. 假定 $f(x, y)$ 在 D 内的任何闭区域上可积, 作 D 中任一有界闭域列 $\{D_n\}$, 使得 $D_n \subset D_{n+1}$ 及 $\bigcup_n D_n = D$. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

存在且有限, 并且与闭域列 $\{D_n\}$ 的取法无关, 那么称瑕积分(或广义积分)

$\iint_D f(x, y) dx dy$ 是收敛的, 并规定瑕积分的值为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy;$$

否则, 称 $f(x, y)$ 在 D 上的瑕积分(或广义积分)发散.

(2) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个无界闭区域, $f(x, y)$ 是定义在 D 上的非负函数, 且在 D 内的任意有界闭区域上可积. 作 D 中任一有界闭域列 $\{D_n\}$, 使得 $D_n \subset D_{n+1}$ 及 $\bigcup_n D_n = D$. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

存在且有限,并且与闭域列 $\{D_n\}$ 的取法无关,那么称无穷积分(或广义积分)

$\iint_D f(x, y) dx dy$ 是收敛的,并规定无穷积分的值为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

否则,称 $f(x, y)$ 在 D 上的无穷积分(或广义积分)发散.

定义 7.1.5(广义积分的绝对收敛) 在 $f(x, y)$ 可正可负的情形下,令

$$p(x, y) = \frac{1}{2}[|f(x, y)| + f(x, y)],$$

$$q(x, y) = \frac{1}{2}[|f(x, y)| - f(x, y)].$$

(1) 若 $p(x, y)$ 和 $q(x, y)$ 在 D 上的瑕积分都收敛,则称 $f(x, y)$ 在 D 上的瑕积分(或广义积分)绝对收敛,并规定瑕积分的值为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D p(x, y) dx dy - \iint_D q(x, y) dx dy.$$

(2) 若 $p(x, y)$ 和 $q(x, y)$ 在 D 上的无穷积分都收敛,则称 $f(x, y)$ 在 D 上的无穷积分(或广义积分)绝对收敛,并规定无穷积分的值为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D p(x, y) dx dy - \iint_D q(x, y) dx dy.$$

例 7.1.15 设 $D = [0, 1] \times [0, 1]$. 计算广义二重积分 $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy$.

解 这是有界区域上无界函数的瑕积分. 令 $D_n = [\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1]$, 则 $D_n \subset D_{n+1}$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $D_n \rightarrow D$, 而

$$\iint_{D_n} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^1 dx \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{x}} dy = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}},$$

因此

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{y}{\sqrt{x}} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1. \quad \square$$

例 7.1.16 设 D 是第一象限. 计算广义二重积分 $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3}$.

解 这是无界区域上有界函数的无穷积分. 令 $D_n = [0, n] \times [0, n]$, 则 $D_n \subset D_{n+1}$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $D_n \rightarrow D$, 而

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} &= \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{(1+x+y)^3} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^n \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+n+x)^2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right),
 \end{aligned}$$

因此

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} dx dy = \frac{1}{2}. \quad \square$$

习题 7.1

1. 根据下列积分区域 D , 把二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化成累次积分, 并确定积分限:

- (1) D 由 $x=a, x=b, y=c, y=c+x$ 围成, 其中 $0 < a < b, c > 0$;
- (2) $D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$;
- (3) $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$;
- (4) D 是由 $y=2x, 2y=x, xy=2$ 围成的第一象限部分.

2. 改变下列积分的顺序:

- (1) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$;
- (2) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy$;
- (3) $\int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$;
- (4) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$.

3. 改变下列积分的顺序, 将之表示成一个累次积分:

- (1) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$;
- (2) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy$;
- (3) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy$;
- (4) $\int_1^2 dx \int_2^{2x} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_x^4 f(x, y) dy$.

4. 利用函数的奇偶性, 计算下列积分:

- (1) $\iint_D x^3 y^3 dx dy, D: x^2 + y^2 \leq R^2$;

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1;$$

$$(3) \iint_D \sin x \sin y dx dy, D \text{ 是由 } x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9 \text{ 围成且含原点的部分};$$

$$(4) \iint_D x^2 y dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0.$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \iint_D x \sin y dx dy, D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$(2) \iint_D \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(3) \iint_D e^{x+y} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(4) \iint_D \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(5) \iint_D \cos(x + y) dx dy, D \text{ 由 } y = \pi, x = y, x = 0 \text{ 围成};$$

$$(6) \iint_D xy^2 dx dy, D \text{ 由 } y^2 = 4x, x = 1 \text{ 围成};$$

$$(7) \iint_D (x + y) dx dy, D \text{ 是第一象限中由 } y^2 + x^2 = a^2 \text{ 围成的部分};$$

$$(8) \iint_D (x + y - 1) dx dy, D \text{ 由 } y = x, y = x + a, y = a, y = 3a \text{ 围成};$$

$$(9) \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy, D \text{ 由 } y = x, x = y^2 \text{ 围成};$$

$$(10) \iint_D x^2 y \cos(xy^2) dx dy, D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2;$$

$$(11) \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, D \text{ 由 } y = x, x = 2, xy = 1 \text{ 围成}.$$

6. 利用变量代换法, 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2;$$

$$(3) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: x^2 + y^2 \leq x + y;$$

(4) $\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, D 是第一象限中由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$, $y = 0$, $y = x$ 围成的部分;

(5) $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq x$.

7. 利用一般曲线坐标代换法, 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, D 是第一象限中由 $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$ 围成的部分;

(2) $\iint_D dx dy$, D 由 $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = my$, $x^2 = ny$ ($a > b > 0$, $m > n > 0$) 围成;

(3) $\iint_D xy dx dy$, D 是第一象限中由 $xy = a$, $xy = b$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$ ($b > a > 0$, $d > c > 0$) 围成的部分;

(4) $\iint_D 4xy dx dy$, D 由 $x^4 + y^4 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 围成;

(5) $\iint_D \sin \frac{y}{x+y} dx dy$, D 由 $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 围成.

8. 求 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy$, 其中 $f(x, y)$ 是连续函数.

9. 求下列曲线所围成的平面区域的面积:

(1) $x^2 + 2y^2 = 3$, $xy = 1$ (不含原点的部分);

(2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

(3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ($a > 0$), $x = 0$, $y = 0$;

(4) $(x - y)^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$);

(5) 由直线 $x + y = a$, $x + y = b$, $y = kx$ 和 $y = mx$ ($0 < a < b$, $0 < k < m$) 围成的平面区域.

10. 证明:

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} e^{x^2 + y^2} dx dy \leq \left(\int_{-\frac{\sqrt{e}}{2}}^{\frac{\sqrt{e}}{2}} e^{x^2} dx \right)^2.$$

11. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 利用二重积分, 证明:

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

12. 证明:

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

13. 计算下列广义积分:

$$(1) \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是单位圆的内部};$$

$$(2) \iint_D \frac{dx dy}{(1 + x + y)^\alpha}, \text{ 其中 } D \text{ 是第一象限, } \alpha \text{ 为常数};$$

$$(3) \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} \cos(x^2 + y^2) dx dy, \text{ 其中 } \mathbb{R}^2 \text{ 是整个平面}.$$

7.2 三重积分

7.2.1 三重积分的概念和性质

我们是通过求曲顶柱体的体积来引入二重积分的. 如果对三重积分也采用类似的方法, 我们发现这就不直观了. 因为三元函数是定义在三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 上的, 它的图像要在四维欧氏空间 \mathbb{R}^4 中表示, 要求四维欧氏空间中几何图形的体积, 几何直观已不存在.

下面我们从一个物理问题来引入三重积分的概念, 我们会发现这一概念的实质同二重积分是一致的.

如图 7.24 所示, 在 \mathbb{R}^3 空间中的一个有界几何体 V 上分布着某种物质, 已知这种物质的密度函数为 $\rho(x, y, z)$, 要求这种物质在 V 上的总质量.

为了解决这一问题, 可将几何体 V 分成互不重叠的小几何体 V_1, V_2, \dots, V_n , 它们的体积分别为 $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$, 在 V_i 内任取一点 (x_i, y_i, z_i) , 于是 $\rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ 就是分布在小几何体 V_i 上的该物质的近似质量, 而 $\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ 就是要求的这种物质的近似质量, 这仍然是一种积分和. V 分割得越密, 积分和越接近于真正的质量. 这样无限加密分割得到的极限, 就是三重积分(图 7.25).

由于三重积分与二重积分在本质上是一样的, 因此我们将只作形式上的说明, 而不作细致的分析.

三维区间是指三维空间中的立方体 $R = I_1 \times I_2 \times I_3$, 其中 $I_i (i = 1, 2, 3)$ 为

区间.

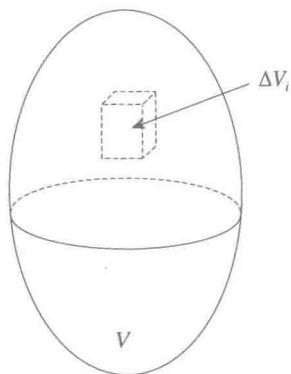


图 7.24 几何体 V 的总质量

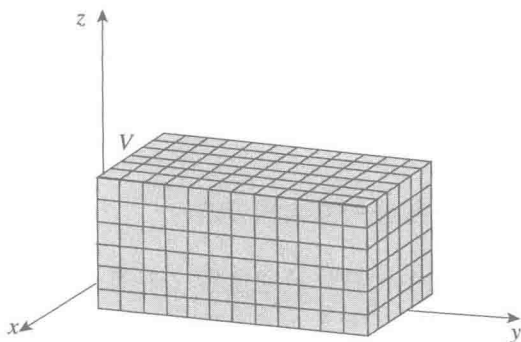


图 7.25 三重积分

定义 7.2.1 设 $f(x, y, z)$ 是定义在有界集 V 上的有界函数. 令

$$f_V(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in V, \\ 0, & (x, y, z) \in V^c. \end{cases}$$

取三维区间 $R \supset V$. 用平行于坐标平面的平面把区间 R 分割成若干个三维区间 R_i , λ 是所有 R_i 直径的最大值. 如果存在常数 A , 使得对于任意的分割和任意的取值 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in R_i$, 都有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i f_V(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = A,$$

则称 $f(x, y, z)$ 在 V 上可积, A 称为 $f(x, y, z)$ 在 V 上的积分, 记为

$$\iiint_V f_V(x, y, z) dx dy dz \quad \text{或} \quad \int_V f.$$

如果有界集 V 上的常值函数 $f(x, y, z) \equiv 1$ 在 V 上可积, 则称 V 是有体积的, 积分 $\int_V f$ 就称为 V 的体积. 可以证明: 若 V 是由有限张光滑曲面围成的有界区域, 则 V 是有体积的. 今后, 不作特殊说明, 我们总是假设三重积分的积分域是由有限张光滑曲面围成的有界区域.

定理 7.2.1 设 V 是 \mathbb{R}^3 中由有限张光滑曲面围成的有界区域, $f(x, y, z)$ 是 V 上的函数.

(1) 若 $f(x, y, z)$ 在 V 上可积, 则 $f(x, y, z)$ 在 V 上有界;

(2) 若函数 $f(x, y, z)$ 在 V 上有界, 且 $f(x, y, z)$ 的不连续点分布在有限张光滑曲面上, 则 $f(x, y, z)$ 在 V 上可积.

注 7.2.1 (1) 三重积分也有类似于定理 7.1.4 的结论.

(2) 在定积分、二重积分、三重积分中都有关于可积性的一些结论, 虽然表述形式有差别, 但是本质上是一样的: 一个有界函数只要连续, 或者虽然不连续但不连续点在定义域中所占的比例“微不足道”, 则它就是可积的.

三重积分和二重积分的性质完全一样, 即定理 7.1.3 对三重积分也是成立的, 不再一一列出.

7.2.2 三重积分的累次积分法

三重积分的计算仍然通过转化为累次积分来计算. 设 $f(x, y, z)$ 在三维区间 $R = I_1 \times I_2 \times I_3$ 上连续, 类似于定理 7.1.5, 有

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{I_1 \times I_2} dx dy \int_{I_3} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{I_1} dx \int_{I_2} dy \int_{I_3} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{I_1} dx \iint_{I_2 \times I_3} f(x, y, z) dy dz. \end{aligned}$$

上式只是给出了在某种次序下的累次积分, 三重积分还有其他积分次序. 根据具体问题选择合适的累次积分次序是十分重要的.

例 7.2.1 求 $\iiint_R x^2 y e^{xyz} dx dy dz$, 其中 $R = [0, 1]^3$.

解 易得

$$\begin{aligned} \iiint_R x^2 y e^{xyz} dx dy dz &= \iint_{[0, 1]^2} x^2 y dx dy \int_0^1 e^{xyz} dz = \iint_{[0, 1]^2} x(e^{xy} - 1) dx dy \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^1 e^{xy} dy - \int_0^1 x dx \int_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (e^x - 1) dx - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

类似于二重积分, 三维区间上的累次积分可以推广到有界区域上.

定理 7.2.2 设 V 为 \mathbb{R}^3 中的有界闭域, $f(x, y, z)$ 是 V 上的连续函数.

(1) 设 V 在平面 Oxy 上的投影为平面区域 D , 而 V 是由曲面

$$z = z_1(x, y), \quad z = z_2(x, y) \quad (z_1(x, y) \leq z_2(x, y), (x, y) \in D),$$

以及以 ∂D 为准线且平行于 z 轴的柱面围成的(图 7.26), 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

(2) 设 V 在 z 轴上的投影为区间 I . 过 I 上一点 $(0, 0, z)$ 与 z 轴垂直的平面与 V 相交的平面图形在平面 Oxy 上的投影为区域 D_z (图 7.27), 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_I dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

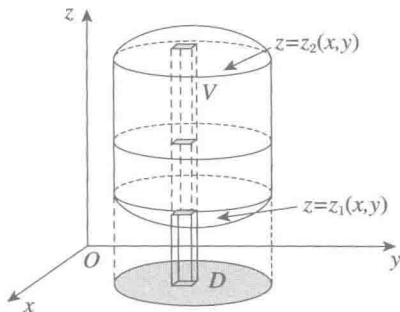


图 7.26 三重积分的切细条法

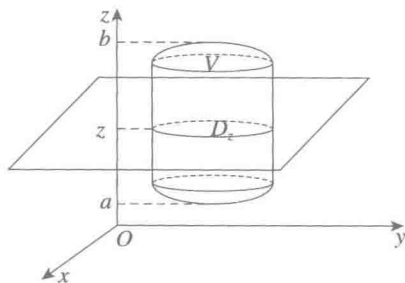


图 7.27 三重积分的切薄片法

区域 V 也可以向其他方向投影, 同样可得到类似的累次积分公式, 不再赘述. 如果区域 V 的表面过于复杂, 还可以作一些辅助曲面把 V 分成有限个子区域, 从而把这些子区域上的三重积分分别化成累次积分来进行计算.

上述定理有一个较为直观的解释. 设 $f(x, y, z)$ 为分布在 V 上的某种物质的密度函数, 则 $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ 表示该物质的质量.

在定理 7.2.2(1) 中, 在 D 中的点 (x, y) 处取面积元 $dA = dx dy$, 以这面积元为底、母线平行于 z 轴的柱体必通过曲面 $z = z_1(x, y)$ 穿入 V 内, 然后通过曲面 $z = z_2(x, y)$ 穿出 V 外, 其穿入点与穿出点的竖坐标分别是 $z_1(x, y)$ 和 $z_2(x, y)$. 区域 V 内分布在这细长柱体上的物质的质量是

$$\left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

当面积元 $dA = dx dy$ 取遍整个区域 D 时, 这些细长柱体质量的总和

$$\iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

就是该物质在 V 上的总质量. 这样就得到了第一个公式. 这种累次积分方法可形象地称为“切细条法”(图 7.26).

在定理 7.2.2(2) 中, 以 D_z 为底、 dz 为高的柱形薄片的质量是

$$\left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

上式关于 z 在 I 上的积分

$$\int_I \left[\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

就是该物质在 V 上的总质量. 这样就得到了第二个公式. 这种累次积分方法可称为“切薄片法”(图 7.27).

例 7.2.2 计算三重积分 $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 V 是由坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 与平面 $x+y+z=1$ 围成的四面体.

解 方法 1 先把四面体投影到坐标面 Oxy 上, 所得到的平面区域 D 是由直线 $x=0, y=0$ 与 $x+y=1$ 所围成的三角形(图 7.28). 过 D 中的任意一点 (x, y) , 作平行于 z 轴的直线, 其穿入 V 内时的交点的竖坐标是 $z=0$, 穿出 V 外时的交点的竖坐标是 $z=1-x-y$, 所以

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \quad \square \end{aligned}$$

方法 2 先把四面体投影到 z 轴上, 所得到的区间为 $[0, 1]$. 过该区间内的点 z 作垂直于 z 轴的平面, 它与 V 相截的平面区域 D_z 是由直线 $x=0, y=0$ 与 $x+y=1-z$ 所围成的三角形(图 7.29). 因此

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dz \iint_{\substack{x+y \leq 1-z \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{dx dy}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} \frac{dy}{(1+x+y+z)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \left[\frac{1}{(1+x+z)^2} - \frac{1}{4} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+z} - \frac{3-z}{4} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

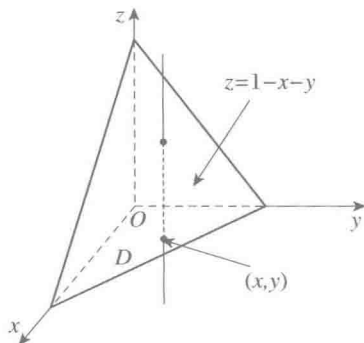


图 7.28 四面体的切细条法

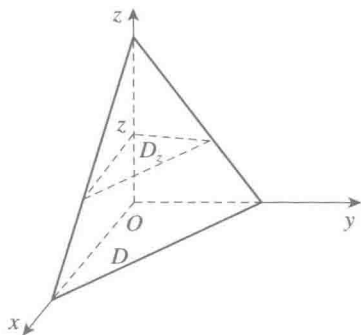


图 7.29 四面体的切薄片法

例 7.2.3 计算三重积分 $I = \iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz$, 其中 V 是椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

解 直接展开原积分, 得

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) dx dy dz.$$

注意到区域 V 关于平面 $x=0$ 对称, 被积函数 $2xy$ 关于 x 是奇函数, 所以

$$\iiint_V 2xy dx dy dz = 0.$$

同理, 有

$$\iiint_V 2xz dx dy dz = \iiint_V 2yz dx dy dz = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \iiint_V x^2 dx dy dz + \iiint_V y^2 dx dy dz + \iiint_V z^2 dx dy dz.
 \end{aligned}$$

把椭球体 V 投影到 z 轴上, 所得到的区间为 $[-c, c]$. 过该区间内的点 z 作垂直于 z 轴的平面, 与 V 相截得一椭圆面 D_z :

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1,$$

其面积为 $\pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$, 所以

$$\iiint_V z^2 dx dy dz = \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy.$$

根据二重积分的几何意义知, $\iint_{D_z} dx dy$ 等于 D_z 的面积. 因此

$$\begin{aligned} \iiint_V z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz \\ &= 2\pi ab \int_0^c \left(z^2 - \frac{z^4}{c^2}\right) dz = \frac{4}{15} \pi abc^3. \end{aligned}$$

由椭球体的变量轮换的对称性有

$$\iiint_V x^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \pi a^3 bc, \quad \iiint_V y^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \pi ab^3 c.$$

最后得

$$I = \iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz = \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + b^2 + c^2). \quad \square$$

在上例的求解过程中, 我们用到了以下一些技巧, 使计算大大简化了:

- 利用积分域的对称性和被积函数的对称性, 只需计算六项积分中的一项.
- 最后选择了对 z 积分, 即

$$\iiint_V z^2 dx dy dz = \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy,$$

是因为一方面被积函数仅是 z 的函数而不依赖于 x 和 y , 另一方面, $\iint_{D_z} dx dy$ 等于积分区域 D_z 的面积.

总之, 在求重积分时, 应同时兼顾到积分区域和被积函数的特点, 合理地选择积分次序, 尽可能简化计算.

7.2.3 三重积分的变量代换

三重积分也有类似于二重积分的变量代换.

设变换

$$r: x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$$

将 $O'uvw$ 空间中的区域 V' 一一地映为 $Oxyz$ 空间中的区域 V . 我们需要考虑两者间体积微元的关系. 为此, 在 V' 中任取一点 (u, v, w) , 分别给 u, v, w 以微小增量 du, dv, dw . 以 du, dv, dw 为边长的小立方体被映为 V 中的曲边六面体(图 7.30), 它的体积近似于以 $r'_u du, r'_v dv, r'_w dw$ 为边的平行六面体的体积, 即

$$dxdydz = | (r'_u du \times r'_v dv) \cdot r'_w dw | = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

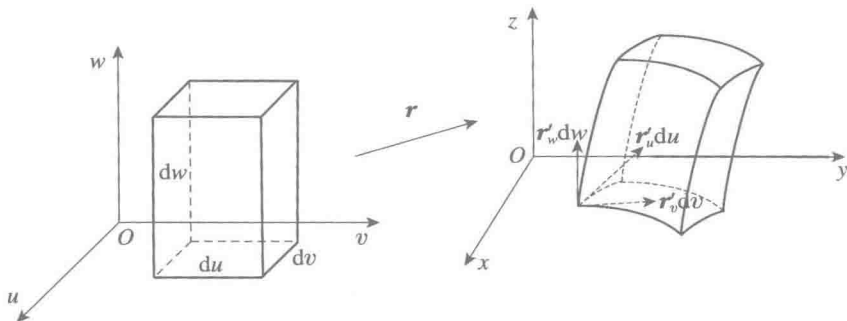


图 7.30 空间变量代换间体积微元的关系

由此可得:

定理 7.2.3 设变换

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

将 $O'uvw$ 空间中的区域 V' 一一地映为 $Oxyz$ 空间中的区域 V , 且 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$,

$f(x, y, z)$ 为 V 上的可积函数, 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

下面讨论两种常用的三重积分变换.

(1) 球坐标变换(换元)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

如图 7.31 所示, 三个数 r, φ, θ 确定空间中一点 P , 称 (r, φ, θ) 为 P 点的球坐标.

$r = r_0$ (常数) 表示空间中以原点为中心、 r_0 为半径的球面; $\theta = \theta_0$ (常数) 表示

空间中以原点为顶点、 z 轴为轴、张角为 θ_0 的圆锥面； $\varphi = \varphi_0$ (常数) 表示空间中过 z 轴、旋转角为 φ_0 的半平面。

球坐标变换把空间区域 V' 一一地映为 V , 其雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin \theta.$$

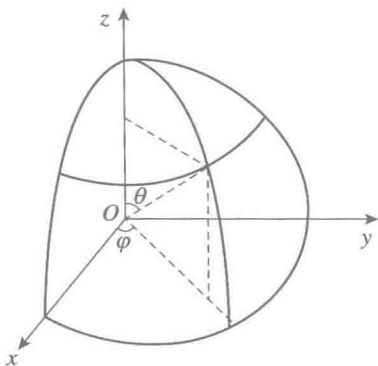


图 7.31 球坐标系

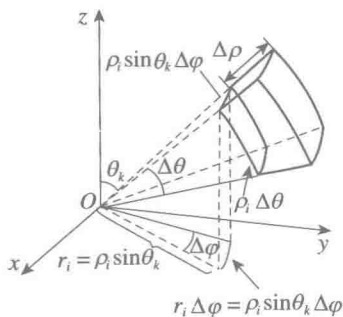


图 7.32 球坐标系的微元

因此有三重积分球坐标变换公式(图 7.32)

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

实际应用公式时,不必画出空间区域 V' , 可以用如下办法确定积分限: 设 V 夹在半平面 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 之间, 用 $\varphi = \varphi$ 的半平面去截空间区域 V , 得到的平面区域记为 $D(\varphi)$, 则有公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \iint_{D(\varphi)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta.$$

(2) 柱坐标变换(换元)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

如图 7.33 所示, 三个数 r, φ, z 确定空间中一点 P , 称 (r, φ, z) 为 P 点的柱坐标。

$r = r_0$ (常数) 表示空间中以 z 轴为轴、 r_0 为半径的圆柱面； $\varphi = \varphi_0$ (常数) 表示空间中过 z 轴、旋转角为 φ_0 的半平面； $z = z_0$ (常数) 表示空间中过点 $(0, 0, z_0)$ 且与 z 轴垂直的平面。

柱坐标变换把空间区域 V' 一一地映为 V , 其雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

因此有三重积分柱坐标变换公式(图 7.34)

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

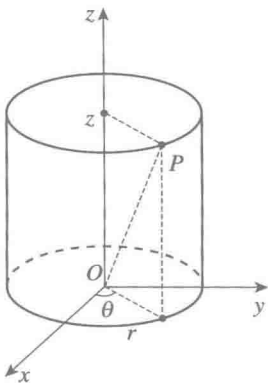


图 7.33 柱坐标系

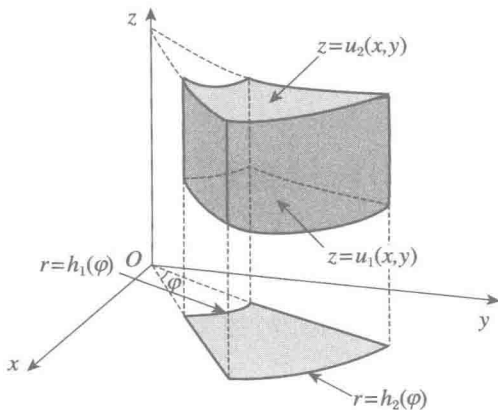


图 7.34 柱坐标系的微元

实际应用公式时,不必画出空间区域 V' , 可以用如下办法确定积分限: 设 V 夹在半平面 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 之间, 用 $\varphi = \varphi$ 的半平面去截空间区域 V , 得到的平面区域记为 $D(\varphi)$, 则有公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \iint_{D(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr dz.$$

例 7.2.4 计算三重积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中 V 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成的区域.

解 利用球坐标变换将 V 的边界方程化为球坐标方程: $r = 2 \cos \theta$, 画出 $D(\varphi)$ 的图像(图 7.35). 因此

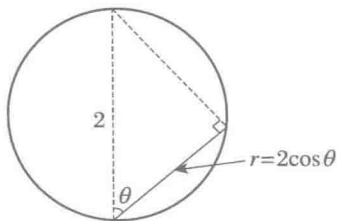


图 7.35 例 7.2.4 中区域 $D(\varphi)$ 的图像

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{D(\varphi)} r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^4 \sin\theta dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} \cos^5\theta \sin\theta d\theta \\
 &= \frac{32}{15}\pi.
 \end{aligned}$$

□

一般来说,只要被积函数具有形式

$$f(x, y, z) = F(x^2 + y^2 + z^2),$$

或积分区域是由球坐标系的坐标曲面围成的,就宜采用球坐标变换来计算三重积分.

例 7.2.5 计算三重积分 $\iiint_V z dx dy dz$, 其中 V 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 和抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围成的区域.

解 利用柱坐标变换将 V 的边界(图 7.36)方程化为柱坐标方程: $r^2 + z^2 = 4$, $r^2 = 3z$, 画出 $D(\varphi)$ 的图像(图 7.37). 因此

$$\begin{aligned}
 \iiint_V z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{D(\varphi)} z r dr dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z r dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r}{2} \left(4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr = \frac{13}{4}\pi.
 \end{aligned}$$

□

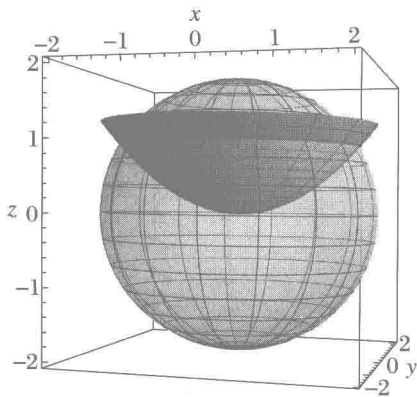


图 7.36 球面和抛物面所围成的区域

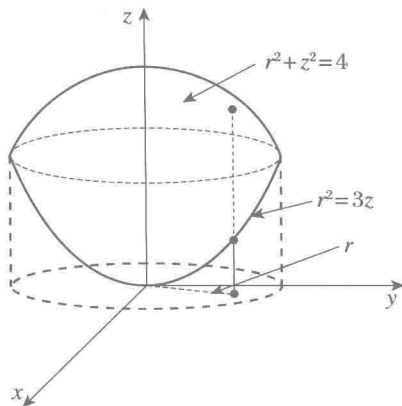


图 7.37 例 7.2.5 中 $D(\varphi)$ 的图像

一般来说,只要积分区域由柱坐标的坐标面围成,或者被积函数关于 z 轴对称,即 $f(-x, -y, z) = f(x, y, z)$,就宜采用柱坐标变换来计算三重积分.

例 7.2.6 计算曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ (图 7.38) 所围成的立体 V 的体积.

解 先作变换 $x = au^3, y = bv^3, z = cw^3$, 它将空间 $O'uvw$ 中的单位球体 V' :

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

映成空间 $Oxyz$ 中的立体 V , 其雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 27abcu^2v^2w^2.$$

因此

$$\iiint_V dx dy dz = 27abc \iiint_{V'} u^2 v^2 w^2 du dv dw.$$

再把 u, v, w 变换到球坐标, 得

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} u^2 v^2 w^2 du dv dw &= \iiint_V r^6 \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin \theta r^2 dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^8 dr \\ &= \frac{4}{945}\pi. \end{aligned}$$

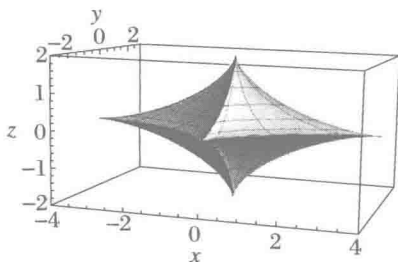


图 7.38 例 7.2.6 中的曲面

综上, 所求立体的体积为

$$\iiint_V dx dy dz = 27abc \cdot \frac{4}{945}\pi = \frac{4}{35}\pi abc. \quad \square$$

习题 7.2

1. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V xy dx dy dz, V: 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{1}{2};$

(2) $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz, V$ 由 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 围成;

(3) $\iiint_V z dx dy dz, V$ 由 $z = xy, z = 0, x = 0, x = 1, y = 2, y = 3$ 围成;

(4) $\iiint_V y \cos(x+z) dx dy dz, V$ 由 $y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x+z = \frac{\pi}{2}$ 围成;

(5) $\iiint_V (x+y) dx dy dz, V$ 由 $z = 1 - x^2 - y^2, z = 0$ 围成;

$$(6) \iiint_V (a-y) dx dy dz, V \text{ 由 } y=0, z=0, 2x+y=a, x+y=a, y+z=a \text{ 围成.}$$

2. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz;$$

$$(2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} dz;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

3. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_V (x^2+y^2) dx dy dz, V \text{ 由 } x^2+y^2=2z, z=2 \text{ 围成};$$

$$(2) \iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz, V \text{ 由 } x^2+y^2=z^2, z=1 \text{ 围成};$$

$$(3) \iiint_V x dx dy dz, V \text{ 由 } x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=1 \text{ 围成};$$

$$(4) \iiint_V xyz dx dy dz, V \text{ 是 } x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ 的第一卦限部分};$$

$$(5) \iiint_V z dx dy dz, V \text{ 由 } z=\sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2=3z \text{ 围成};$$

$$(6) \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz, V: x^2+y^2+z^2 \leq x;$$

$$(7) \iiint_V |x^2+y^2+z^2-1| dx dy dz, V: x^2+y^2+z^2 \leq 4;$$

$$(8) \iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} dx dy dz, V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1;$$

$$(9) \iiint_V \frac{z \ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1} dx dy dz, V: x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$

4. 求由下列曲面所围成的立体体积:

$$(1) y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6;$$

$$(2) x^2+y^2=1, x+y+z=3, z=0;$$

$$(3) x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2=z^2 \text{ (含 } z \text{ 轴的部分)};$$

$$(4) x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=z^2 \text{ (} b>a>0 \text{)};$$

$$(5) z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2;$$

$$(6) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \text{ (含 } z \text{ 轴的部分);}$$

$$(7) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x;$$

$$(8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1;$$

$$(9) (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz;$$

$$(10) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

5. 求函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值.

6. 设

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

其中 f 是连续函数. 求 $F'(t)$.

7. 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(z) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(z)(1-z^2) dz.$$

7.3 第一型曲线和曲面积分

7.3.1 空间曲线的弧长

在定积分的应用中, 确定平面曲线的弧长所使用的方法是: 以内接折线的长作为曲线弧长的一个近似值, 然后令其边数无限增加, 其极限就定义为平面曲线的弧长. 现在要用同样的方法建立空间曲线弧长的概念, 从而也可把弧长归结为定积分.

定义 7.3.1 设 L 是 \mathbb{R}^3 空间中的一条曲线, 在 L 上依次从起点 A 到终点 B 取分点

$$A = P_0, P_1, \dots, P_n = B,$$

称为对曲线 L 的一个分割, 记为 T . 然后, 用线段连接 T 中的每相邻两点得到 L 的 n 条弦 $P_{i-1}P_i$ ($i=1, \dots, n$), 这 n 条弦组成 L 的一条内接折线(图 7.39). 记

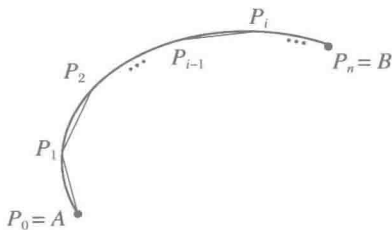


图 7.39 空间曲线及其内接折线

$$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} |P_{i-1}P_i|, \quad s(T) = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|,$$

分别表示最长弦的长度与折线的总长度.

如果 $\lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) = s$, 即对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\|T\| < \delta$ 时, 有

$$|s(T) - s| < \epsilon,$$

则称 L 是可求长的, 并将极限 s 称为曲线 L 的弧长.

下面, 我们给出空间光滑曲线的弧长公式.

定理 7.3.1 设 \mathbb{R}^3 空间中的曲线 L 由参数方程

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad \text{或} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

给出. 若 L 为光滑曲线 (即 $x(t), y(t), z(t)$ 均有连续的导数且不全为零), 则 L 是可求长的, 且弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (7.3.1)$$

证明* 设

$$T': \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

为区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, 对应于曲线 L 的一个分割 $T = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, 其中

$$P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

在属于 T' 的每个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上, 由拉格朗日中值定理得

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \Delta t_i \quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]),$$

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i) \Delta t_i \quad (\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]),$$

$$\Delta z_i = z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\zeta_i) \Delta t_i \quad (\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]).$$

又因为 L 为光滑曲线, 当 $x'(t) \neq 0$ 时, 在 t 的某开邻域内 $x = x(t)$ 有连续的反函数, 故当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta t \rightarrow 0$. 类似地, 当 $y'(t) \neq 0$ 或 $z'(t) \neq 0$ 时, 也能从 $\Delta y \rightarrow 0$ 或 $\Delta z \rightarrow 0$ 推出 $\Delta t \rightarrow 0$. 因此

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

由此可知, 当曲线 L 为光滑曲线时,

$$\|T\| \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|T'\| \rightarrow 0.$$

由于 $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 从而一致连续并且黎曼可积, 所以对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\|T'\| < \delta$ 时,

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\xi_i)]^2} \Delta t_i - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

并且

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\zeta_i)]^2} - \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\xi_i)]^2} \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \left| s(T) - \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} - \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\zeta_i)]^2} \Delta t_i \right. \\ & \quad \left. - \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\zeta_i)]^2} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\xi_i)]^2} \right| \Delta t_i \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2 + [z'(\xi_i)]^2} \Delta t_i \right. \\ & \quad \left. - \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}(\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

定理得证. \square

从空间曲线 L 上的起点 $P_0 = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ 到动点 $P = (x(t), y(t), z(t))$ 的弧长为

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau.$$

由于被积函数是连续的, 根据微积分基本定理, 有

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2},$$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

我们称 $s(t)$ 的微分 ds 为弧长微元或弧长微分.

注 7.3.1 在第 6 章 6.6 节中, 我们提到过对于曲线 $r = r(t)$, $r(t)$ 和 $r(t+dt)$ 对应的折线段可由点 $r(t)$ 处的切线段 $r'(t)dt$ 来近似, 即

$$|r(t+dt) - r(t)| \approx |r'(t)dt| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

所有折线段的求和的极限就是积分

$$\int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

而弧长微分 ds 就是函数 $r(t)$ 的微分 dr 的模, 即

$$ds = |dr| = |r'(t)| dt.$$

因此, 通过对微元的分析, 也可以得到曲线弧长的公式. 相比于定理 7.3.1, 这样的处理要简单得多. 在下面讨论曲面面积时, 我们将采用类似的方法.

像这样, 在进行严格数学论证的同时, 寻找简洁、直观的解释对于加深对结论的理解和记忆都是有帮助的.

由于空间曲线 L 是光滑的, 所以对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 t , 都有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 > 0$, 因而 $s(t)$ 是 t 的增函数, 从而存在递增的反函数 $t = t(s)$, 它对 s 的微商可以表成

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}}.$$

将 $t = t(s)$ 代入曲线 L 的参数方程就得到以弧长 s 为参数的方程, 仍记成

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s), \quad \text{或} \quad r = r(s) \quad (0 \leq s \leq s_0).$$

这称为空间曲线 L 的自然方程 (s_0 为曲线 L 的弧长). 此时, 由弧长的微分公式有

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad \text{或} \quad \left|\frac{dr}{ds}\right| = 1.$$

即在自然方程下, 向量值函数 $r(s)$ 对弧长 s 的微商是曲线 L 在点 $r(s)$ 处的单位切向量, 并指向弧长 s 的增加方向. 如果记这个切向量的三个方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则有

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma.$$

平面曲线 $r(t) = (x(t), y(t))$ 可以看做特殊的空间曲线 $r(t) = (x(t), y(t), 0)$. 由此再次得到平面曲线的弧长公式

$$s = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

对于逐段光滑曲线, 其弧长可定义为各段光滑曲线弧长之和.

例 7.3.1 求螺旋线

$x = R \cos t, y = R \sin t, z = kt$
在 $[0, 2\pi]$ 上的一段弧长(图 7.40 中,
 $R=1, k=\frac{1}{6}$).

解 由弧长公式得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + k^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + k^2}. \quad \square \end{aligned}$$

7.3.2 第一型曲线积分

我们把定义在闭区间即线段上的定积分推广到平面或空间的曲线上. 其结果就是第一型曲线积分的概念.

前面从求空间物体的质量引出了三重积分, 下面将从求曲线段上分布着某种物质的质量引出第一型曲线积分.

设空间曲线段 L 是可求长的, 两端点分别为 A 和 B , 其上分布着某种物质, 该物质的密度函数 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上连续, 我们来求这种物质在曲线段 L 上的总质量.

从 A 至 B 依次插入分点 $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$, 它们将曲线段 L 分成 n 小段(图 7.41). 记第 i 段弧长为 Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 在第 i 段弧上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 则第 i 段弧的质量近似为 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$, 从而 L 的质量就近似为

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

就是 L 上的物质的总质量. 这种定义在曲线段 L 上黎曼和的极限, 就称为 $f(x, y, z)$ 在 L 上的第一型曲线积分.

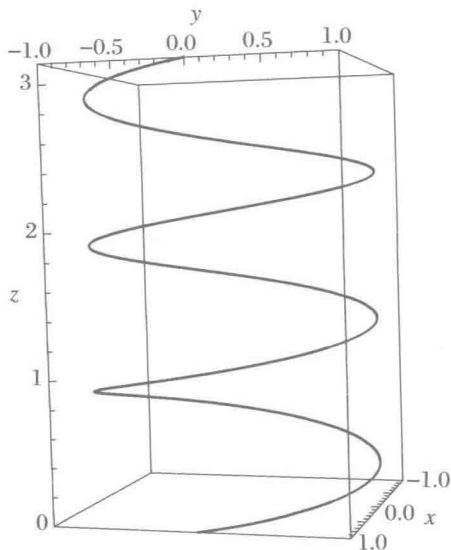


图 7.40 螺旋线($0 \leq t \leq 6\pi$)

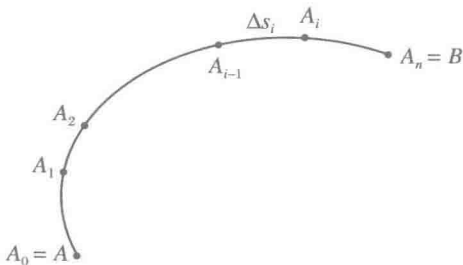


图 7.41 第一型曲线积分

定义 7.3.2 设 L 是 \mathbb{R}^3 空间中的一条可求长曲线, 函数 $f(x, y, z)$ 定义在 L 上, L 的两端点为 A 和 B , 依次用分点 $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ 将曲线 L 分成 n 小段. 记第 i 段弧长为 Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 在第 i 弧段上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

若当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限存在, 且极限值与分点和取点无关, 则称此极限为 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上的第一型曲线积分, 记为

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

第一型曲线积分也有类似于定积分的一些性质, 如关于被积函数的线性性以及关于曲线的可加性等.

关于第一型曲线积分的计算, 有下面的重要定理:

定理 7.3.2 设 \mathbb{R}^3 空间中的光滑曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

若函数 $f(x, y, z)$ 在 L 上连续, 则 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上的第一型曲线积分存在, 且有

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

证明* 由弧长公式有

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau.$$

因而 $s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} > 0$, $s(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上严格增的 C^1 函数. 如果记 $S = s(\beta)$, 则 $s(t)$ 将 $[\alpha, \beta]$ 一一地映成 $[0, S]$, $s = s(t)$ 存在连续可微的反函数 $t = t(s)$. 令 $x = x(t(s)), y = y(t(s)), z = z(t(s))$, 可得到以弧长为参数的曲线 L 的表达式. 对 L 的任一分割 T , 记参数 t 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上对应的分割为 $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = \beta$, 而弧长在区间 $[0, S]$ 上对应的分割为 $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_i < s_{i+1} < \dots < s_n = S$ (图 7.42), 点 $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 为弧长参数 $s_i^* \in [s_i, s_{i+1}]$ 在曲线上的对应点, 因此对应的黎曼和为

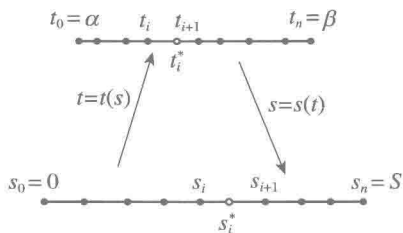


图 7.42 参数曲线的第一型曲线积分

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x(t(s_i^*)), y(t(s_i^*)), z(t(s_i^*))) \Delta s_i.$$

由于上式的右边是连续函数 $f(x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$ 在 $[0, S]$ 上的黎曼和, 所以当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i \rightarrow 0$ 时, 右边趋向于它在 $[0, S]$ 上的定积分, 因而有

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_0^S f(x(t(s)), y(t(s)), z(t(s))) ds.$$

对上式的右边作积分变量替换 $s = s(t)$, 得

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

定理得证. \square

由此可得到推论: 设平面曲线 L 的直角坐标方程为 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), 且 $y(x)$ 有连续的微商, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

设平面曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$), 且 $r(\theta)$ 有连续的微商, 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

例 7.3.2 计算第一型曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$).

解 设曲线的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). 因为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2} dt = \frac{a}{2} dt,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos t}{2}} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = a^2 \int_0^\pi |\cos t| dt = 2a^2. \end{aligned} \quad \square$$

例 7.3.3 计算第一型曲线积分 $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 为螺旋线

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = kt$$

在 $[0, 2\pi]$ 上的一段.

解 易知, L 的弧长元素

$$ds = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + k^2} dt = \sqrt{R^2 + k^2} dt,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{(kt)^2}{(R\cos t)^2 + (R\sin t)^2} \sqrt{R^2 + k^2} dt \\ &= \frac{k^2}{R^2} \sqrt{R^2 + k^2} \int_0^{2\pi} t^2 dt \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{k}{R}\right)^2 \sqrt{R^2 + k^2} \pi^3. \end{aligned}$$

□

7.3.3 曲面的面积

设 S 是 \mathbb{R}^3 空间中的曲面, 其参数方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad ((u, v) \in D),$$

或写成向量形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D).$$

这里, 我们只考虑光滑曲面, 即函数 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ 都具有连续的一阶偏微商, 并且 $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq \mathbf{0}$.

在第 6 章 6.6 节中, 我们得到了上述曲面 S 的面积微元是 $|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv$. 如同对弧长微元积分得到曲线的弧长, 对面积微元积分就可得到曲面的面积, 因此曲面 S 的面积公式为

$$S = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv.$$

易知

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 = (\mathbf{r}'_u)^2 (\mathbf{r}'_v)^2 - (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v)^2.$$

令

$$E = (\mathbf{r}'_u)^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2,$$

$$G = (\mathbf{r}'_v)^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

$$F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$

则得到参数方程下曲面面积的计算公式

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

称

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

为曲面的面积元素.

当曲面 S 是平面区域时, S 的参数方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = 0 \quad ((u, v) \in D),$$

这时

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|,$$

而

$$dS = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

就是二重积分的换元公式中的面积元素.

如果曲面 S 的方程为显式

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D),$$

且函数 $f(x, y)$ 在其定义域 D 上有连续的一阶偏微商, 这时可将 x, y 看做参数, 曲面 S 的参数方程为

$$x = x, y = y, z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D),$$

于是求得

$$E = 1 + (z'_x)^2, \quad G = 1 + (z'_y)^2, \quad F = z'_x z'_y,$$

从而得到

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

称

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

为在直角坐标下曲面的面积元素.

如果曲面的方程为 $x = g(y, z)$ 或 $y = h(z, x)$, 这时可分别把曲面投影到平面 Oyz 或 Ozx 上, 所得到的投影区域记做 D_{yz} 或 D_{zx} , 则同样得到类似的计算曲面面积的公式

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz \quad \text{或} \quad S = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + (y'_z)^2 + (y'_x)^2} dz dx.$$

如果曲面的方程为隐式方程 $F(x, y, z) = 0$, 且函数 $F(x, y, z)$ 的偏微商 $F'_z \neq 0$, 则由隐函数的求导公式有

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

于是又得到由隐式方程所表示的曲面面积的计算公式

$$S = \iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} dx dy. \quad \square$$

例 7.3.4 求半径为 R 的球的表面积.

解 利用球面参数方程来计算. 设球面 R 的参数方程为

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

计算得

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \sin^2 \theta,$$

所以球的表面积为

$$S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\varphi = 4\pi R^2. \quad \square$$

例 7.3.5 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 所截下的曲面面积 (图 7.43 和 7.44).

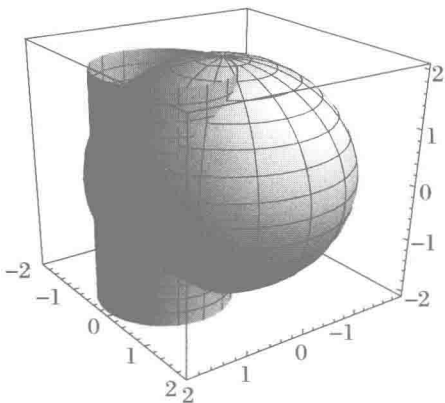


图 7.43 球面被柱面截下的曲面

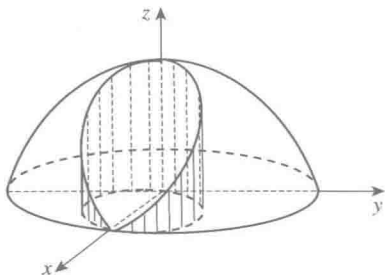


图 7.44 例 7.3.5 中曲面的示意图

解 方法 1 把球面的参数方程

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta$$

代入柱面方程, 得 $\sin \theta = \cos \varphi$. 当点在第一卦限中变化时, $\theta, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 得到

$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 因此 θ, φ 的变化区域 D 由不等式 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} - \varphi$ 给出. 利用对称性, 得

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_D R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi} \sin \theta d\theta \\ &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varphi) d\varphi = 2R^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

方法2 由对称性,只要求出位于上半球面的那一部分面积,再乘2即可.上半球面方程为 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,易得

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

所以

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

于是所求面积为

$$S = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,得

$$\begin{aligned} S &= 2R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \\ &= 2R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R - R |\sin \theta|) d\theta \\ &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2R^2(\pi - 2). \end{aligned} \quad \square$$

7.3.4 第一型曲面积分

如同第一型曲线积分是定积分的推广一样,我们把定义在平面区域上的二重积分推广到空间的曲面上就得到第一型曲面积分的概念.

同前面一样,我们仍从求曲面块的质量引出第一型曲面积分.

设 S 是 \mathbb{R}^3 中一张有面积的曲面,在 S 上按密度 $f(x, y, z)$ 分布着某种物质,如何求出分布在 S 上的物质的总质量?

沿用前面用过的做法,将 S 分成若干小块 S_1, S_2, \dots, S_n ,并记每小块曲面的面积为 ΔS_i ,在每一小块曲面 S_i 上任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) ,这时分布在小块曲面 S_i 上的物质的质量近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$,于是分布曲面 S 上的物质的总质量就近似地等于

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

当我们把曲面 S 无限地细分时,上面的和式的极限就是分布在曲面 S 上的物质的质量.

由此导出下面的第一型曲面积分的定义.

定义 7.3.3 设 S 是 \mathbb{R}^3 空间中一张可求面积的曲面, 函数 $f(x, y, z)$ 定义在 S 上, 用任意分法将 S 分成 n 小块曲面 S_1, S_2, \dots, S_n , 并记每小块曲面的面积为 ΔS_i , 在每一小块曲面 S_i 上任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

如果当所有小块曲面的最大直径 λ 趋于零时, 上述和式的极限存在, 且极限值与分法和取点无关, 则称此极限为 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上的第一型曲面积分, 记为

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i,$$

其中 dS 是曲面的面积元素.

从上述定义中, 我们发现当曲面 S 是平面 Oxy 上的区域时, $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上的第一型曲面积分就是平面区域上的二重积分.

第一型曲面积分也有类似于二重积分的一些性质, 如关于被积函数的线性性以及关于曲面的可加性等.

我们知道第一型曲线积分可以化为定积分来计算, 同样第一型曲面积分可以化成通常的二重积分来计算, 并且有下面的计算公式:

定理 7.3.3 设 \mathbb{R}^3 空间中的光滑曲面 S 的参数方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad ((u, v) \in D),$$

其中 D 是平面 $O'uv$ 上的有界闭区域. 若函数 $f(x, y, z)$ 在 S 上连续, 则函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上的第一型曲面积分存在, 且有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

这个定理的证明方法也与第一型曲线积分的相应定理的证明完全类似.

作为推论, 若光滑曲面 S 具有显式表示 $z = z(x, y) ((x, y) \in D)$, 则有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

例 7.3.6 设 S 是锥面 $z^2 = k^2(x^2 + y^2) (z \geq 0)$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax (a > 0)$ 所截得的曲面(图 7.45 和 7.46). 计算第一型曲面积分

$$\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS.$$

解 所给曲面 S 的面积元素是

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + k^2} dx dy,$$

并且 S 在平面 Oxy 上的投影区域 D 是圆

$$x^2 + y^2 \leq 2ax,$$

于是

$$\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS = \sqrt{1+k^2} \iint_D [k^2(x^2 + y^2)^2 + x^2 y^2] dx dy.$$

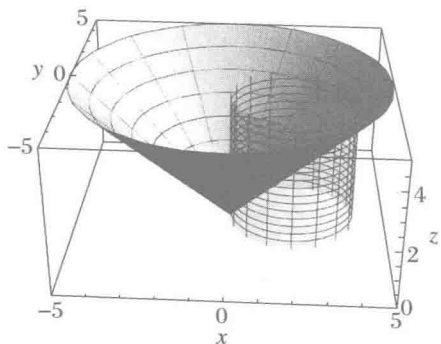


图 7.45 锥面被柱面截下的曲面

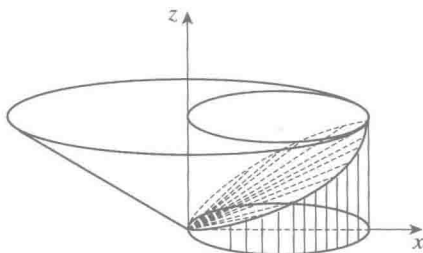


图 7.46 例 7.3.6 中的曲面示意图

利用对称性和极坐标变换,得

$$\begin{aligned} & \iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS \\ &= 2 \sqrt{1+k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} (k^2 r^4 + r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) r dr \\ &= \frac{64a^6}{3} \sqrt{1+k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (k^2 \cos^6 \varphi + \cos^8 \varphi - \cos^{10} \varphi) d\varphi \\ &= \frac{64a^6}{3} \sqrt{1+k^2} \left(k^2 \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} - \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{24} a^6 (80k^2 + 7) \sqrt{1+k^2}. \end{aligned} \quad \square$$

例 7.3.7 设 S 是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $z=0$ 和 $z=h$ ($h>0$) 所截下的一块柱面. 计算第一型曲面积分

$$\iint_S (x^4 + y^4) dS.$$

解 利用柱面参数方程来计算. S 的参数方程为

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = z \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h),$$

于是得

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

再利用对称性,得

$$\begin{aligned} \iint_S (x^4 + y^4) dS &= 2 \iint_S y^4 dS = 2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} a^4 \sin^4 \varphi \cdot a d\varphi dz \\ &= 8a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi \cdot \int_0^h dz \\ &= \frac{3}{2} \pi h a^5. \end{aligned}$$

□

读者也可以利用直角坐标方程来计算此题,体会一下哪种算法更简便.

习题 7.3

1. 计算下列曲线的弧长:

(1) $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(2) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$, 从点 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(3, 3, 2)$;

(3) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = a \ln \cos t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$);

(4) $z^2 = 2ax$ 与 $9y^2 = 16xz$ 的交线, 从点 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(2a, \frac{8}{3}a, 2a)$;

(5) $4ax = (y+z)^2$ 与 $4x^2 + 3y^2 = 3z^2$ ($a > 0; x, z \geq 0$) 的交线, 从原点到点 $M(x, y, z)$.

2. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L y^2 dl, L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(2) $\int_L (x + y) dl, L$: 顶点为 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$ 的三角形边界;

(3) $\int_L \frac{dl}{x - y}, L$: 连接点 $A(0, -2)$ 和 $B(4, 0)$ 的直线段;

(4) $\int_L \sqrt{2y} dl, L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(5) $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dl, L$: 由曲线 $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$ 所围成的曲域的边界;

(6) $\int_L x dl, L$: 对数螺线 $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) 在圆 $r = a$ 内的一段;

(7) $\int_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl, L: x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(8) $\int_L (x + y + z) dl, L$: 由直线段 AB ($A(1, 1, 0), B(1, 0, 0)$) 及螺线 $BC: x =$

$\cos t, y = \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 组成;

(9) $\int_L z dl, L$: 圆锥螺线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$);

(10) $\int_L x \sqrt{x^2 - y^2} dl, L$: 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 的一半;

(11) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)^n dl, L$: 圆周 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$;

(12) $\int_L x^2 dl, L$: 圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$.

3. 求曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 从 $t=0$ 到任意点间那段弧的质量, 设它各点的密度与该点到原点的距离的平方成反比, 且在点 $(1, 0, 1)$ 处的密度为 1.

4. 计算下列曲面在指定部分的面积:

(1) 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = 2x$ 内的部分;

(2) 柱面 $x^2 + y^2 = a^2$, 被平面 $x + z = 0, x - z = 0$ ($x > 0, y > 0$) 所截的部分;

(3) 双曲抛物面 $z = xy$ ($x \geq 0, y \geq 0$), 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截下的部分;

(4) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 被圆柱 $x^2 + y^2 = \rho^2$ ($\rho < R$) 所割下的部分;

(5) 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$, 被圆柱 $y^2 + z^2 = a^2$ 所割下的部分;

(6) 椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, 被椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ 所截下的部分;

(7) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, 和抛物面 $x^2 + y^2 = 2az$ ($z \geq 0$) 所围成的立体的全表面;

(8) 曲面 $x = \frac{1}{2}(2y^2 + z^2)$, 被柱面 $4y^2 + z^2 = 1$ 所截下的部分;

(9) 锥面 $z^2 = x^2 + y^2$, 被平面 Oxy 和 $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ 所截下的部分;

(10) 曲面 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 内的部分.

5. 求螺旋面 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi$ 在 $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$ 内的部分的面积.

6. 求圆环面 $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, z = a \sin \psi$ ($0 < a \leq b$) 被两条纬线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条经线 $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ 所界的部分的面积 ($\varphi_1 < \varphi_2, \psi_1 < \psi_2$). 又整个环面的表面面积等于多少?

7. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint_S (x^2 + y^2) dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

(2) $\iint_S (x + y + z) dS, S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$);

- (3) $\iint_S (x + y + z) dS$, S : 立方体 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的全表面;
- (4) $\iint_S xyz dS$, S : $x + y + z = 1$ 在第一卦限的部分;
- (5) $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, S : 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = 1$ 所围成的立体表面;
- (6) $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, S : 四面体 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$ 的全表面;
- (7) $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, S : 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 所割下的曲面;
- (8) $\iint_S \left(2 + z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$, S : 平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分;
- (9) $\iint_S \frac{dS}{r^2}$, S : 圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 界于平面 $z = 0$ 及 $z = H$ 之间的部分, r 是 S 上的点到原点的距离;
- (10) $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1) dS$, S : 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截下的曲面.
8. 设 G 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ ($C \neq 0$) 上的一个有界闭区域, 它在平面 Oxy 上的投影是 G_1 . 记 G 和 G_1 的面积分别为 S_G, S_{G_1} , 试证:

$$\frac{S_G}{S_{G_1}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}}.$$

7.4 重积分、线积分、面积分的应用

7.4.1 重心和转动惯量

设物质分布在空间区域 V 上, 它在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$, 并假定 $\rho(x, y, z)$ 是区域 V 上的连续函数. 将区域 V 分成 n 个直径很小的小区域 V_i , 小区域 V_i 的体积记为 ΔV_i . 在每个小区域上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) . 若把物质在小区域 V_i 的近似质量 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$ 看做是质点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 所具有的质量, 则整个

物体就可近似看做由 n 个质点组成的质点系,而这个质点系的重心坐标是

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i},$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i},$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}.$$

当分割无限加密时,即小区域中的最大直径 λ 趋于零时,以上式子的极限就是所考虑的物体的重心 G 的坐标 (x_G, y_G, z_G) :

$$x_G = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$y_G = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

$$z_G = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i} = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}.$$

若物质分布是均匀的,则密度 ρ 是常数,从而上述公式可简化为

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz, \quad z_G = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz,$$

其中 V 表示物体的体积.

若物质以面密度 $\rho(x, y, z)$ 分布在一光滑曲面薄壳 S 上,利用上面的方法可得到曲面片的重心坐标:

$$x_G = \frac{\iint_S x\rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}, \quad y_G = \frac{\iint_S y\rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}, \quad z_G = \frac{\iint_S z\rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}.$$

若物质以线密度 $\rho(x, y, z)$ 分布在一光滑曲线 L 上, 利用上面的方法, 可得到它的重心坐标:

$$x_G = \frac{\int_L x\rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}, \quad y_G = \frac{\int_L y\rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}, \quad z_G = \frac{\int_L z\rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}.$$

平面薄片和平面曲线可分别看做空间曲面和空间曲线的特例, 因此可同样得出它们的重心坐标.

利用类似上面的做法, 可得出物体的转动惯量. 采用前面的分法, 把这个物体近似看做由 n 个质点所组成的质点系, 该质点系对 x 轴的转动惯量就是

$$\sum_{i=1}^n (\eta_i^2 + \zeta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

当小区域中的最大直径 λ 趋于零时, 上式的极限就是物体对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

同理, 物体对 y 轴和 z 轴的转动惯量分别为

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz;$$

物体对原点的转动惯量为

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

若物质以面密度或线密度 $\rho(x, y, z)$ 分布在光滑曲面或曲线上, 只要把上面相应的式子中的三重积分换成第一型曲面或曲线积分, 就可得到转动惯量的表达式.

例 7.4.1 求均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 挖去小球体 $x^2 + y^2 + z^2 = az$ 后, 所余下部分的重心.

解 由于余下部分球体的质量对称分布于 z 轴, 所以重心坐标为

$$x_G = 0, \quad y_G = 0, \quad z_G = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz.$$

利用球坐标变换将 V 的边界方程化为球坐标方程: $r = a \cos \theta$, $r = 2a \cos \theta$. 画出 $D(\varphi)$ 的图像(图 7.47), 从而有

$$\begin{aligned} \iiint_V z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_{D(\varphi)} r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^{2a \cos \theta} r^3 \cos \theta \sin \theta dr \\ &= \frac{15}{2} \pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{5}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

又 $V = \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{7}{6} \pi a^3$, 所以

$$x_G = 0, \quad y_G = 0, \quad z_G = \frac{15}{14} a. \quad \square$$

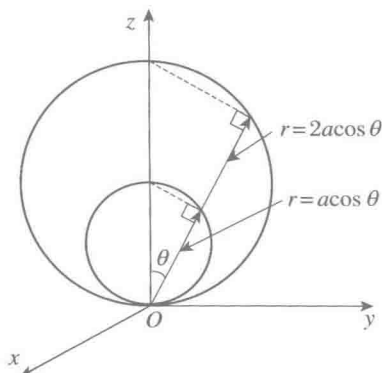


图 7.47 例 7.4.1 中几何体的示意图

例 7.4.2 求半径为 R 的均匀半球壳 S 的重心.

解 以半球壳 S 的对称轴为 z 轴、球心为坐标原点构成直角坐标系, 则所求重心坐标为

$$x_G = 0, \quad y_G = 0, \quad z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS.$$

利用球坐标变换, 得

$$\iint_S z dS = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi R^3.$$

又 $S = 2\pi R^2$, 所以

$$x_G = 0, \quad y_G = 0, \quad z_G = \frac{R}{2}. \quad \square$$

例 7.4.3 求底半径为 R 、高为 l 的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

解 取底心为原点, 轴线为 z 轴, 于是所给柱体由圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = 0, z = l$ 围成. 因此, 它对 z 轴的转动惯量为

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz.$$

利用柱坐标变换, 得

$$I_z = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \int_0^l dz = \frac{\pi}{2} \rho l R^4 = \frac{1}{2} M R^2,$$

其中 $M = \pi \rho l R^2$ 是柱体的质量. \square

7.4.2 物体的引力

设物质分布在空间区域 V 上,它在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$,并假定 $\rho(x, y, z)$ 是区域 V 上的连续函数.现在要来求出这物体对其外一质量为 m 的质点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 的引力.

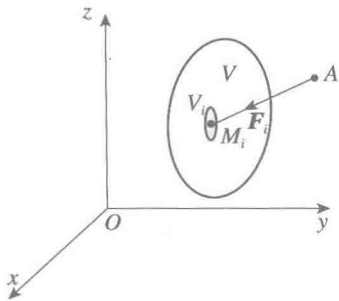


图 7.48 物质的分布

为此,将区域 V 分成 n 个直径很小的小区域 V_i ,其体积记为 ΔV_i .在每个小区域上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.若把物质在小区域 V_i 的近似质量 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$ 看做是质点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 所具有的质量(图 7.48),则 V_i 对质点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 的引力 ΔF_i 的大小可近似地表示为

$$|\Delta F_i| = k \frac{m\rho_i \Delta V_i}{r_i^2},$$

其中 k 为比例常数, ρ_i 是点 M_i 处的密度, r_i 是点 M_i 到点 A 的距离,即

$$\rho_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i), \quad r_i = \sqrt{(\xi_i - \xi)^2 + (\eta_i - \eta)^2 + (\zeta_i - \zeta)^2}.$$

而 ΔF_i 的方向与单位向量

$$\frac{\overrightarrow{AM_i}}{|\overrightarrow{AM_i}|} = \left(\frac{\xi_i - \xi}{r_i}, \frac{\eta_i - \eta}{r_i}, \frac{\zeta_i - \zeta}{r_i} \right)$$

的方向相同,所以

$$\Delta F_i = k \frac{m\rho_i \Delta V_i}{r_i^2} \left(\frac{\xi_i - \xi}{r_i}, \frac{\eta_i - \eta}{r_i}, \frac{\zeta_i - \zeta}{r_i} \right).$$

对 V 中各小区域的引力求和,再对分割无限加密,即小区域中的最大直径 λ 趋于零,取极限,则引力 F 在坐标轴上的投影的大小 F_x, F_y, F_z 可用三重积分分别表示为

$$F_x = km \iiint_V \frac{x - \xi}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$F_y = km \iiint_V \frac{y - \eta}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$F_z = km \iiint_V \frac{z - \zeta}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

其中

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

记 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (\xi, \eta, \zeta)$, 则以上三式可写成向量形式:

$$\mathbf{F} = km \iiint_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{r^3} \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

若物质以面密度或线密度 $\rho(x, y, z)$ 分布在光滑曲面或曲线上, 只要在上面相应的式子中, 把三重积分换成第一型曲面或曲线积分, 就可得到引力的表达式.

例 7.4.4 求半径为 R 的均匀球体对球外一质量为 1 的质点 A 的引力.

解 取球心为原点, z 轴过质点 A , 则质点 A 的坐标为 $(0, 0, l)$ ($l > R$), 球体 V 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. 此外, 不失一般性, 可设 $\rho = k = 1$. 因球体关于 z 轴是对称的, 故必有

$$F_x = F_y = 0,$$

于是

$$F_z = \iiint_V \frac{z - l}{[x^2 + y^2 + (z - l)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz.$$

利用柱坐标变换, 得

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{z - l}{[r^2 + (z - l)^2]^{\frac{3}{2}}} r dr \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \left(-1 - \frac{z - l}{\sqrt{R^2 + l^2 - 2lz}} \right) dz \\ &= -\frac{4\pi R^3}{3l^2}. \end{aligned} \quad \square$$

注意, 球体的质量为 $M = \frac{4}{3}\pi R^3$, 质点 A 的质量为 $m = 1$, 则球体对质量为 m 的质点的引力为

$$F_z = -\frac{Mm}{l^2}.$$

由此可见, 均匀球体对体外质点的引力相当于球体的质量集中在球心时对质点的引力, 所以在天体力学中考虑星球之间的引力时, 常将星球的质量集中在球心, 再直接应用牛顿定律.

读者要注意的是, 在物理上用积分的方法求各种物理量时一般采用“微元法”, 也就是先取一个很小的面积元素或体积元素, 求出这一小部分所相应的物理量, 然后求积分得到所求的物理量. 而不像在这里, 先分割, 作黎曼和, 然后求积分和的极限, 甚至还要论证这个极限是否存在. 这是因为许多物理问题中所涉及的函数和映射都具有连续的性质, 积分的存在就是确定无疑的, 因此微元法不仅是合理的, 而且是简便的.

习题 7.4

1. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 设其各点的密度为 $\rho = z$.
2. 求椭圆薄片 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 的质量, 设密度为 $\rho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
3. 设一个平面圆环是由半径为 R 和 r ($R > r$) 的两个同心圆所围成的, 已知材料各点的密度和到圆心的距离成反比, 且在内圆的圆周上密度为 1. 求环的质量.
4. 设有一个半径为 a 的圆盘, 其各点的密度和到圆心的距离成正比 (设比例系数为 1), 现挖去内切于圆盘中半径为 $\frac{a}{2}$ 的小圆. 求余下部分的重心坐标.
5. 求半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$) 的重心坐标, 设球面上各点的密度等于该点到铅垂直径的距离.
6. 有一个匀质薄板, 它是由半径为 a 的半圆和一个长方形拼接而成的, 为了使重心正好在圆心上, 问长方形的宽 b 应为多少?
7. 一个物体是由两个半径各为 R 和 r ($R > r$) 的同心球所围成的, 已知材料的密度和到球心的距离成反比, 且在距离为 1 处的密度等于 k . 求物体的总质量.
8. 求由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 和 $z = c$ 所围成的均匀物体的重心坐标.
9. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ 内各点密度与各点到原点的距离成反比. 求其重心坐标.
10. 在半径为 a 的圆柱上连接一个半径为 a 的半球, 为了使重心正好在球心上, 问圆柱的高如何?
11. 设半径为 R 的球体内各点的密度与各点到球心的距离成正比. 已知球的质量为 M , 求它对直径的转动惯量.
12. 求以下各物体的转动惯量 (设密度 ρ 为常数):
 - (1) 质量为 m 、长为 l 的细棒, 对于: (a) 通过棒的中心并垂直于棒的轴; (b) 通过棒的一端并与棒垂直的轴.
 - (2) 质量为 m 、半径为 R 的薄圆盘, 对于: (a) 通过圆心并垂直圆盘的轴; (b) 直径.
 - (3) 质量为 m 、半径为 R 的球体, 对于: (a) 通过球心的轴线; (b) 球面的切线.
13. 设有一个半径为 R 的均匀球壳 (密度为 ρ) 绕其直径旋转. 求它的转动惯量.
14. 求半径为 a 的均匀半圆弧 (密度为 ρ) 对处在圆心为 O 、质量为 M 的质点的引力.
15. 设匀质圆盘的半径为 R , 密度为 μ , 在通过中心并垂直于盘面的直线上有一条长为

l 的均匀细棒,其密度为 ρ ,棒的近盘一端与圆心的距离为 a . 试求圆盘对细棒的引力.

16. 设有一个均匀的球壳,密度为 ρ ,半径为 R . 试求它对距球心为 a 、质量为 m 的质点的引力,并讨论质点在球内和球外的两种情况.

7.5 第二型曲线积分与格林公式

第一型曲线积分和曲面积分,其曲线和曲面都是无方向的,本质上与二重积分和三重积分是同类型的积分. 这一节要介绍的第二型曲线积分和后面要介绍的第二型曲面积分,其曲线和曲面是有方向的. 其实对于这种类型的积分我们并不陌生,例如,定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的积分区间就是有方向的:从 a 到 b ,如果反方向,便会差一个负号,即

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

7.5.1 曲线的定向

定向曲线是一条通常的曲线但还带有前进的方向,例如,端点 A 是它的起点,而另一端点 B 是它的终点,一旦指明了起点和终点,就相当于给这一曲线定了方向.

设连接 A, B 的曲线 L 的参数方程为

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

我们可以把它看做是定向曲线 L_{AB} ($A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)), B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$) 的参数方程. 它表示曲线沿参数 t 由 α 增加到 β 的方向,称为 L 沿参数增加的方向,习惯上称为参数曲线的正方向;而 L_{BA} 记做

$$L_{BA}: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\beta \geq t \geq \alpha),$$

它表示参数 t 由 β 减少到 α ,称为曲线的负方向.

设 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\mathbf{r}'(t)$ 连续且不为零向量,这时 L 为光滑曲线, $\mathbf{r}'(t)$ 是 L 的一个切向量,并且指向参数 t 增加的方向. 因此,指定单位切向量 $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ 相当于选择 L 的正方向,指定单位切向量 $\boldsymbol{\tau}_1 = -\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ 相当于选择 L

的负方向(图 7.49).

如果 L 是平面 Oxy 上的一条封闭曲线, 习惯上称其逆时针方向为正方向. 这时 L 所围成的内部区域在 L 行进方向的左边.

7.5.2 第二型曲线积分

设在空间区域 V 上定义了一个向量值函数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$ ($M \in V$). 这时我们称 \mathbf{F} 为定义在 V 上的一个向量场. 例如, 它可以是力场、电场、磁场、速度场等.

设在空间区域 V 上有一力场 \mathbf{F} , L 是 V 内一条光滑的定向曲线, 它的起点和终点分别记为 A 和 B . 今有一质点在力场 \mathbf{F} 的作用下, 从点 A 沿 L 运动到点 B , 求力场 \mathbf{F} 对它做的功(图 7.50).

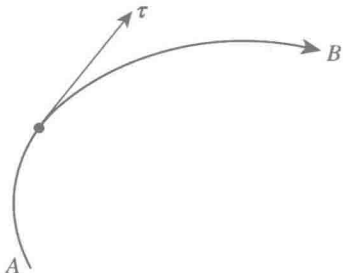


图 7.49 曲线的定向与单位切向量

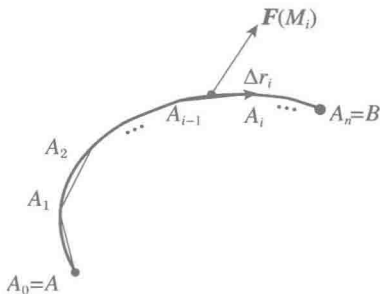


图 7.50 变力沿曲线做功

依次用分点 $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ 将定向曲线 L 分成 n 小段. 记第 i 段弧 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i ($i=1, 2, \dots, n$). 用 \mathbf{r} 表示曲线 L 上点的径向向量, 则向量 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ 指向质点运动的方向. 令 $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$, 在第 i 段弧上任取一点 M_i , 则力场 \mathbf{F} 在此小段上所做的功可近似地表示为

$$\mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i.$$

作出这些微功的和, 并令所有小段的最大弧长 λ 趋于零, 则其极限就是力场 \mathbf{F} 对质点所做的功 W , 即

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i.$$

下面我们抽去其中的实际意义, 把它概括成下述一般的定义:

定义 7.5.1 设 L 是 \mathbb{R}^3 空间中一条分别以 A 和 B 为起点和终点的光滑定向曲线, 用 \mathbf{r} 表示曲线 L 上点的径向向量, 又设 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M)$ 是定义在 L 上的向量场, 依次用分点 $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ 将定向曲线 L 分成 n 小段. 记第 i 段弧

$\overline{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i ($i=1,2,\dots,n$), 令 $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$, 在第 i 段弧上任取一点 M_i , 作黎曼和

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i.$$

若当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i \rightarrow 0$ 时, 上述和式的极限存在, 且极限值与分点和取点都无关, 则称此极限为向量场 \mathbf{F} 在定向曲线 L_{AB} 上的第二型曲线积分, 记为

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i,$$

其中 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ 是向径 \mathbf{r} 的微分. 当 L 是封闭曲线时, $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 称为向量场 \mathbf{F} 沿回路 L 的环量, 记为 $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

设 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. 因为 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, 所以

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Pdx + Qdy + Rdz,$$

因此, 第二型曲线积分又可记为

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (7.5.1)$$

设光滑定向曲线 L 的参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 且参数 t 的增加方向与曲线 L 的方向一致, 因此 L 上的单位切向量

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

与曲线 L 的方向一致. 因为曲线 L 的弧长微分 $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$, 且 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, 所以

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

即

$$\boldsymbol{\tau} ds = d\mathbf{r} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds,$$

或者

$$dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \cos \beta ds, \quad dz = \cos \gamma ds.$$

称 $d\mathbf{r}$ 为曲线的有向弧长微分或有向弧长微元, 于是, dx, dy, dz 就是有向弧长微元 ds 分别在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影, 从而第二型曲线积分又可写为

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{L_{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

$$= \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

因此,第二型曲线积分就是向量场关于曲线有向弧长元素投影的积分,而 $\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ 就是函数 $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}$ 在 L 上的第一型曲线积分,这样就给出了两种曲线积分之间的联系.

读者可能会产生疑问,最左边的第二型曲线积分是与曲线方向有关的,而右边的第一型曲线积分是与曲线方向无关的,它们怎么能相等呢?事实上,如果曲线定向由 L_{AB} 改为 L_{BA} ,则最左边的积分改变符号,但请注意,这时 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向也改变了,也就是说 $\boldsymbol{\tau}$ 也要改变符号.因此,虽然第一型积分不变号,但被积函数改变了符号,等式仍然成立.于是,由第一型曲线积分计算公式,可得如下的第二型曲线积分计算公式:

$$\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^\beta [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

第二型曲线积分具有以下性质,请读者自己给出证明.

(1) (线性性)若 $\mathbf{F} = c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$,则有

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = c_1 \int_L \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + c_2 \int_L \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}.$$

特别地,如果把 (P, Q, R) 看做是 $(P, 0, 0), (0, Q, 0), (0, 0, R)$ 的和,就有

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz.$$

(2) (对积分曲线的可加性)若 L_{AC} 是由 L_{AB} 和 L_{BC} 连接而成的,则有

$$\int_{L_{AC}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{L_{BC}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(3) (积分的方向性) $\int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{L_{BA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$

(4) 如果曲线 L 在垂直于 x 轴的平面上,则 L 的参数方程为 $x = c, y = y(t), z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$. 由计算公式可得 $\int_L P dx = 0$. 从几何上来看,这表示有向弧长元素 $d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} ds$ 在 x 轴上的投影为零. 类似地,如果 L 在垂直于 y 轴(或 z 轴)的平面上,则 $\int_L Q dy = 0$ (或 $\int_L R dz = 0$).

特别地,如果 L 是 x 轴上的闭区间 $[a, b]$,则

$$\int_{L_{ab}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b P(x, 0, 0) dx.$$

因此,一元函数的定积分可以看做是特殊的第二型曲线积分,或者说第二型曲线积分是定积分的推广.

例 7.5.1 求第二型曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2)dx + 4xydy$, 其中:

(1) L 是上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$ ($y \geq 0$), 方向从 $(0,0)$ 到 $(a,0)$;

(2) L 是直线段 $y=0$ ($0 \leq x \leq a$), 方向从 $(0,0)$ 到 $(a,0)$.

解 (1) 取 L 的参数方程为

$$x = x, \quad y = \sqrt{ax - x^2} \quad (0 \leq x \leq a).$$

于是,有

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2)dx + 4xydy &= \int_0^a \left[x^2 + (ax - x^2) + 4x\sqrt{ax - x^2} \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}} \right] dx \\ &= \int_0^a (3ax - 4x^2)dx = \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

(2) L 的图像见图 7.51. 由 $y=0$ 得 $dy=0$, 从而有

$$\int_L (x^2 + y^2)dx + 4xydy = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

例 7.5.2 求 $I = \int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $y = x \tan \alpha$ 的交线, 方向沿 x 轴正向看为顺时针, 其中 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

解 交线的参数方程为

$$x = R \cos \alpha \cos \varphi, \quad y = R \sin \alpha \cos \varphi, \quad z = R \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

于是,有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[(R \sin \alpha \cos \varphi - R \sin \varphi)(-R \cos \alpha \sin \varphi) \right. \\ &\quad + (R \sin \varphi - R \cos \alpha \cos \varphi)(-R \sin \alpha \sin \varphi) \\ &\quad \left. + (R \cos \alpha \cos \varphi - R \sin \alpha \cos \varphi)R \cos \varphi \right] d\varphi \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\varphi \\ &= 2\pi(\cos \alpha - \sin \alpha)R^2. \end{aligned}$$

例 7.5.3 太阳对地球的引力为

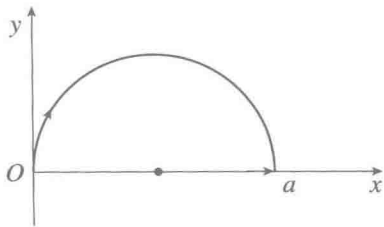


图 7.51 例 7.5.1 中的曲线

□

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r},$$

其中 m 是地球质量, M 是太阳质量, G 是万有引力常数, \mathbf{r} 是从太阳指向地球位置的向量. 试求地球从近日点 A 到远日点 B 运行半周时, 引力所做的功.

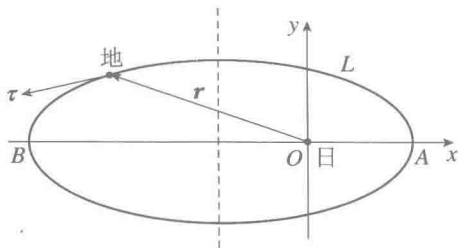


图 7.52 地球绕太阳运动

解 我们知道, 地球绕太阳运行的轨道是一个椭圆, 太阳位于该椭圆的一个焦点上(图 7.52). 把坐标原点置于太阳上, 这时地球的运动规律可表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 它是轨道的参数方程. 因此, 当地球沿轨道 L 从近日点 A 到远日点 B 时, 引力场做的功为

$$W = \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -GmM \int_{L_{AB}} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

又

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = [x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)]dt = \frac{1}{2}dr^2 = r dr,$$

其中 $r = |\mathbf{r}|$, 所以

$$W = -GmM \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = GmM \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right),$$

式中 r_A 及 r_B 分别表示近日点 A 及远日点 B 到太阳的距离. □

上述计算的结果表明, 引力场 \mathbf{F} 所做的功实际上只与路径的起点 A 及终点 B 有关, 而与连接 A 和 B 的路径无关.

7.5.3 格林公式

在一定的条件下, 沿着平面区域的边界的第二型曲线积分, 可以转化成在这个区域上的二重积分.

设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条简单闭曲线的内部都包含在 D 中, 则称 D 为单连通区域, 否则称为多连通区域.

定理 7.5.1 (格林公式) 设 D 是由分段光滑闭曲线 L 围成的平面单连通区域, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在包含 D 在内的一个区域上有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中闭曲线 L 的方向这样选取: 使沿此方向行进时, 区域 D 始终在它的左侧, 习惯

上称之为正方向.

证明 (a) 先考虑区域是最简单的情形. 设 D 既可表示为

$$D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\},$$

又可表示为

$$D = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}.$$

这时, 利用牛顿-莱布尼茨公式和第二型曲线积分与定积分的关系, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\ &= \int_c^d [Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)] dy \\ &= \int_{L_1} Q(x, y) dy + \int_{L_2} Q(x, y) dy \\ &= \oint_L Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

其中 \int_{L_1} 与 \int_{L_2} 分别表示沿右边的曲线 $x = x_2(y)$ 与左边的曲线 $x = x_1(y)$ 按 L 的方向的第二型曲线积分(图 7.53). 同理, 可得(图 7.54)

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx \\ &= -\oint_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

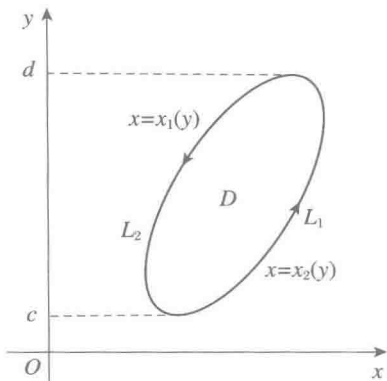


图 7.53 区域 D 与曲线 L (I)

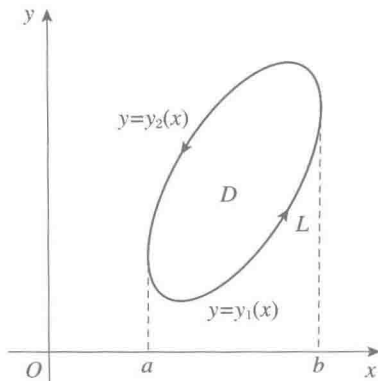


图 7.54 区域 D 与曲线 L (II)

因此

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

(b) 如果区域如图 7.55 所示, 则公式仍然成立. 事实上, 这时(a)的证明对

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy$$

仍然适用. 对另一项的证明只稍作修改即可:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx \\ &= - \left[\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + \int_{L_{CE}} P(x, y) dx \right]. \end{aligned}$$

注意到 L_{BC} 与 L_{EA} 是两条平行于 y 轴的直线, 再根据第二型曲线积分的定义, 有

$$\int_{L_{BC}} P(x, y) dx = \int_{L_{EA}} P(x, y) dx = 0.$$

把它们加到上面等式的右边, 便得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \left[\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + \int_{L_{BC}} P(x, y) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{L_{CE}} P(x, y) dx + \int_{L_{EA}} P(x, y) dx \right] \\ &= - \oint_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

这样便证明了格林公式成立.

同理, 对图 7.56 所示的区域 D , 公式也是成立的.

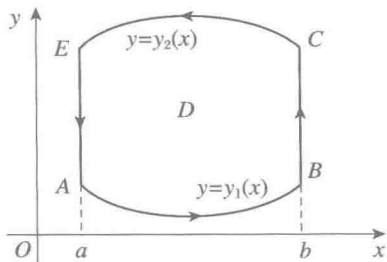


图 7.55 区域 D 与曲线 L (III)

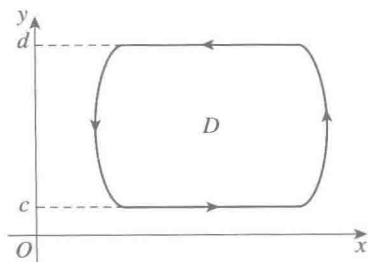


图 7.56 区域 D 与曲线 L (IV)

(c) 如果区域可用若干条光滑曲线分成有限个(a)或(b)中讨论过的区域, 则

公式仍然成立.事实上,如图 7.57 所示,用直线段把 D 分成三个(b)中讨论过的区域 D_1, D_2 和 D_3 .利用(b)中已证的结果,有

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_{i=1}^3 \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{L_i} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

最后一个等式成立,是因为沿直线的两个不同方向各积分了一次,从而相应项积分的和为零.定理证毕. \square

注 7.5.1 (1) 格林公式对多连通区域也是成立的.设区域 D 是由有限条逐段光滑曲线 L_1, L_2, \dots, L_n 围成的有界多连通区域(图 7.58).不妨将最外面的曲线记为 L_1 ,规定其定向为逆时针,而内部的曲线 L_2, L_3, \dots, L_n 的定向规定为顺时针,这样在 ∂D 上就有了一个确定的定向,称为 ∂D 的正方向.这时格林公式仍可表示为

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \oint_{L_1} P dx + Q dy + \sum_{i=2}^n \oint_{L_i} P dx + Q dy.$$

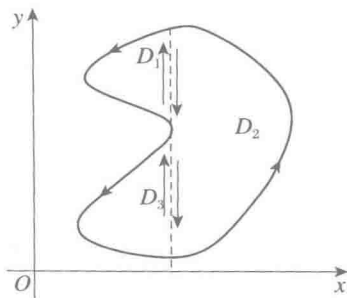


图 7.57 区域 D 与曲线 $L(V)$

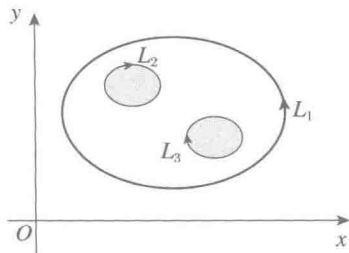


图 7.58 多连通区域中的格林公式

(2) 对于空间闭曲线,今后我们会研究与格林公式对应的斯托克斯公式.

推论 7.5.1 设 D 是满足格林公式的平面闭区域,其面积为 A ,则有

$$A = \oint_L x dy = - \oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx,$$

其中 L 沿 D 的边界的正方向. 特别地, 若 L 的参数方程为 $x = x(t), y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 那么

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt \right|.$$

上面这个求闭曲线围成区域的面积公式的定积分, 我们以前在定积分的应用中曾经得到过.

例 7.5.4 计算第二型曲线积分 $\int_L (x^2 + y)dx - (x - y^2)dy$, 其中:

- (1) L 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 沿逆时针方向;
- (2) L 是上半圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 起点为 $(R, 0)$, 终点为 $(-R, 0)$.

解 (1) 由格林公式得

$$\int_L (x^2 + y)dx - (x - y^2)dy = -2 \iint_D dx dy = -2\pi R^2.$$

(2) 由于 L 不是封闭曲线, 故不能直接用格林公式, 但如果加上起点为 $(-R, 0)$ 、终点为 $(R, 0)$ 的直线段 L_1 , 就构成封闭曲线, 从而可以用格林公式. 在 L_1 上的第二型曲线积分

$$\int_{L_1} (x^2 + y)dx - (x - y^2)dy$$

是容易算出的, 因此

$$\begin{aligned} & \int_L (x^2 + y)dx - (x - y^2)dy \\ &= \int_{L+L_1} (x^2 + y)dx - (x - y^2)dy - \int_{L_1} (x^2 + y)dx - (x - y^2)dy \\ &= -2 \iint_D dx dy - \int_{L_1} x^2 dx = -\pi R^2 - \int_{-R}^R x^2 dx \\ &= -\pi R^2 - \frac{2R^3}{3}. \end{aligned}$$

□

例 7.5.5 计算第二型曲线积分 $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中:

- (1) L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 沿逆时针方向.
- (2) L 是任一条包含原点的分段光滑闭曲线(不通过原点), 沿逆时针方向.

解 (1) 在 L 上, 有 $x^2 + y^2 = a^2$, 因此

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \int_L x dy - y dx.$$

由格林公式得

$$\int_L xdy - ydx = \iint_D 2dxdy = 2\pi a^2,$$

于是,有

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

请读者想一想,为什么不能对 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 直接用格林公式?

(2) 在 L 所围成的区域内,作一个以原点为中心、充分小的 ε 为半径的圆周 L_ε ,它的定向为逆时针方向,使得 L 与 L_ε 围成一个区域 D .这时,

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

满足格林公式的一切条件,并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

利用格林公式,得

$$\int_{L-L_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$$

由此可知

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{L_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

再由(1),知 $\int_{L_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi$, 所以

$$\int_L \frac{(xdy - ydx)}{x^2 + y^2} = 2\pi. \quad \square$$

习题 7.5

1. 计算曲线积分 $I = \int_L (x^2 + 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, 其中 L 是一段抛物线: $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$), 沿 x 增加的方向.
2. 计算曲线积分 $\oint_L xdy$, 其中 L 是由直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 和坐标轴所构成的三角形回路, 沿逆时针方向.
3. 计算曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 L 是曲线 $y = 1 - |1 - x|$ (从点

(0,0) 到点(2,0)).

4. 计算曲线积分 $\int_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 L 是沿正方形 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$ 逆时针一周的路径.
5. 求向量场 $\mathbf{v} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ 沿曲线 $L: x = a\sin^2 t, y = 2a\sin t \cos t, z = a\cos^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi$) 参数增加方向的曲线积分.
6. 设一质点处于弹性力场中, 弹力方向指向原点, 大小与质点离原点的距离成正比, 比例系数为 k . 若质点沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 从点 $(a, 0)$ 移到点 $(0, b)$, 求弹性力所做的功.
7. 计算曲线积分 $\int_L y^2 dx + xy dy + xz dz$, 其中 L 是从 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,0,0)$, 再到 $B(1,1,0)$, 最后到 $C(1,1,1)$ 的折线段.
8. 计算曲线积分 $\int_{L_{AB}} e^{x+y+z} dx + e^{x+y+z} dy + e^{x+y+z} dz$, 其中 $L_{AB}: x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, z = \frac{\varphi}{\pi}$ (从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,1,\frac{1}{2})$).
9. 计算曲线积分 $\int_C y dx + z dy + x dz$, 其中 C :
 - (1) $x + y = 2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ 的交线, 从原点看去是顺时针方向;
 - (2) $z = xy$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线, 在 z 轴上方来看是逆时针方向.
10. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:
 - (1) $\oint_L (x+y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$, 其中 L 是顶点为 $A(1,1), B(3,3), C(3,5)$ 的三角形的周界, 沿逆时针方向;
 - (2) $\oint_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$, 其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 沿顺时针方向;
 - (3) $\oint_L xy^2 dy - x^2 y dx$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = R^2$, 沿逆时针方向;
 - (4) $\oint_L (yx^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy$, 其中 L 是关于两坐标轴对称的闭曲线;
 - (5) $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy$, 其中 L 是由 $y^2 = x - 1$ 与 $x = 2$ 围成的封闭曲线, 沿逆时针方向;
 - (6) $\int_{AMB} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy$, 其中 L : 从点 $A(0, -1)$ 沿直线

$y = x - 1$ 到点 $M(1,0)$, 再从 M 沿圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 到点 $B(0,1)$;

(7) $\int_{AMO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$, 其中 AMO 为从点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

11. 利用曲线积分, 计算下列区域的面积:

(1) 由星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 围成的区域;

(2) 由旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与 Ox 轴所围成的区域.

7.6 第二型曲面积分、高斯公式和斯托克斯公式

7.6.1 曲面的定向

设空间中分布着某种流体. 如果对于空间区域 V 的每一点 (x, y, z) 与每一时刻 t , 都对对应着一个流体的速度向量 \boldsymbol{v} , 那么就称流体在 V 上确定了一个速度向量场 \boldsymbol{v} . 用数学的语言来说, 一个速度向量场就是一个定义在空间某区域 V 上的向量值函数, 另外, 它可能还依赖于时间参数 t . 在研究江河海洋的水流运动、大气的运动(如天气预报、台风预报等)、爆炸和燃烧的产生中, 速度场是一个常见的量. 如果速度场不依赖于 t , 即 \boldsymbol{v} 仅是 x, y, z 的函数, 则称速度场是定常的(图 7.59). 如果速度场不仅依赖于 x, y, z , 还依赖于时间 t , 则称速度场是不定常的(图 7.60). 研究工作总是从简单到复杂, 因此, 我们首先研究定常的速度场.

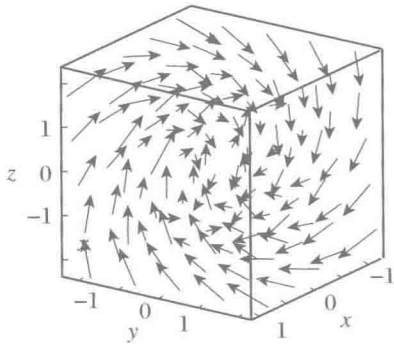


图 7.59 向量场 $\boldsymbol{v} = yi + zj + xk$

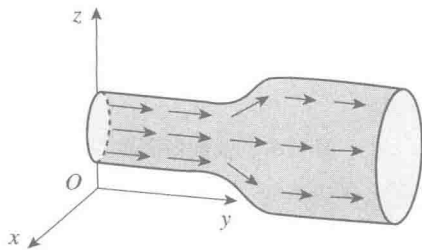


图 7.60 流体中的速度场

一个最简单的物理问题是:设在一流体的定常的速度场的定义域内,有一光滑的曲面 S ,如何计算单位时间内流过曲面 S 的流体? 也就是说,如何计算流体通过曲面 S 的流量.

为解决这个问题,首先遇到的问题是,什么叫做流过(或通过)? 直观的理解是从曲面的一侧到另一侧. 然而什么叫曲面的侧? 曲面永远都有两侧吗?

先假设 S 不是闭曲面,这时它的边界由逐段光滑的曲线构成. 由于曲面 S 是光滑的,所以 S 上的每一点 M 都有切平面,且切平面的位置随切点的位置而连续地变动. 自然, S 上的每一点 M 也有两个相反方向的单位法向量,它们是否分别代表了曲面在点 M 的两侧? 问题在于什么是曲面的侧?

由于曲面 S 是光滑的,对曲面上的两点 M_1 与 M_2 ,它们上面分别有取定方向的两个法向量 n_1, n_2 (图 7.61). 如果在曲面上沿光滑曲线由 M_1 运动到 M_2 ,则法向量 n_1 连续地变化. 当它运动到 M_2 时,若法向量与 n_2 同向,自然便认为 n_1 与 n_2 是在曲面的同侧(图 7.61);若 n_1 连续运动至 M_2 时的法向量与 n_2 反向,自然便认为 n_1 与 n_2 是在曲面的异侧. 因此,在曲面上取定点 M_1 ,在 M_1 处取定一法向量 n_1 ,则由 M_1 沿曲面 S 的光滑曲线而不越过曲面 S 的边界,且连续地走遍曲面 S ,便得到了曲面 S 中与 n_1 同侧的全体法向量(图 7.62). 通常,人们会认为,对与 n_1 反向的 $-n_1$,用同样的方法,即由 M_1 出发沿曲面 S 的光滑曲线不越过曲面 S 的边界,且连续地走遍曲面 S ,便得到了曲面 S 中与 $-n_1$ 同侧的全体法向量. 这样,便把曲面的两侧区分开来了.

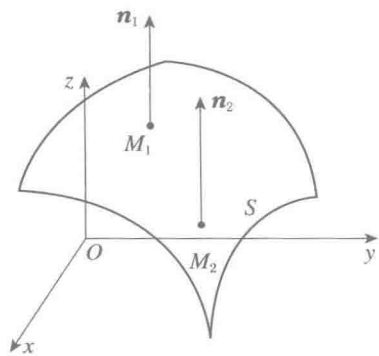


图 7.61 曲面的同侧

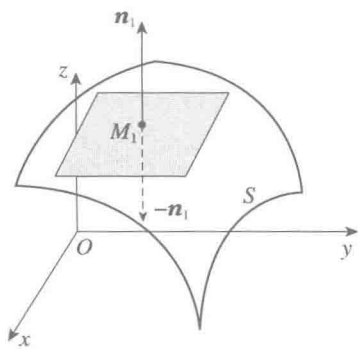


图 7.62 曲面的法向量

现在,问题在于,从 M_1 出发,沿曲面 S 的光滑曲线而不越过曲面 S 的边界且连续地变化,是否可能回到 M_1 时变成 $-n_1$? 也就是说, n_1 与 $-n_1$ 是否可能在曲面的同一侧. 再换句话说,是否存在曲面,它不是双侧的而是单侧的? 所谓默比

乌斯(A. F. Möbius, 1790~1868)带就是这种单侧曲面的典型例子. 将长方形纸条 $ABCD$ 先扭转一次, 然后使 B 与 D 及 A 与 C 粘贴起来(图 7. 63), 构成一条非闭的环带, 这便是默比乌斯带. 它的确具有上述单侧曲面的性质. 假如用一种颜色涂这条环带, 则可以不越过它的边界而涂遍它的全部. 对单侧曲面, 自然不便说流体“通过”它的流量, 因此, 我们以后只讨论双侧曲面.

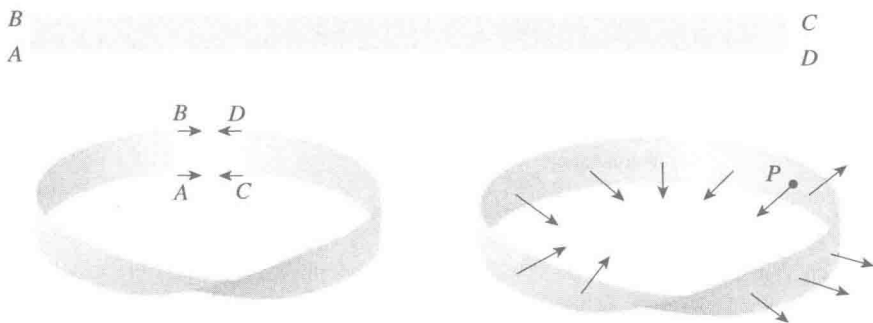


图 7. 63 默比乌斯带

设 S 是一双侧曲面. 根据上面对曲面的侧的描述, 如果在 S 上任一点 M 的法线上选定了—个确定的方向, 则曲面上全部点的同侧法线也随之确定, 也就是选定了曲面的一侧. 如果原先选定的法线方向改变, 则在其他点的法线方向也—律改变, 这样就确定了曲面的另一侧. 因此, 对双侧曲面要确定它的一侧, 只要在它上面任—点确定—法线方向就行了. 我们可选定它的一侧为正则, 这种取定正则的曲面, 又称为定向曲面或有向曲面.

下面具体讨论怎样确定曲面的侧.

设光滑曲面 S 由函数 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in D$) 确定, 其中 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. 这样, 曲面在每—点都有切平面, 从而在每—点都有确定的法线. 我们知道, 曲面 S 的单位法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right). \end{aligned}$$

可见三个分量都是 x, y 的连续函数, 即法线的方向是随点的位置而连续变动的. 因此, 对正负号的选择, 便表示确定了曲面的一侧. 例如, 若选取正号, 则 $\cos \gamma > 0$,

它表示法向与 z 轴正向的交角为锐角, 这就是通常所说的曲面的上侧. 若选取负号, 则所确定的一侧是曲面的下侧, 这时法线与 z 轴正向的交角是钝角.

设光滑曲面由参数方程

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

给出. 由曲面光滑性知

$$\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 \neq 0,$$

这时曲面 S 上的单位法向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2}} \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right). \end{aligned}$$

三个分量都是 u, v 的连续函数, 即法线的方向随点的位置而连续地变动. 这样, 如果选正号, 则表示选定了曲面的一侧. 如果选负号, 则表示选定了曲面的另一侧. 至于正号对应于曲面的哪一侧, 只要选一点计算出 \mathbf{n} , 再在图像上把 \mathbf{n} 表示出来, 便知道正号对应的是哪一侧.

对于封闭曲面, 通常把两侧分为内侧和外侧, 即法向量指向曲面所围立体内部的一侧为内侧, 而另一侧为外侧. 例如球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的内侧, 对于上半球面 ($z > 0$) 是下侧, 对于下半球面 ($z < 0$) 是上侧. 容易看出, 无论是内侧或外侧, 单位法向量都是随着点在球面上移动而连续变化.

我们常常会遇到由若干块光滑曲面片拼接而成的曲面, 例如, 立方体的表面就是这样的曲面. 如何给拼接曲面定向, 需要作进一步的说明.

首先, 拼接曲面由有限多块曲面片拼成, 其中任何两块至多只相交于边界上的一段曲线, 任意三块(或更多的块)至多只能相交于边界上的一个点. 其次, 为了给整块曲面定向, 每一块小曲面片应是可定向的. 一旦其中的一块曲面片的正向确定之后, 它的边界曲线也随之定了方向. 规则是: 当一个人站在正侧沿边界正向绕行时, 曲面片的内部应在人的左手边, 曲面的定向与它的边界曲线的定向符合这一规则时, 称它们的定向是协调的. 如果两个有一段公共边界的曲面片, 它们各自的定向使得在它们的一段公共边界上的定向正好相反, 那么这两块曲面片的定向也称为是协调的. 设 S 是一个拼接曲面, 如果它的任何两块曲面片(有公共边界)都有协调的定向, 这时我们说拼接曲面 S 是可定向的. 我们还约定: 把协调的各块曲面片上的正向当做 S 的正向.

7.6.2 第二型曲面积分

有了曲面的定向,我们就可以来讨论流体的速度场 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ 的流量问题了. 设 S 是双侧曲面, 取定一侧为正侧, 对应的单位法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 的每一个分量都是曲面上点 (x, y, z) 的连续函数. 设

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

其中 P, Q, R 在 S 上连续. 我们要求流体在单位时间内从 S 的负侧流向正侧的流量.

沿用前面的做法, 将 S 分成若干小块 S_1, S_2, \dots, S_n , 并记每小块曲面的面积为 ΔS_i , 在每一小块曲面 S_i 上任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 在这点的指向曲面 S 正侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 在这点的流速向量为 $\boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. 当 S_i 的直径很小时, 可以把 S_i 看做切平面上的一小块面积为 ΔS_i 的小区域, 而在这小块区域内每点的流速看做是相同的, 可取为 $\boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. 这样, 单位时间内流过 S_i 的流体就是以 ΔS_i 为底, $|\boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)|$ 为斜长的一个柱体(图 7.64). 已知 S_i 的法向量为 $\boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 则得到这个斜柱体的体积为

$$\boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

这就是单位时间内流过 S_i 的流量. 注意这个量可正可负. 如果是正的, 这时 \boldsymbol{v} 和 \boldsymbol{n} 的交角是锐角, 它表示流体由负侧流到正侧. 如果是负的, 这时 \boldsymbol{v} 与 \boldsymbol{n} 的交角是钝角, 它表示流体由正侧流到负侧. 但无论如何, 它的大小是单位时间流过 S_i 的流量. 因此, 单位时间内流过整个 S 的流量就近似为

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

当我们将曲面 S 无限细分时, 上面的和式的极限就是单位时间内流过曲面 S 的流量.

这种形式的“极限和”也常出现在其他向量场, 如电场的电通量与磁场的磁通量中, 因此有必要把它概括成一般的概念.

由此导出下面的第二型曲面积分的定义.

定义 7.6.1 设 $\boldsymbol{v}(M)$ 是定义在 \mathbb{R}^3 空间区域 V 中的一个向量场, S 是 V 中一张光滑的指定了正侧的双侧曲面, $\boldsymbol{n}(M)$ 是曲面 S 上指向正侧的单位法向量. 用任

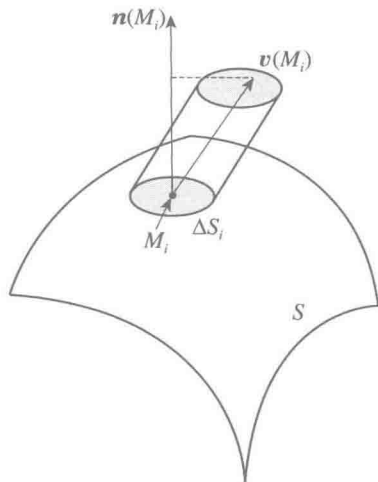


图 7.64 流体的流量

意分法将曲面 S 分成 n 小块曲面 S_1, S_2, \dots, S_n , 并记每小块曲面的面积为 ΔS_i , 在每一小块曲面 S_i 上任意取一点 M_i , 作黎曼和

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{n}(M_i) \Delta S_i.$$

如果当所有小块曲面的最大直径 λ 趋于零时, 上述和式的极限存在, 且极限值与分法和取点无关, 则称此极限为向量场 $\mathbf{v}(M)$ 在定向曲面 S 上的第二型曲面积分, 或称之为向量场 $\mathbf{v}(M)$ 通过定向曲面 S 的通量, 记为 $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$, 即

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}(M_i) \cdot \mathbf{n}(M_i) \Delta S_i.$$

从第二型曲面积分的定义, 可知第二型曲面积分具有以下性质(请读者自己给出证明):

(1) (对场的线性性) 若 $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$, 则有

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = c_1 \iint_S \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} dS + c_2 \iint_S \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dS.$$

(2) (对积分曲面的可加性) 若定向曲面 S 是由定向曲面 S_1 和 S_2 拼接而成的, 则有

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

(3) (对曲面的方向性) 若用 S^+ 和 S^- 表示曲面的不同两侧, 则

$$\iint_{S^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{S^+} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.$$

我们引入有向面积元 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, 其模长为 dS , 方向与正法向量 \mathbf{n} 的方向一致. 这样第二型曲面积分又可写为

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

第二型曲面积分还有其他表达方式. 设

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

正法向量

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中 α, β, γ 是 \mathbf{n} 的方向角, 即分别是 \mathbf{n} 与 x 轴、 y 轴和 z 轴的正向的夹角, 则第二型曲面积分也可以表示为

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

因为 $\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS$ 是有向面积元 dS 在平面 Oyz, Ozx, Oxy 上的投影, 可分别记为

$$dydz = \cos \alpha dS, \quad dzdx = \cos \beta dS, \quad dxdy = \cos \gamma dS,$$

所以第二型曲面积分又可以表示为

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

这是普遍使用的第二型曲面积分的记法.

利用投影的特性, 我们得到下述性质:

若 S 是母线平行于 x 轴的定向柱面, 则 $\iint_S P dydz = 0$; 若 S 是母线平行于 y 轴的定向柱面, 则 $\iint_S Q dzdx = 0$; 若 S 是母线平行于 z 轴的定向柱面, 则 $\iint_S R dxdy = 0$.

设光滑曲面 S 的参数方程为

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad ((u, v) \in D).$$

曲面 S 指定侧的单位法向量为

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|},$$

其中正负号的选择, 应得上式右边与曲面 S 的指定侧一致, 已知

$$dS = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| du dv.$$

由第一型曲面积分的算法知

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \pm \iint_D \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv \\ &= \pm \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv \\ &= \pm \iint_D \left[P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv. \end{aligned}$$

若曲面 S 由显式表示, 即 $z = f(x, y) ((x, y) \in D)$, 则有

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \pm \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dx dy \\ &= \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy, \end{aligned}$$

其中正负号的选择,取决于曲面 S 的定侧是上侧还是下侧.

例 7.6.1 求电场强度 $E = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$ 通过球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 外侧的电通量, 其中 \mathbf{r} 是径向向量, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 在球面 S 外侧的单位法向量为 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$, 故电通量为

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_S \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{R} dS = \iint_S \frac{q}{R^2} dS = \frac{q}{R^2} \iint_S dS \\ &= \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \end{aligned} \quad \square$$

本例说明电场强度通过球面的电通量与球面的半径无关.

例 7.6.2 计算第二型曲面积分

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

其中 S 是顶点为 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 的三角形的上侧(图 7.65).

解 方法 1 易知曲面 S 的方程为 $x + y + z = 1$, 它在平面 Oxy 上的投影为 $x = 0, y = 0$ 和 $x + y = 1$ 所围成的区域 D , 因此

$$\begin{aligned} \iint_S z dx dy &= \iint_D (1 - x - y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

由积分表达式的对称性及曲面的对称性, 有

$$\iint_S x dy dz = \iint_S y dz dx = \frac{1}{6},$$

因此

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{1}{2}.$$

方法 2 利用两种曲面积分的关系. 因为曲面 S 为 $x + y + z = 1$ 的上侧, 所以其单位法向量为 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 因此

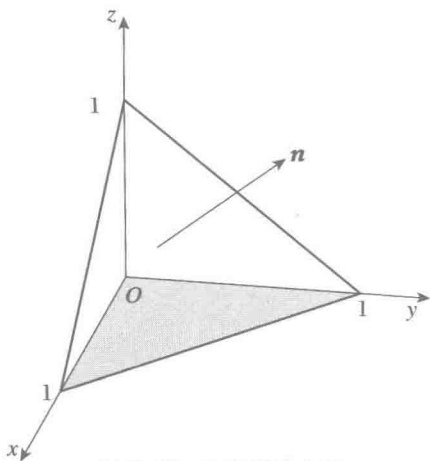


图 7.65 三角形的上侧

$$\begin{aligned}\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}\quad \square$$

例 7.6.3 计算第二型曲面积分

$$\iint_S (2x + z) dy dz + z dx dy,$$

其中 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧.

解 因为曲面 S 的显式方程为 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 所以 (x, y) 的取值范围为区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$. 由于曲面 S 的定侧是下侧, 所以

$$\begin{aligned}\iint_S (2x + z) dy dz + z dx dy &= - \iint_D \begin{vmatrix} 2x + z & 0 & z \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} dx dy \\ &= - \iint_D [(x^2 + y^2) - (2x + x^2 + y^2)2x] dx dy.\end{aligned}$$

再利用极坐标变换, 得

$$\begin{aligned}\iint_S (2x + z) dy dz + z dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (4r^3 \cos^2 \varphi + 2r^4 \cos \varphi - r^3) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \varphi + \frac{2}{5} \cos \varphi - \frac{1}{4} \right) d\varphi \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}\quad \square$$

例 7.6.4 计算第二型曲面积分

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$) 的上侧.

解 对于 $\iint_S x^2 dy dz$, 将半球面 S 分成前侧曲面 S_1 和后侧曲面 S_2 , 其方程分别是

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad (z \geq 0), \\ x &= -\sqrt{1 - y^2 - z^2} \quad (z \geq 0).\end{aligned}$$

易知, S_1 和 S_2 在平面 Oyz 上的投影都是区域 D , 于是

$$\iint_S x^2 dy dz = \iint_{S_1} x^2 dy dz + \iint_{S_2} x^2 dy dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D (1 - y^2 - z^2) dydz - \iint_D (1 - y^2 - z^2) dydz \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

由对称性, 可知 $\iint_S y^2 dzdx = 0$, 而

$$\begin{aligned}
 \iint_S z^2 dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

因此

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

例 7.6.5 计算第二型曲面积分

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx,$$

其中 S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($z \geq 0$) 的上侧.

解 利用广义球面坐标变换, 得上半椭球面 S 的参数方程为

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta \quad \left(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

因为

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = bc \sin^2 \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} = ac \sin^2 \theta \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = abc \cos \theta \sin \theta > 0,$$

所以向量 $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi$ 指向 S 的上侧, 因此

$$\begin{aligned}
 \iint_S x^3 dydz &= \iint_D a^3 \sin^3 \theta \cos^3 \varphi \cdot bc \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi \\
 &= a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{2}{5} \pi a^3 bc.
 \end{aligned}$$

同理, 可得

$$\iint_S y^3 dz dx = \frac{2}{5} \pi a b^3 c,$$

于是有

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx = \frac{2}{5} \pi a b c (a^2 + b^2). \quad \square$$

7.6.3 高斯公式

在一定的条件下,沿着空间区域边界的第二型曲面积分,可以转化成在这个区域上的三重积分.

定理 7.6.1(高斯公式) 设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成.若函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在包含 V 在内的一个区域中具有一阶连续偏导数,则有

$$\oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

其中 S 的方向为外侧.

证明 仿照格林公式的证明,先考虑相对简单的区域. V 如图 7.66 所示,它的边界由下部分 S_1 、上部分 S_2 、中部分 S_3 构成.上部分 S_2 由方程 $z = z_2(x, y)$ 给出;下部分 S_1 由方程 $z = z_1(x, y)$ 给出;中部分由母线平行于 z 轴的柱面 S_3 构成. S_1 与 S_2 在平面 Oxy 上有公共投影区域 D .因此, V 可表示为

$$V = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}. \quad (7.6.1)$$

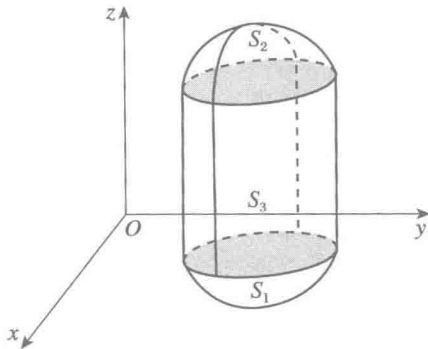


图 7.66 简单空间区域 V

由三重积分和第二型曲面积分的计算方法,得

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] dx dy \\
 &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy.
 \end{aligned}$$

因为 S_3 在平面 Oxy 上的投影面积为 0, 所以

$$\iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = 0,$$

从而得

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_S R dx dy. \quad (7.6.2)$$

类似地, 若 V 又可表示为

$$V = \{(x, y, z) \mid x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in D\},$$

其中 D 是 V 在平面 Oyz 上的投影区域, 则有

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_S P dy dz. \quad (7.6.3)$$

若 V 还可表示为

$$V = \{(x, y, z) \mid y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z), (x, z) \in D\},$$

其中 D 是 V 在平面 Oxz 上的投影区域, 则有

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_S Q dz dx. \quad (7.6.4)$$

对于一般的区域 V , 可以通过添加有限块光滑曲面, 把它分为有限个具有式(7.6.1)的子区域的并. 对每个子区域分别运用式(7.6.2), 然后相加. 注意到在添加的曲面上, 恰好对不同的两侧各积分了一次, 因而互相抵消. 从而式(7.6.2)对一般区域 V 也成立. 同理, 可证式(7.6.3)和(7.6.4)对一般区域 V 也成立, 将三式相加即得所要证明的高斯公式. \square

我们知道利用格林公式, 可以通过第二型曲线积分来表示闭曲线所围成的图形的面积. 同样, 利用高斯公式, 可以通过第二型曲面积分来表示闭曲面所围成的立体的体积. 不难看出

$$\begin{aligned}
 V &= \oiint_S x dy dz = \oiint_S y dz dx = \oiint_S z dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \oiint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy.
 \end{aligned}$$

例 7.6.6 计算第二型曲面积分

$$\oiint_S \frac{x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 因为在 S 上, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 所以

$$\oiint_S \frac{x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{a^2} \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy.$$

由高斯公式得

$$\begin{aligned} \oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^a r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{12}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

因此

$$\oiint_S \frac{x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{12}{5} \pi a^3. \quad \square$$

请读者注意, 能否对 $P = \frac{x^3}{x^2 + y^2 + z^2}$, $Q = \frac{y^3}{x^2 + y^2 + z^2}$, $R = \frac{z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$ 直接用高斯公式?

7.6.4 斯托克斯公式

斯托克斯公式是格林公式在空间上的推广. 斯托克斯公式把沿一块曲面边界的第二型曲线积分同这块曲面上的第二型曲面积分联系起来.

定理 7.6.2 (斯托克斯公式) 设 S 是以曲线 L 为边界的分片光滑的定向曲面. 如果函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在包含曲面 S 在内的某个空间区域上具有连续的一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

其中 L 的环行方向与 S 的定向符合右手法则, 即若四个手指的方向为 L 的方向, 则大拇指所指的方向就是曲面 S 的定向.

证明 先证

$$\oint_L P dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

设曲面 S 的方程为 $z = z(x, y)$, 它在平面 Oxy 上的投影区域为 D , 过 D 中的点且平行于 z 轴的直线与曲面 S 只交于一点. L 是 S 的边界, 它在平面 Oxy 上的投影为 l . 取曲面 S 的上侧为正侧, 则单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right).$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

设曲线 l 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

则曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b),$$

于是, 由第二型曲线积分的计算法则得

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) x'(t) dt \\ &= \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx. \end{aligned}$$

由格林公式有

$$\begin{aligned} \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx &= - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) \frac{dx dy}{\cos \gamma} \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

因此

$$\oint_L P dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

如果还假设曲面 S 也与平行于 x 轴或 y 轴的直线相交不多于一点, 则根据同样的

推理,又得到

$$\oint_L Q dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz,$$

$$\oint_L R dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx.$$

把以上三个式子加起来,便得到 S 是特殊曲面时的斯托克斯公式.

对于一般的分片光滑曲面,总可以引入辅助曲线把它分成有限个子曲面,使得每个子曲面满足上述的条件,即任何平行于坐标轴的直线与它相交不多于一点.对这些子曲面及其边界分别得出斯托克斯公式,相加后由于在辅助曲线上的积分相互抵消即可化成整个曲面 S 及其边界 L 上的斯托克斯公式. \square

当曲面 S 是平面 Oxy 上的一个区域 D 时,不难看出,斯托克斯公式就变成了格林公式.

利用行列式,我们可把斯托克斯公式写成如下便于记忆的形式:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

例 7.6.7 计算第二型曲线积分

$$I = \int_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz,$$

其中 L 是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a, h > 0$) 的交线,从 x 轴正向看去沿逆时针方向(图 7.67 和 7.68).

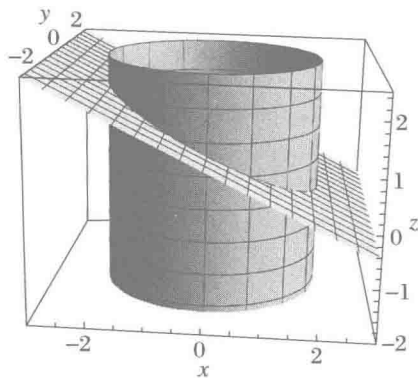


图 7.67 柱面与平面相交

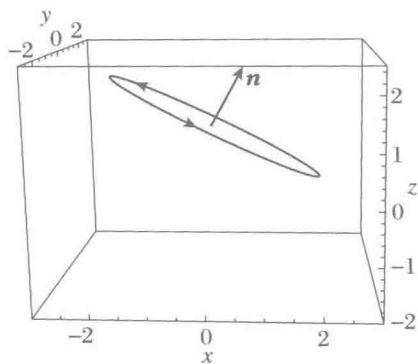


图 7.68 柱面与平面的交线

解 方法 1 设平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 上由它与柱面的交线围成的平面块为曲面 S , 则 S 在平面 Ozx 上的投影为直线段, 因而面积为零, 即 $dzdx = 0$; S 在平面 Oxy 上的投影为圆盘 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 记为 D_{xy} ; S 在平面 Oyz 上的投影为椭圆盘 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-h)^2}{h^2} \leq 1$, 记为 D_{yz} . 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \\ &= -2 \iint_S dydz + dxdy = -2 \iint_{D_{yz}} dydz - 2 \iint_{D_{xy}} dxdy \\ &= -2\pi ah - 2\pi a^2 = -2\pi a(h+a). \end{aligned}$$

方法 2 曲面 S 见方法 1, 则 S 的单位法向量

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right)$$

是常向量, S 是半轴分别为 a 和 $\sqrt{a^2 + h^2}$ 的椭圆. 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\ &= -2 \iint_S (\cos \alpha + \cos \gamma) dS = -2 \frac{a+h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \iint_S dS \\ &= -2 \frac{a+h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \pi a \sqrt{a^2 + h^2} = -2\pi a(h+a). \end{aligned}$$

方法 3 直接用第二型曲线积分的计算公式. 曲线 L 的参数方程为

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = h(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \{ [a \sin t - h(1 - \cos t)](-a \sin t) \\ &\quad + [h(1 - \cos t) - a \cos t] a \cos t + a(\cos t - \sin t) h \sin t \} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 - ah + ah \sin t + ah \cos t) dt \\ &= -2\pi a(h+a). \end{aligned}$$

□

到此为止,我们对各种积分的概念及其相互间的关系已经有了较完整的认识.二重积分、三重积分、两种类型的曲线积分和两种类型的曲面积分,它们来自不同的物理背景,从中抽象出不同的数学定义,却有着奇妙的联系.格林公式、高斯公式和斯托克斯公式描述了这些联系,反映出的共同点是它们都给出了空间或平面区域上的积分与其边界上的积分的关系,它们都是牛顿-莱布尼茨公式在高维空间的推广.

习题 7.6

1. 计算下列第二型曲面积分:

(1) $\oiint_S (x + y^2 + z) dx dy$, S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧;

(2) $\iint_S xyz dx dy$, S 是柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 在 $x \geq 0, y \geq 0$ 两卦限内被平面 $y = 0$ 和 $y = h$ 所截下部分的外侧;

(3) $\iint_S xy^2 z^2 dy dz$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧 $x \leq 0$ 的部分;

(4) $\iint_S yz dz dx$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧的上半部分 ($z \geq 0$);

(5) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, S 是平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限,从 z 轴正方向看的上侧;

(6) $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$, S 是圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧;

(7) $\iint_S xz^2 dy dz + x^2 y dz dx + y^2 z dx dy$, S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

(8) $\oiint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$, 其中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数, S 是直角平行六面体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 的外侧.

2. 求场 $\boldsymbol{v} = (x^3 - yz)\boldsymbol{i} - 2x^2 y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过长方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ 的外侧表面 S 的通量.

3. 利用高斯公式,计算下列曲面积分:

(1) $\oiint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧;

- (2) $\oiint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy$, S 是由 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体的外侧面;
- (3) $\oiint_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy$, S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧;
- (4) $\oiint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S 是球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ 的外侧;
- (5) $\oiint_S (x + 1)dydz + ydzdx + (xy + z)dxdy$, S 是以 $O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ 为顶点的四面体的外表面;
- (6) $\oiint_S xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 的外侧;
- (7) $\iint_S (y^2 + z^2)dydz + (z^2 + x^2)dzdx + (x^2 + y^2)dxdy$, S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;
- (8) $\iint_S (x - z)dydz + (y - x)dzdx + (z - y)dxdy$, S 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧.

4. 求引力场 $F = -km \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ 通过下列闭曲面外侧的通量:

- (1) 空间中任一包围质点 m (在原点) 的闭曲面;
- (2) 空间中任一不包围质点 m 的闭曲面;
- (3) 其上有质点 m 的光滑闭曲面.

5. 证明: 任意光滑闭曲面 S 围成的立体体积可以表示成

$$V = \frac{1}{3} \oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy,$$

其中积分沿曲面 S 的外侧进行.

6. 设 \mathbf{c} 是常向量, S 是任意光滑闭曲面. 证明: $\oiint_S \cos(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{n}})dS = 0$, 其中 $(\widehat{\mathbf{c}, \mathbf{n}})$ 表示向量 \mathbf{c} 与曲面法向量 \mathbf{n} 的夹角.
7. 设 L 是平面 Oxy 上的光滑的简单闭曲线, 遵从逆时针方向. 立体 V 是柱体, 以 L 为准线, 以 L 在平面 Oxy 内所围的平面区域 D 为底, 侧面是母线平行于 z 轴的柱面, 高为 1. 试写出向量场 $\mathbf{v} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 在 V 上的高斯公式, 并由此来证明

格林公式.

8. 计算下列曲线积分:

- (1) $\int_L ydx + zdy + xdz$, 其中 L 是顶点为 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 的三角形边界, 从原点看去, L 沿顺时针方向;
- (2) $\int_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L 是圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$ 的交线, 从 x 轴的正方向看来, L 沿逆时针方向;
- (3) $\int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 与立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 表面的交线, 从 z 轴的正向看来, L 沿逆时针方向;
- (4) $\int_L y^2 dx + xydy + xzdz$, 其中 L 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与平面 $y = z$ 的交线, 从 z 轴的正向看来, L 沿逆时针方向;
- (5) $\int_L (y^2 - y)dx + (z^2 - z)dy + (x^2 - x)dz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, L 的方向与 z 轴的正向成右手系;
- (6) $\int_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴的正向看来, L 沿逆时针方向.

9. 在积分 $\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$ 中, 路径 L 是平面 Oxy 上正向的圆 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$.

利用斯托克斯公式把曲线积分化为以 L 为边界所围区域 S 上的曲面积分:

- (1) S 取平面 Oxy 上的圆面 $x^2 + y^2 \leq R^2$;
 - (2) S 取半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 两者的结果相同吗?
10. 证明: 常向量场 c 沿任意光滑闭曲线的环量都等于 0.
11. 求向量场 $v = (y^2 + z^2)i + (z^2 + x^2)j + (x^2 + y^2)k$ 沿闭曲线 L 的环量, 其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ 与 $x^2 + y^2 = Rx$ 的交线, 从 x 轴的正向看来, L 沿逆时针方向.

7.7 场论初步

牛顿-莱布尼茨公式把单变量函数的微分学与积分学联系起来, 而联系多变量

函数的微分学与积分学的是格林公式、高斯公式和斯托克斯公式. 这些公式在物理学中有重要的应用. 本节将介绍场的梯度、旋度和散度以及保守场、无源场等物理学概念, 并将前面所学的积分理论运用到场论中.

7.7.1 场的概念

场是从大量物理现象中抽象出来的一个物理概念. 物体周围空间的每一点都存在引力, 电荷周围各点都具有一定的电位, 气流在空间中每一点都有确定的速度, 受热物体的内部形成一定的温度分布, 这类例子举不胜举. 一个物理量在空间的分布称为该物理量的场, 如重物的引力场、电荷的电位场、气流的速度场、物体的温度场等等. 按照物理量是数量还是向量, 场分为数量场和向量场. 电位场和温度场是数量场, 引力场和速度场是向量场.

从数学上看, 一个场就是定义在空间或空间的某个区域上的函数. 区域 V 上的数量场对应 V 上的三元函数 $u = u(M)$ ($M \in V$), 而向量场则对应向量值函数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M)$ ($M \in V$).

在空间中选定直角坐标系后, 点 M 用它的坐标 (x, y, z) 表示, 而场就表示为 $u(x, y, z)$ 或 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ 的形式. 但是注意, 选取不同的坐标系只能改变一个场的数学表达形式, 而不能改变场的物理性质.

7.7.2 数量场的梯度

首先考虑数量场. 空间中的点可以沿着不同的方向移动, 数量场在各个方向上的变化率就显得十分重要. 例如, 大气沿着压强减小最快的方向流动, 热量沿着温度下降最快的方向传导. 因此必须研究数量场沿着任意方向的变化率以及在哪个方向变化最快的问题.

设在空间区域 V 上确定一个数量场 $u = u(M)$, M_0 是 V 内的一点, L 是从 M_0 发出的一条射线, 它的方向向量用 \boldsymbol{l} 表示(图 7.69). 为了研究 u 在 M_0 沿方向 \boldsymbol{l} 的变化快慢, 可在射线 L 上 M_0 的附近任意取一点 M , 作比式

$$\frac{u(M) - u(M_0)}{|M_0 M|},$$

其中 $|M_0 M|$ 表示线段 $M_0 M$ 的长度. 它表示场 u 沿方向 \boldsymbol{l} 从 M_0 至 M 的平均变化率. 若当 M 沿射线 L 趋于 M_0 时, 这个比式的极限存在, 就把此极限称为场 u 在点 M_0 处沿方向 \boldsymbol{l} 的变化率或方向导数, 记为 $\left. \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{M_0}$ (图 7.70), 即

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|M_0 M|}.$$

特别当 $l=i$ 时, 有 $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$, 即偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是场 u 沿 x 轴正向的方向导数. 同样, 偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 分别是场 u 沿 y 轴和 z 轴正向的方向导数.

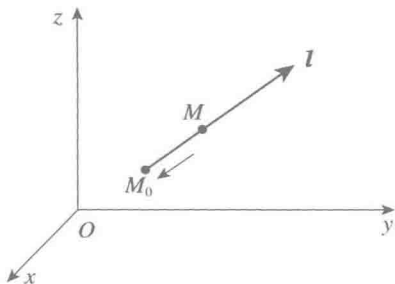
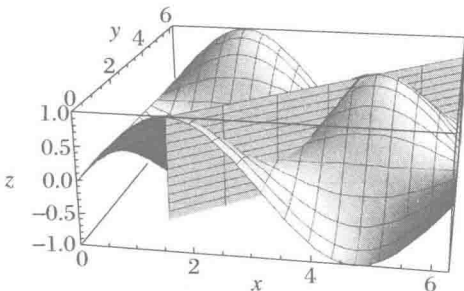
图 7.69 空间区域 V 上的射线

图 7.70 二元函数的方向导数

在空间中引入直角坐标系后, 下面的定理提供了方向导数的简便计算方法.

定理 7.7.1 数量场 $u(x, y, z)$ 在点 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 则 $u(x, y, z)$ 在点 M_0 处沿任何方向 l 的方向导数都存在, 且有公式

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)},$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 l 的方向余弦.

证明 设 L 是过点 M_0 、方向向量为 l 的射线, $M = (x, y, z)$ 是 L 上的一点, 则

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x = \rho \cos \alpha, \\ y - y_0 = \Delta y = \rho \cos \beta, \\ z - z_0 = \Delta z = \rho \cos \gamma, \end{cases}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. 由于数量场 $u(x, y, z)$ 在点 M_0 处可微, 所以有

$$u(M) - u(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \Delta z + o(\rho).$$

于是, 有

$$\frac{u(M) - u(M_0)}{\rho} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \frac{\Delta z}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma + \frac{o(\rho)}{\rho}.$$

令 $\rho \rightarrow 0$, 取极限, 得

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}. \quad \square$$

定理中的公式又可用向量的内积表示为

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

对于平面数量场 $u(x, y)$, 若它在点 (x_0, y_0) 处可微, 则它在点 (x_0, y_0) 处沿任一方向 $l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \cdot (\cos \alpha, \cos \beta). \end{aligned}$$

例 7.7.1 求数量场 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处沿方向向量 $l = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 的方向导数.

解 易知

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{(1,1,2)} &= (y^2 - yz, 2xy - xz, 3z^2 - xy) \Big|_{(1,1,2)} \\ &= (-1, 0, 11), \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,1,2)} = (-1, 0, 11) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) = 5. \quad \square$$

对数量场在给定的点处沿哪一个方向变化最快问题的研究, 可以导出所谓的梯度概念.

定义 7.7.1(梯度) 数量场 u 在点 M 处的梯度是一个向量, 记为 $\text{grad } u$ 或 ∇u , 它的大小是数量场 u 在点 M 处所有方向导数的最大值, 它的方向是取到这个最大值所沿的那个方向.

梯度的定义是与坐标系无关的, 但在取定坐标系后, 可以导出梯度的计算公式. 设数量场 $u(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处可微, 方向向量 l 的方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则 $u(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处沿方向向量 l 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

设 $l^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是方向向量 l 的单位向量, 并引入向量 $g = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = g \cdot l^0 = |g| \cos \theta,$$

其中 θ 是向量 g 与 l^0 之间的夹角. 这个公式说明方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 等于向量 g 在方向 l^0 上的投影. 可见当 $\theta=0$, 且 g 与 l^0 的方向一致时, 方向导数就取到最大值 $|g|$. 根据定义, 向量 g 就是数量场 u 在点 M 处的梯度. 由此得到梯度在直角坐标系下的表达式为

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

显然, 梯度是一个数量场到向量场的映射

$$\text{grad}: u \mapsto \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

求数量场的梯度是一种特定的微分运算, 容易验证它符合以下运算法则.

- (1) $\text{grad}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \text{grad } u_1 + c_2 \text{grad } u_2$, 其中 c_1, c_2 是任意常数;
- (2) $\text{grad}(u_1 u_2) = u_1 \text{grad } u_2 + u_2 \text{grad } u_1$;
- (3) $\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u$.

由前面的讨论知, 数量场 u 沿着梯度正向的方向导数最大, 即场值增加得最快, 其增加率等于 $|\text{grad } u|$, 而沿着梯度负向的方向导数最小, 即场值减小得最快, 减小率为 $-|\text{grad } u|$. 因此, 大气沿着压强 p 减小最快的方向流动, 就是沿着 $-\text{grad } p$ 的方向流动; 热量沿着温度 T 下降最快的方向 $-\text{grad } T$ 的方向传导; 若 $h(x, y, z)$ 表示某一地形的高度, 则沿着 $\text{grad } h$ 的方向的坡度最陡, 而雨水落地后必沿着 $-\text{grad } h$ 的方向流动.

满足 $u(x, y, z) = c$ 的点 (x, y, z) 构成的曲面称为数量场 u 的等值面. 在等值面上数量场 u 的值不变. 注意到曲面 $u(x, y, z) = c$ 在 (x, y, z) 处的法向量为 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, 它正好是数量场 u 在 (x, y, z) 处的梯度. 这就说明了数量场在一点的梯度垂直于过该点的等值面, 并指向数量场增加的方向, 其大小等于数量场 u 沿此方向的方向导数. 如图 7.71 和 7.72 所示.

例 7.7.2 设 $r = xi + yj + zk$, $r = |r|$. 求 $\text{grad } r$.

解 由于 $r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 所以有

$$\text{grad } r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r}{r}. \quad \square$$

它表示点 M 处单位体积内产生的流量,称为 M 处的源密度.这显然是描述流速场中各点局部性质的重要物理量.

将上述对于流体建立起来的概念推广到一般的向量场,便引入了如下定义:

定义 7.7.2(散度) 设 \boldsymbol{v} 是区域 G 上的向量场, M 是 G 内的一点.在 G 中围绕点 M 作任意的闭曲面 S , V 是 S 所围成的闭区域,其体积记为 $|V|$, \boldsymbol{n} 是 S 外侧的单位法向量.如果当区域 V 无限收缩于点 M 时,比值

$$\frac{1}{|V|} \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

的极限存在,就称该极限为向量场 \boldsymbol{v} 在点 M 处的散度(图 7.73),记为 $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$.

散度的定义与坐标系无关.设在直角坐标系中,向量场

$\boldsymbol{v} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$,
其中分量 P, Q, R 在空间区域 G 中有连续的一阶偏导数.不难证明散度在直角坐标系下的表达式为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (7.7.1)$$

事实上,由高斯公式知

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

再利用积分中值定理,得

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M'} |V|,$$

其中 M' 是区域 V 中的一点.当区域 V 无限收缩于点 M 时, $M' \rightarrow M$, 因此

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{1}{|V|} \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M.$$

利用散度,高斯公式又可以表示为

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} dV. \quad (7.7.2)$$

上式给出了高斯公式的物理学解释:单位时间流出闭曲面 S 的流量,等于区域 V 内所有点“源”和“汇”的总和.有时,我们也称高斯公式为散度公式.

当向量场 \boldsymbol{v} 在区域 V 内每一点的散度皆为零,即 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv 0$ 时, V 内的每一点

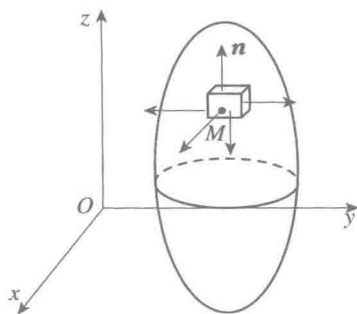


图 7.73 向量场的散度

既不是“源”也不是“汇”，这时称 \boldsymbol{v} 为无源场.

设 \boldsymbol{v} 为区域 G 中的无源场. 若闭曲面 S 的内部均在 G 中, 则有

$$\oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0.$$

这说明, 流过闭曲面 S 的流量的代数和为 0, 即流入与流出 S 的流量相互抵消, 这与“无源”的直观感觉是完全符合的.

利用散度的表达式, 容易证明散度符合下列的运算法则:

(1) $\operatorname{div}(c_1 \boldsymbol{v}_1 + c_2 \boldsymbol{v}_2) = c_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 + c_2 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2$, 其中 c_1, c_2 是任意常数;

(2) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{v}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{v}$, 其中 u 是任意数量场.

例 7.7.4 求电场强度 $\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$ 的散度, 其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \neq \mathbf{0}$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 根据散度的运算法则, 有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{q}{r^3} \operatorname{div} \boldsymbol{r} + \left(\operatorname{grad} \frac{q}{r^3} \right) \cdot \boldsymbol{r} = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^4} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} = 0. \quad \square$$

例 7.7.5 求电场强度 $\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过包围点电荷的任意闭曲面 S 外侧的电通量, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 在 S 内以点电荷为中心作一半径为 ϵ 的球面 S_ϵ , 用 V 表示由闭曲面 S 和 S_ϵ 所围成的环形区域(图 7.74), 则由高斯公式得

$$\iint_{S+S_\epsilon} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{E} dV,$$

这里法向量 \boldsymbol{n} 指向 $S + S_\epsilon$ 的外侧. 由于当 r 不为零时, $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ 恒为零, 所以

$$\iint_{S+S_\epsilon} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0.$$

因此

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_{S_\epsilon} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS,$$

其中法向量 \boldsymbol{n} 指向 S 和 S_ϵ 的外侧. 在 S_ϵ 上, $r = \epsilon$, $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, 于是得

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_{S_\epsilon} \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} dS = 4\pi q. \quad \square$$

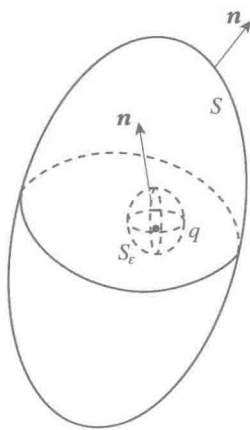


图 7.74 向量场的散度

顺便指出,如果 S 是不包围点电荷的任意闭曲面,则显然有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

7.7.4 向量场的旋度

向量场 \mathbf{v} 沿闭合曲线 L 的环量为

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

向量场的环量与向量场的旋转性态有关,这可由流体的涡旋运动来说明.

设流体在点 M 附近绕过 M 的一条轴线旋转并形成旋涡,流体的速度场为 \mathbf{v} . 现任取一条围绕点 M 的平面闭合曲线 L ,使 L 的环行方向与平面的法向量 \mathbf{n} 组成右手螺旋系统(图 7.75).若设 L 是一个小叶轮的周界,轮轴的方向为法向量 \mathbf{n} ,则在流体的推动下,这个小叶轮开始绕自身的轴旋转.旋转的快慢除了取决于沿 L 的速度环量的大小外,还与轮盘的半径和轮轴的方向有关.实验表明,当轮轴的方向与流体旋转轴线的方向 $\boldsymbol{\omega}$ 一致时,叶轮的转动最快.假定曲线 L 围成的平面区域 S 的面积为 ΔS ,于是可用比值

$$\frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

来表示 L 内的流体围绕方向 \mathbf{n} 旋转的平均强度.而当 S 无限收缩于 M 点时,我们就把极限

$$\lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

称为流体在点 M 处绕方向 \mathbf{n} 的涡量.这个涡量刻画了位于 M 处的流体绕方向 \mathbf{n} 转动的强度.显然当方向 \mathbf{n} 与这流体自身的旋转轴线的方向 $\boldsymbol{\omega}$ 一致时,涡量将达到最大值.为了描述一般的向量场,可把平面曲线推广到任意曲面的边界,并引出如下重要的概念:

定义 7.7.3 设 $\mathbf{v}(M)$ 是定义在空间区域 V 中的一个向量场, M 是 V 中的任一点, \mathbf{n} 是在点 M 处取定的单位向量.在 V 内过 M 作任意光滑的且以 \mathbf{n} 为法向量的曲面元 S ,设其面积为 ΔS ,它的边界是逐段光滑的闭曲线 L .选取 L 的环行方向,使与向量 \mathbf{n} 组成右手螺旋系统.如果当曲面元 S 无限收缩于 M 点,而在 M 处的法向量 \mathbf{n} 保持不变时,平均环量

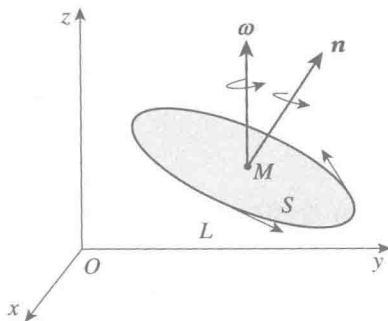


图 7.75 向量场的涡量

$$\frac{1}{\Delta S} \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

的极限存在,就称此极限为场 \boldsymbol{v} 在 M 点处绕方向 \boldsymbol{n} 的涡量,记为 $\Omega_n(M)$,并且把这些涡量的最大值以及取到最大值的方向所构成的一个向量称为向量场 \boldsymbol{v} 在点 M 的旋度,记为 $(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_M$.

如同数量场的梯度与方向微商的关系一样,向量场的旋度与涡量也有类似的关系.即旋度是一个向量,它的模等于涡量的最大值,其方向就是涡量取到最大值时所沿的方向.

旋度的定义与坐标系无关.设在直角坐标系中,向量场

$$\boldsymbol{v} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

其中分量 P, Q, R 在空间区域 G 中有连续的一阶偏导数.可以证明:旋度在直角坐标系下的表达式为

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \boldsymbol{k}. \quad (7.7.3)$$

事实上,记上式右边的向量为 $\boldsymbol{\Omega}$,则斯托克斯公式可以表示为

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} dS.$$

利用积分中值定理,得

$$\iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n} dS = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n})_{M'} \Delta S,$$

其中 M' 是曲面 S 上的一点.当曲面 S 无限收缩于点 M 时, $M' \rightarrow M$, 所以

$$\Omega_n(M) = \lim_{S \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{n})_M$$

就是涡量等于向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在法方向 \boldsymbol{n} 上的投影.由此可见,当 \boldsymbol{n} 的方向与 $\boldsymbol{\Omega}$ 一致时,涡量 $\Omega_n(M)$ 必达到最大值,且等于 $|\boldsymbol{\Omega}|$.因此,向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 就是向量场 \boldsymbol{v} 在点 M 的旋度.

为了便于记忆,旋度的计算公式可用行列式表示为

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (7.7.4)$$

利用旋度,斯托克斯公式又可写为

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS. \quad (7.7.5)$$

当向量场 \boldsymbol{v} 在区域 V 内每一点的旋度皆为零,即 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} \equiv 0$ 时,称 \boldsymbol{v} 为无旋场.

对无旋场 \boldsymbol{v} , 若 L 为定义域中某曲面的边界, 则有

$$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = 0.$$

利用旋度的表达式, 容易证明旋度满足下列运算法则:

- (1) $\operatorname{rot}(c_1 \boldsymbol{v}_1 + c_2 \boldsymbol{v}_2) = c_1 \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1 + c_2 \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_2$, 其中 c_1, c_2 是任意常数;
- (2) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{v}) = u \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{v}$, 其中 u 是任意数量场;
- (3) $\operatorname{div}(V_1 \times V_2) = V_2 \cdot \operatorname{rot} V_1 - V_1 \cdot \operatorname{rot} V_2$;
- (4) $\operatorname{div} \operatorname{rot} V = 0, \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}$.

例 7.7.6 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. 求 $\operatorname{rot} \boldsymbol{r}$.

解 由式(7.7.4)易得

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}. \quad \square$$

例 7.7.7 求电场强度 $\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$ 的旋度, 其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \neq \mathbf{0}, r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 根据旋度的运算法则, 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= \operatorname{rot} \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{q}{r^3} \operatorname{rot} \boldsymbol{r} + \left(\operatorname{grad} \frac{q}{r^3} \right) \times \boldsymbol{r} \\ &= -\frac{3q}{r^4} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \boldsymbol{r} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

这就是说, 除电荷所在的点外, 电场强度 \boldsymbol{E} 在整个空间中是无旋场. □

7.7.5 保守场与势函数

保守场是物理学中常见的一种场.

定义 7.7.4 设 \boldsymbol{v} 是空间区域 V 中的连续向量场. 若 \boldsymbol{v} 沿 V 内任意闭路的环量都等于零, 则称 \boldsymbol{v} 是区域 V 内的保守场.

由定义 7.7.4 可得:

命题 7.7.1 设 \boldsymbol{v} 是区域 V 中的连续向量场, 则 \boldsymbol{v} 是区域 V 内的保守场的充要条件是, \boldsymbol{v} 在 V 内的曲线积分与路径无关.

设保守场 $\boldsymbol{v} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$, 其中函数 P, Q, R 为区域 V 上的连续函数. 任意固定一点 $(x_0, y_0, z_0) \in V$, 对于 $(x, y, z) \in V$, 令

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (7.7.6)$$

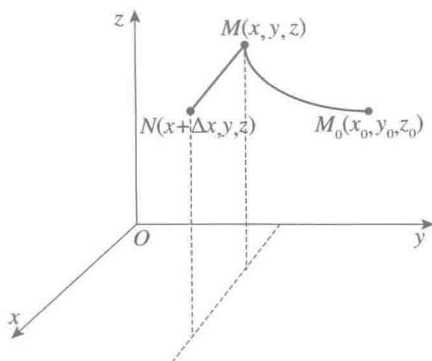


图 7.76 积分路径

其中右边的积分表示沿任意一条以 (x_0, y_0, z_0) 为起点、 (x, y, z) 为终点的路径 (图 7.76) 的积分. 由于 v 为保守场, 命题 7.7.1 保证了这样的记法是有意义的.

由式(7.7.6)定义的 $\varphi(x, y, z)$ 是 V 上的函数, 下面我们来证明它的梯度就是向量场 v .

任取 $(x, y, z) \in V$, 取充分小的 Δx , 使得点 $(x + \Delta x, y, z)$ 仍然在 V 内. 由曲线积分的可加性有

$$\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} P dx + Q dy + R dz.$$

在连接 (x, y, z) 和 $(x + \Delta x, y, z)$ 的直线上, 显然有 $dy = 0, dz = 0$ (图 7.76), 因此

$$\frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} P dx.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, z).$$

同理, 可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z),$$

即

$$\text{grad } \varphi = v = Pi + Qj + Rk.$$

定义 7.7.5 设 v 是区域 V 上的向量场. 如果存在 V 上的函数 φ , 满足 $\text{grad } \varphi = v$, 则称场 v 为有势场或梯度场, φ 称为 v 的一个势函数.

注 7.7.1 (1) 不难看出, φ 是 $v = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ 的势函数的充要条件是

$$d\varphi(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (7.7.7)$$

一般地, 我们将微分形式 $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ 称为 φ 的全微分.

(2) 有势场的势函数不是唯一的. 更进一步地, 如果 φ 是场 v 的一个势函数, 则 $\varphi + c$ (c 为常数) 是 v 的所有势函数. 首先, $\varphi + c$ 一定也是势函数; 反过来, 若 ψ 也是 v 的势函数, 则 $\text{grad } (\varphi - \psi) = 0$, 所以 $\varphi - \psi = c$.

根据前面的分析, 保守场一定是有势场. 事实上, 有势场也一定是保守场.

定理 7.7.2 一个向量场为保守场的充要条件是它为有势场.

证明 只需证明有势场是保守场. 设向量场 \boldsymbol{v} 是区域 V 中的有势场, φ 为一个势函数. 设 A, B 是 V 中的任意两点, L_{AB} 是以 A 为起点、 B 为终点的任意一条简单光滑曲线. 并设 L_{AB} 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta).$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t)) &= P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t)) dt \\ &= \varphi(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - \varphi(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) \\ &= \varphi(B) - \varphi(A). \end{aligned}$$

即向量场 \boldsymbol{v} 的积分与路径无关, 只和起点和终点有关. 利用命题 7.7.1, 知 \boldsymbol{v} 为保守场. \square

注 7.7.2 设保守场 \boldsymbol{v} 具有势函数 φ , 则 \boldsymbol{v} 沿 L_{AB} 的曲线积分可以表示为

$$\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \varphi(B) - \varphi(A).$$

这可以看做是牛顿-莱布尼茨公式的推广. 势函数类似于保守场 \boldsymbol{v} 的原函数, 而

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz$$

就是一种变上限积分. 但对曲线积分而言, 不仅要求向量场 \boldsymbol{v} 的三个分量函数 P, Q, R 是连续的, 而且要求 \boldsymbol{v} 是保守场, 或者等价地要求 $Pdx + Qdy + Rdz$ 是全微分.

虽然我们给出了保守场的一些等价性质, 但是无论用哪一个来判别一个场是否是保守场都是不容易的, 是否有更加简单的方法呢? 下面的命题给出了保守场的一个性质, 也为我们解决这个问题提供了思路.

命题 7.7.2 若场 \boldsymbol{v} 为保守场, 且它的各个分量有连续的一阶偏导数, 则 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$

$= 0$, 即 v 为无旋场.

证明 v 为保守场, 从而为有势场. 设 φ 为 v 的一个势函数, 则

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k.$$

因此

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

如果上述命题的逆命题也成立, 即无旋场也是保守场, 那么判别一个场是否是保守场就变得非常简单, 因为只需计算其旋度即可. 然而一般情况下, 无旋场并不一定就是保守场, 见下面的例子.

例 7.7.8 设 $v = \frac{1}{x^2 + y^2}(-yi + xj)$. 试证: v 是其定义域 $V = \mathbb{R}^3 - \{z \text{ 轴}\}$ 内的无旋场, 但不是保守场.

证明 直接计算, 得

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

从而 v 是无旋场. 现选取一闭路 L , 它是平面 Oxy 上以原点为圆心的单位圆周, 沿逆时针方向, 则有

$$\begin{aligned} & \oint_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} (-\sin \varphi) + \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} (\cos \varphi) \right] d\varphi \\ &= 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

因此 v 不是区域 V 内的保守场. □

尽管有上述的反例, 但无旋场在很多情况下确实是保守场. 事实上, 由斯托克斯定理知, 若 v 是区域 V 中的无旋场, 对于 V 中的任意简单闭曲线 L , 如果存在 V 中的曲面 S 以 L 为边界, 则

$$\oint_L v \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} v \cdot n dS = 0,$$

即 v 为保守场. 因此只要对场的定义域作适当的限制, 使得我们能够运用斯托克斯定理即可. 为此, 我们引入下面的定义:

定义 7.7.6 设 V 是空间区域. 若对于 V 中的任意一条简单闭曲线 L , 都存在以 L 为边界的且完全包含在 V 中的可定向曲面, 则称 V 是曲面单连通的.

形象地说, 曲面单连通就是 V 内任一闭路都可以在区域内通过连续形变收缩为一点. 例如, 去掉球心的球体是曲面单连通区域(图 7.77), 而环面围成的区域(汽车轮胎的内部)就不是曲面单连通区域(图 7.78).

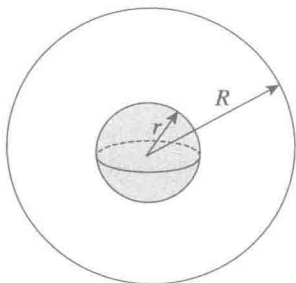


图 7.77 去掉球心的球体

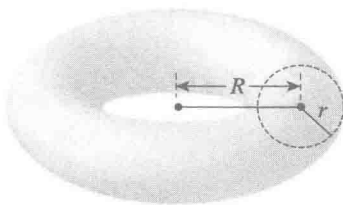


图 7.78 环面围成的区域

综上所述, 我们得到如下结论:

定理 7.7.3 设 V 是曲面单连通区域, v 是 V 上的 C^1 向量场, 则下述三个命题等价:

- (1) 向量场 v 是区域 V 中的保守场;
- (2) 向量场 v 是区域 V 中的有势场;
- (3) 向量场 v 是区域 V 中的无旋场.

现在我们再来看看例 7.7.8. 该例中向量场 v 的定义域 V 是整个空间去掉 z 轴, 它不是曲面单连通的. 例如取闭曲线 L 为平面 Oxy 中的单位圆, 则 V 中没有以 L 为边界的曲面, 因为任何这样的曲面必与 z 轴相交, 从而不能完全包含在 V 中.

例 7.7.9 证明: 向量场

$$v = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}$$

是有势场, 并求出它的一个势函数.

解 直接计算, 得

$$\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - zx & z^2 - xy \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-x + x)\mathbf{i} + (-y + y)\mathbf{j} + (-z + z)\mathbf{k} \\
 &= \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

从而场 \mathbf{v} 在整个空间中是无旋场. 而 \mathbb{R}^3 是曲面单连通区域, 所以 \mathbf{v} 也是有势场. 若把起点取在原点, 可得到场 \mathbf{v} 的一个势函数为

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y, z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz \\
 &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - xy)dz \\
 &= \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz.
 \end{aligned}$$

□

例 7.7.10 求电场强度 $\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$ 的势函数.

解 由前面的例子知, 电场强度 \mathbf{E} 在除去原点的整个空间中是无旋的, 而除去原点的整个空间是曲面单连通区域, 所以 \mathbf{E} 是有势场, 其势函数为

$$\begin{aligned}
 \varphi(M) &= \int_{M_0}^M \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{M_0}^M \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{r_0}^r \frac{qr}{r^3} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r \frac{q}{r^2} dr \\
 &= -\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r_0}\right).
 \end{aligned}$$

这里点 M_0 可以任意选取, 为方便起见, 把点 M_0 取在无穷远处. 于是令 $r_0 \rightarrow \infty$, 就得到 \mathbf{E} 的一个势函数为 $\varphi(M) = -\frac{q}{r}$.

□

在静电学中, 常记 $V = -\varphi = \frac{q}{r}$, 并称 V 为电场 \mathbf{E} 的电位, 因此有 $\mathbf{E} = -\text{grad } V$, 它表明电场 \mathbf{E} 指向电位 V 减小得最快的方向.

例 7.7.11 计算积分

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (e^y + 1)dx + (xe^y - 2y)dy.$$

解 容易看出, 被积表达式是全微分:

$$(e^y + 1)dx + (xe^y - 2y)dy = d(xe^y + x - y^2),$$

所以积分与路径无关, 且有

$$\int_{(1,0)}^{(3,1)} (e^y + 1)dx + (xe^y - 2y)dy = (xe^y + x - y^2) \Big|_{(1,0)}^{(3,1)} = 3e. \quad \square$$

例 7.7.12 求解微分方程

$$(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy = 0.$$

解 令

$$P(x, y) = 2x \cos y - y^2 \sin x, \quad Q(x, y) = 2y \cos x - x^2 \sin y.$$

则在全平面上,有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2y \sin x - 2x \sin y.$$

因此,原方程为全微分方程,其通解为

$$c = \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta = x^2 \cos y + y^2 \cos x,$$

其中 c 是任一常数. □

7.7.6 无源场与向量势*

上一小节中,命题 7.7.2 本质来源于等式

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{0}. \quad (7.7.8)$$

同样,不难验证:对任何向量场 \mathbf{v} , 都有

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (7.7.9)$$

由等式(7.7.8)引出无旋场、势函数、有势场等概念;类似地,从等式(7.7.9)可以导出无源场、向量势、有向量势的场等概念.

注 7.7.3 如果引入外微分形式和外微分运算 d , 那么梯度、旋度、散度运算本质上都是外微分运算,而上述两个等式等价于

$$d \circ d = 0.$$

有兴趣的同学可以阅读附录“外微分形式”,它可以帮我们更好地理解场论的相关内容以及格林公式、高斯公式、斯托克斯公式等.

定义 7.7.7 区域 V 中散度处处为零的向量场称为无源场.

为了弄清无源场的物理意义,我们假设 \mathbf{v} 是区域 V 中某流体的流速场. 在 V 中取一段细小的流管, 它的侧面由流线构成, 两端是正交于流线的横截面(图 7.79). 所谓流线, 是指处处与流速 \mathbf{v} 相切的曲线. 由于流体不可能从侧面流进或流出流管, 再根据流管内流场的散度处处为零, 由高斯定理知流出流管的总流量为零, 所以流体从一端流进的量必等于从另一端流出的量. 又由于管端的截面积很小, 忽略高阶无穷小量后就有

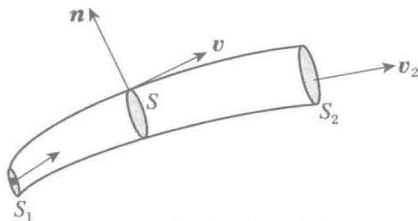


图 7.79 管流的流量

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

也就是说,通过流管每个截面的流量 vS 是个常数,叫做管型常数. 根据这个道理,可把上述的向量场划分成一道道的流管. 因为只有无源场才有这样的性质,所以无源场又称为管型场.

定义 7.7.8 设 v 是区域 V 上的向量场. 如果存在 V 上的向量场 α , 使得

$$\operatorname{rot} \alpha = v,$$

则称 α 是 v 的一个向量势, 而称 v 为有向量势的场.

定义 7.7.9 设 V 是空间区域. 如果 V 中任意闭曲面的内部都属于 V , 则称 V 是空间单连通的.

形象地说,空间单连通就是说 V 是实心的而不能是空心的. 例如,去掉球心的球体就不是空间单连通区域,而环面围成的区域(如汽车轮胎的内部)就是空间单连通区域.

定理 7.7.4 设 V 是空间单连通区域, 则下述两个命题等价:

- (1) 向量场 v 是区域 V 中的无源场;
- (2) 向量场 v 是区域 V 中的有向量势的场.

证明 由等式(7.7.9)知,若场 v 有向量势,则其散度为零,从而 v 为无源场.

反过来,设 $v = Pi + Qj + Rk$ 且 $\operatorname{div} v = 0$. 要证明存在 $\alpha = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, 使得 $v = \operatorname{rot} \alpha$. 这等价于求解下面的一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = P(x, y, z), \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = Q(x, y, z), \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = R(x, y, z). \end{cases}$$

为了求出一组解 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 不妨令 $\alpha_3 = 0$, 从第一个方程解出

$$\alpha_2 = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 是待定函数. 从第二个方程中取

$$\alpha_1 = \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz,$$

把 α_1, α_2 的表达式代入第三个方程, 并利用 $\operatorname{div} v = 0$, 得

$$\begin{aligned} R(x, y, z) &= - \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= R(x, y, z) - R(x, y, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

由此推得

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx.$$

因此, v 的一个向量势是

$$\alpha = \left[\int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz \right] \mathbf{i} + \left[- \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx \right] \mathbf{j}.$$

注 7.7.4 (1) 上述的证明中似乎没有用到空间单连通的条件, 但事实上, 这个条件保证了证明过程中所出现的积分的路径都包含在 V 中. 下面会给出一个例子, 说明没有这个条件定理是不成立的.

(2) 从上面的证明过程中可以看出, 无源场的向量势不是唯一的. 事实上, 如果 α 和 β 都是向量势, 则 $\text{rot}(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$, 即 $\alpha - \beta$ 是无旋场. 如果 V 还是曲面单连通的, 则存在一个数量场 φ , 使得 $\alpha - \beta = \text{grad} \varphi$. 因此, 向量势在相差一个函数的梯度意义下是唯一的.

例 7.7.13 设 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$. 试证: 向量场 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ 在它的定义域 V 中是无源场, 但在 V 中没有向量势.

证明 在例 7.7.7 中已经证明了 \mathbf{E} 是无源场, 下面用反证法证明它没有向量势. 假设 \mathbf{E} 在 V 中有向量势 α , 即 $\mathbf{E} = \text{rot} \alpha$. 设以原点为圆心的单位球面与平面 Oxy 的交线为 L , 用 L^+ 和 L^- 分别表示 L 的逆时针和顺时针的定向, S^+ 表示上半单位球面的上侧, S^- 表示下半单位球面的下侧. 由斯托克斯定理得

$$\begin{aligned} \int_{L^+} \alpha ds &= \iint_{S^+} \text{rot} \alpha dS = \iint_{S^+} \mathbf{E} dS, \\ \int_{L^-} \alpha ds &= \iint_{S^-} \text{rot} \alpha dS = \iint_{S^-} \mathbf{E} dS, \end{aligned}$$

两式相加, 得

$$\iint_{S^+} \mathbf{E} dS + \iint_{S^-} \mathbf{E} dS = 0.$$

上式的左边是向量场 \mathbf{E} 指向单位球面外侧的通量. 由例 7.7.5 知, 左边的值为 $4\pi \neq 0$, 矛盾. 从而 \mathbf{E} 在 V 中的向量势是不存在的, 其原因是定义域 V 不是空间单连通的.

例 7.7.14 证明: 向量场

$$\mathbf{v} = (xy + 1)\mathbf{i} + z\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$$

是无源场, 并求出其向量势.

解 由于 $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = y + 0 - y = 0$, 故 \boldsymbol{v} 是无源场. 为求其向量势 $\boldsymbol{\alpha}$, 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = xy + 1, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = z, \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = -yz. \end{cases}$$

取 $\alpha_3 = 0$, 由第一个方程得

$$\alpha_2 = - \int_0^z (xy + 1) dz + f(x, y) = -(xy + 1)z + f(x, y).$$

由第二个方程得

$$\alpha_1 = \int_0^z z dz = \frac{z^2}{2}.$$

将 α_1, α_2 的表达式代入第三个方程, 得到

$$-yz + \frac{\partial f}{\partial x} = -yz.$$

取 $f(x, y) = 0$, 最后求得

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{z^2}{2} \boldsymbol{i} - (xy + 1)z \boldsymbol{j}.$$

7.7.7 哈密顿算符

下面引进一种算符, 使得梯度、散度和旋度以及高斯公式、斯托克斯公式有一种更加简洁和习惯的表达方式. 算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

称为哈密顿 (Hamilton, 1805~1865) 算符, 读做那勃勒 (Nabla).

∇ 兼有微分和向量两种运算的功能, 既可以作用在数量场上, 又可以作用在向量场上, 还可以重复运算.

(1) ∇ 作用在数量场 u 上, 即得 u 的梯度

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k} = \operatorname{grad} u.$$

(2) ∇ 通过数量积作用在向量场 $\boldsymbol{v} = P \boldsymbol{i} + Q \boldsymbol{j} + R \boldsymbol{k}$ 上, 即得 \boldsymbol{v} 的散度:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{k} \right) \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

(3) ∇ 通过向量积作用在向量场 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 上, 即得 \boldsymbol{v} 的旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \boldsymbol{v}.$$

(4) ∇ 和自己作数量积, 得到一个新的算符

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

称为拉普拉斯算符. Δ 作用在数量场 u 上, 就是

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

方程 $\Delta u = 0$ 叫做拉普拉斯方程, 是一种非常特殊也非常有用的偏微分方程, 拉普拉斯方程的解叫做调和函数.

(5) 利用算符 ∇ 的微分和向量运算的双重功能, 可得如下运算性质:

$$(a) \nabla(u_1 u_2) = u_1 \nabla u_2 + u_2 \nabla u_1;$$

$$(b) \nabla \cdot (u\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla u + u(\nabla \cdot \boldsymbol{v});$$

$$(c) \nabla \times (u\boldsymbol{v}) = \nabla u \times \boldsymbol{v} + u(\nabla \times \boldsymbol{v});$$

$$(d) \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}_2.$$

在等式(d)中右边的第二项中, 因为 ∇ 必须写在 \boldsymbol{v}_2 之前, 所以前面要加负号, 即 $\nabla \times \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_2 \times \nabla$.

利用哈密顿算符, 高斯公式和斯托克斯公式可分别写成

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV, \\ \oint_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} dS. \end{aligned}$$

利用上面的表示, 可得场论中某些向量形式的高斯公式和斯托克斯公式.

(1) 设曲面 S 的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = \cos \alpha \boldsymbol{i} + \cos \beta \boldsymbol{j} + \cos \gamma \boldsymbol{k}$, 对于数量场 u , 作一个特殊的向量场 $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i}$, 则

$$\iint_{\partial V} u \cos \alpha dS = \iint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial x} dV.$$

类似有

$$\iint_{\partial V} u \cos \beta dS = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial y} dV, \quad \iint_{\partial V} u \cos \gamma dS = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial z} dV.$$

因此,有向量形式

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \mathbf{n} dS = \iiint_V \nabla u dV.$$

(2) 由于 $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ 的第一个分量可以表示成

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{v})_x = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{i}) \cdot \mathbf{n},$$

利用高斯公式,得

$$\begin{aligned} \left(\iint_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS \right)_x &= \iint_{\partial V} (\mathbf{n} \times \mathbf{v})_x dS = \iint_{\partial V} (\mathbf{v} \times \mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_{\partial V} \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{i}) dS = \mathbf{i} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV \\ &= \left(\iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV \right)_x. \end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned} \left(\iint_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS \right)_y &= \left(\iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV \right)_y, \\ \left(\iint_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS \right)_z &= \left(\iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV \right)_z. \end{aligned}$$

把以上三式合起来,就有

$$\iint_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{v} dV.$$

(3) 对于数量场 u , 设 $\mathbf{v} = u\mathbf{i}$. 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial S} u \boldsymbol{\tau} dl \right)_x &= \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\ &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial z} n_y - \frac{\partial u}{\partial y} n_z \right) dS. \end{aligned}$$

直接计算,可得

$$(\mathbf{n} \times \nabla u)_x = \frac{\partial u}{\partial z} n_y - \frac{\partial u}{\partial y} n_z,$$

所以有

$$\left(\int_{\partial S} u \boldsymbol{\tau} dl \right)_x = \left(\iint_S \mathbf{n} \times \nabla u dS \right)_x.$$

类似有

$$\left(\int_{\partial S} u \tau dl\right)_y = \left(\iint_S \mathbf{n} \times \nabla u dS\right)_y,$$

$$\left(\int_{\partial S} u \tau dl\right)_z = \left(\iint_S \mathbf{n} \times \nabla u dS\right)_z.$$

把以上三式合起来,就有

$$\int_{\partial S} u \tau dl = \iint_S \mathbf{n} \times \nabla u dS.$$

习题 7.7

- 求函数 $u = xyz$ 在点 $M_0(1, 1, -2)$ 处沿方向 $l = (2, -1, 2)$ 的方向导数;
 - 求函数 $u = 3x + 2yz + z^2$ 在点 $M_0(1, -2, 2)$ 处的梯度,最大的和最小的方向导数.
- 求下列向量场在指定点的散度:
 - $\mathbf{v} = (3x^2 - 2yz, y^3 + yz^2, xyz - 3xz^2), M(1, -2, 2)$;
 - $\mathbf{v} = x^2 \sin y \mathbf{i} + y^2 \sin xz \mathbf{j} + xy(\sin \cos z) \mathbf{k}, M(x, y, z)$.
- 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量场, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$. 求:
 - $\operatorname{div}[(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}]$;
 - $\operatorname{div}[(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]$;
 - $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$;
 - $\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$;
 - $\operatorname{div}(r^2 \boldsymbol{\omega})$;
 - $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$, 其中 $f(r)$ 可微.
- 求下列数量场的梯度场的散度:
 - $\varphi = x^3 y^4 z^2$;
 - $u = xyze^{x+y+z}$.
- 求下列向量场的旋度:
 - $\mathbf{v} = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$;
 - $\mathbf{v} = (xe^y + y)\mathbf{i} + (z + e^y)\mathbf{j} + (y + 2ze^y)\mathbf{k}$.
- 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量场, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|, f(r)$ 可微. 求:
 - $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$;
 - $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]$;
 - $\operatorname{rot}[f(r)\boldsymbol{\omega}]$;
 - $\operatorname{rot}[\mathbf{r} \times f(r)\boldsymbol{\omega}]$.
- 设平面上有四条路径:
 - L_1 : 折线, 从 $(0, 0)$ 到 $(1, 0)$, 再到 $(1, 1)$;
 - L_2 : 从 $(0, 0)$ 沿着抛物线 $y = x^2$ 到 $(1, 1)$;
 - L_3 : 从 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的直线段;

L_4 :折线,从(0,0)到(0,1),再到(1,1).

求下列力场 F 沿上述四条路径所做的功,并说明它们的值为什么会相等或不等:

(1) $F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$;

(2) $F = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$.

8. 求下列曲线积分:

(1) $\int_L (2x + y)dx + (x + 4y + 2z)dy + (2y - 6z)dz$, 其中 L 由点 $P_1(a, 0, 0)$ 沿曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0 \end{cases}$ 到 $P_2(0, a, 0)$, 再由 P_2 沿直线 $\begin{cases} z + y = a, \\ x = 0 \end{cases}$ 到点 $P_3(0, 0, a)$;

(2) $\int_{\widehat{AMB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$, 其中 \widehat{AMB} 是柱面螺线 $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = \frac{h}{2\pi}\varphi$ 上点 $A(a, 0, 0)$ 到 $B(a, 0, h)$ 的一段.

9. 证明下列向量场是有势场,并求出它们的势函数:

(1) $\mathbf{v} = (2x\cos y - y^2\sin x)\mathbf{i} + (2y\cos x - x^2\sin y)\mathbf{j}$;

(2) $\mathbf{v} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(2y + z + x)\mathbf{j} + xy(2z + x + y)\mathbf{k}$;

(3) $\mathbf{v} = r^2\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|$).

10. 当 a 取何值时,向量场 $\mathbf{F} = (x^2 + 5ay + 3yz)\mathbf{i} + (5x + 3axz - 2)\mathbf{j} + [(a + 2)xy - 4z]\mathbf{k}$ 是有势场,并求出它的势函数.

11. 求下列全微分的原函数 u :

(1) $du = (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y - 4y^3)dy$;

(2) $du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$.

12. 验证下列积分与路径无关,并求出它们的值:

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x - y)(dx - dy)$;

(2) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,3)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(4) $\int_{(0,0,2)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz$;

(5) $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$;

(6) $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2$

$= a^2$ 上.

13. 设 $f(u)$ 是连续函数(但不一定可微), L 是分段光滑的任意闭曲线. 证明:

$$(1) \int_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0;$$

$$(2) \int_L f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz) = 0.$$

14. 稳恒电流 I 通过无穷长的直导线(作为 z 轴)所产生的磁场为 $\mathbf{B} = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ ($x^2 + y^2 \neq 0$). 试讨论 \mathbf{B} 沿平面 Oxy 上任意的光滑闭曲线(与 z 轴不相交)的环量 Γ .

15. 试求函数 $f(x)$, 使得曲线积分 $\int_L [f'(x) + 6f(x) + e^{-2x}]y dx + f'(x)dy$ 与积分路径无关.

16. 已知 $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) = 2, \beta(0) = 2$.

(1) 求 $\alpha(x), \beta(x)$, 使得线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关, 其中 $P(x, y) = [2x\alpha'(x) + \beta(x)]y^2 - 2y\beta(x)\tan 2x, Q(x, y) = [\alpha'(x) + 4x\alpha(x)]y + \beta(x)$;

(2) 求 $\int_{(0,0)}^{(0,2)} P dx + Q dy$.

17. 设函数 $Q(x, y)$ 在平面 Oxy 上具有一阶连续偏导数, 积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 并且对 $\forall t$, 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy$. 求 $Q(x, y)$.

18. 求解下列微分方程:

$$(1) (xy^2 + 2y - 2y\cos x - y \sin x) dx + (x^2 y + 2x + \cos x - 2\sin x) dy = 0;$$

$$(2) 2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0.$$

19. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 2$, 且 $[e^x \sin y + x^2 y + f(x)y] dx + [f'(x) + e^x \cos y + 2x] dy = 0$ 为全微分方程. 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

20. 确定常数 λ , 使得在右半平面($x > 0$)上的向量场 $\mathbf{v} = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

21. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是常向量场, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|, f(r)$ 可微. 试通过 ∇ 运算, 求:

$$(1) \nabla[\boldsymbol{\omega} \cdot f(r)\mathbf{r}];$$

$$(2) \nabla \cdot [\boldsymbol{\omega} \times f(r)\mathbf{r}];$$

$$(3) \nabla \times [\boldsymbol{\omega} \times f(r)\mathbf{r}].$$

复 习

本章主要内容

1. 二重积分和三重积分的概念、几何意义和基本性质；
2. 二重积分和三重积分的累次积分法；
3. 二重积分和三重积分的变量代换,极坐标代换、球坐标代换、柱坐标代换；
4. 广义二重积分的概念和计算；
5. 空间曲线弧长的定义和计算,弧长微分；
6. 第一型曲线积分的定义、计算和性质；
7. 空间曲面面积的定义和计算；
8. 第一型曲面积分的定义、计算和性质；
9. 利用重积分、第一型曲线积分和曲面积分,计算物体的重心、转动惯量和引力；
10. 曲线的定向,第二型曲线积分的定义、性质和计算,格林公式；
11. 双侧曲面及其定向,第二型曲面积分的定义、性质和计算,高斯公式和斯托克斯公式；
12. 向量场的散度和旋度,保守场和势函数,无源场和向量势,哈密顿算符.

复习思考题

1. 为何需要引入二重积分和三重积分? 它们具有哪些几何和物理意义? 是否每个多元函数在有界区域上都存在重积分? 哪些多元函数存在重积分? 举出几个不可积的多元函数,并指出它们为何不可积.
2. 二重积分和三重积分与定积分相比有哪些类似的基本性质? 二重积分和三重积分与定积分相比有何区别和联系? 广义二重积分与二重积分有何不同? 如何定义?
3. 如何计算二重积分和三重积分? 它们与定积分的计算相比有何区别和联系? 如何选择方便的累次积分次序?
4. 二重积分和三重积分有哪些常用的变量代换? 极坐标变换、球坐标变换和柱坐标变换有何区别和联系?
5. 如何计算曲线的弧长和曲面的面积? 如何给曲线和曲面定向? 对怎样的曲面才能定向?

- 如何定义和计算第一型曲线积分和第二型曲线积分? 两种积分之间有何区别和联系? 它们有哪些物理意义? 第一型曲线积分和第二型曲线积分有哪些相似的和不同的性质?
- 如何定义和计算第一型曲面积分和第二型曲面积分? 两种积分之间有何区别和联系? 它们有哪些物理意义? 第一型曲面积分和第二型曲面积分有哪些相似的和不同的性质?
- 格林公式、斯托克斯公式和高斯公式的本质是什么? 为什么说它们是微积分基本定理即牛顿-莱布尼茨公式在高维空间上的推广?
- 向量场的散度和旋度如何定义? 它们有哪些物理意义? 无旋场和无源场有哪些物理意义? 它们有哪些等价的定义? 如何求保守场的势函数和无源场的向量势? 这些算法在数学上有哪些应用? 为何要引入哈密顿算符? 它有哪些优点?
- 多元函数的积分学可以用来解决哪些物理问题?

复习题

1. 计算:

$$(1) I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \text{ 其中 } a > 0, b > 0;$$

$$(2) I = \int_0^1 \frac{x(x^2 - 1)}{\ln x} dx.$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x < 0, \text{ 或 } x > 2, \end{cases}$ D 是整个平面. 求 $\iint_D f(x)f(y-x) dx dy$.

3. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数. 证明:

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(y)} dy \geq 1.$$

4. 设 $f(x), g(x)$ 均是 $[0, 1]$ 上的连续增函数. 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 且满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + t^4.$$

求 $f(x)$.

6. 设函数 $f(x)$ 连续, $f(0) = 1, F(t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2) dx dy$ ($t \geq 0$). 求 $F''(0)$.

7. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) = 0, F(t) = \iiint_{\Omega_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz$, 其中 $\Omega_t: x^2 +$

$$y^2 \leq t^2 \quad (0 \leq z \leq 1). \text{ 求 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}.$$

8. 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶连续导数, 且曲线积分

$$\oint_{\Gamma} [y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)] dx + 2[yg(x) + f(x)] dy = 0,$$

其中 Γ 为平面上的任一条简单封闭曲线.

(1) 求 $f(x), g(x)$, 使得 $f(0) = g(0) = 0$;

(2) 计算沿任一条曲线从点 $(0, 0)$ 到 $(1, 1)$ 的积分.

9. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的导数, 对任一围绕原点且不经过原点的逐段

光滑的简单正向闭曲线 C^+ , 曲线积分 $\oint_{C^+} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 的值相同.

(1) 设 L^+ 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 证明: $\oint_{C^+} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C^+ 是围绕原点且不经过原点的逐段光滑的简单正向闭曲线, 求

$$\oint_{C^+} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}.$$

10. 求柱面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内的部分的面积.

11. 设有一个高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化, 其侧面满足 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为 cm, 时间单位为 h). 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数为 0.9). 问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多长时间?

12. 计算曲面积分

$$I = \iint_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 S^+ 是 $1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16}$ ($z \geq 0$) 的上侧.

13. 证明: 物体在水中所受到的浮力等于物体排开的水的重量.

14. 设函数 $u(x, y, z)$ 在光滑曲面 S 所围成的闭区域 V 上具有直到二阶的连续偏微商, 而且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

试证明:

(1) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 是 u 沿 S 的外侧法向量 \mathbf{n} 的方向微商;

(2) $\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_V (\nabla u)^2 dV$.

第8章 无穷级数

前面我们讨论过有限个数或函数之和及其性质,如有限个连续(或可微、可积)函数之和仍然连续(或可微、可积)等.在许多情形下,需要讨论无限个数或函数之和及其性质.例如,在学习无限循环小数时,可将无限循环小数写成一个无限求和形式:

$$0.\dot{1} = 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$$

再如古希腊伊利亚学派的芝诺(Zeno,约前490~前430)提出的阿基里斯悖论(图8.1):荷马史诗《伊利亚特》中以快跑著称的阿基里斯永远追不上在他前面的一只乌龟,理由是阿基里斯必须首先跑到乌龟的出发点,而在这段时间内乌龟已经向前爬过一段距离,因此仍然在阿基里斯的前面,这种情况会无休止地继续下去.

另外,在学习泰勒公式时,曾得到如下公式(图8.2):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (-\infty < x < +\infty, 0 < \theta < 1). \quad (8.0.1)$$

对于给定的实数 x ,显然有



图 8.1 阿基里斯悖论

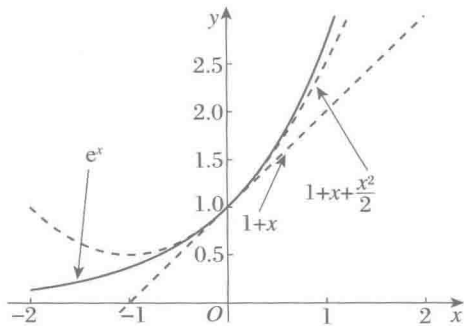


图 8.2 指数函数的泰勒公式

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{dx} = 0.$$

若在式(8.0.1)中,令 $n \rightarrow +\infty$,则有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

即无穷多个幂函数 $1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}, \cdots$ 之和就等于指数函数 e^x .

一般地,把无穷多个数或函数按照自然数的顺序而进行的无限次加法运算称为**无穷级数**,简称**级数**.如何理解和计算级数的“无限次加法运算”?无穷多个函数相加的函数项级数及其和函数具有什么样的分析性质?这些就是本章研究的主要内容.

无穷级数理论在数学上有众多的应用,例如,利用皮卡(C.É. Picard, 1856~1941)逐次逼近法,证明常微分方程解的存在唯一性定理、隐函数存在性定理;构造处处连续处处不可微的函数;证明闭区间上连续函数的魏尔斯特拉斯多项式逼近定理;等等.同时,无穷级数理论在工程计算中也有着十分广泛的应用,例如,计算某些函数值和定积分的近似值、函数方程或微分方程的近似解等等.

8.1 数项级数

8.1.1 数项级数的基本概念

我们首先讨论数项级数.设有数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,把它们依次相加,得到形式上的和式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (8.1.1)$$

称为**数项级数**,其中 a_n 称为级数的**通项**.这里的相加仅仅是形式上的,因为无穷多个数无法通过逐一相加而求出总和来.为明确这个“无限求和”的确切意义,我们利用“有限求和”来逼近“无限求和”,这就是下面的定义:

定义 8.1.1(级数的敛散性) 级数(8.1.1)的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数(8.1.1)的第 n 个部分和. 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, 部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到数 S , 则称级数(8.1.1)收敛, S 称为级数的和, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$; 如果部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有有限极限, 则称级数(8.1.1)发散.

例 8.1.1 考察等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ 的敛散性, 并在收敛时求出级数的和.

解 先求出部分和. 当 $q=1$ 时, 显然, $S_n = n$; 当 $q \neq 1$ 时, 有

$$S_n = \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$ 时, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到数 $\frac{1}{1-q}$, 因而等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛, 其和为 $\frac{1}{1-q}$; 而

当 $|q| \geq 1$ 时, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有有限极限, 故等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 发散. \square

类似于例 8.1.1, 可以得到

$$0.\dot{1} = 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}.$$

利用数列极限的性质, 可以推出级数收敛的性质. 例如, 如果数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 即其部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则由数列极限的线性性, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

这就是下面的性质:

性质 8.1.1 (必要条件) 级数收敛的必要条件是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其通项趋于零.

例 8.1.2 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots$ 的敛散性, 并在收敛时求出级数的和.

解 当 $|q| \geq 1$ 时, 级数通项满足 $|nq^{n-1}| \geq 1$, 从而当 $n \rightarrow \infty$ 时通项不趋于零, 故由性质 8.1.1 知级数发散. 当 $|q| < 1$ 时, 由于 $S_n = \sum_{k=1}^n kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}$, 故

$$(1-q)S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n = \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n,$$

从而有 $S_n = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q}$. 由于 $|q| < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_n 收敛于 $\frac{1}{(1-q)^2}$, 即

当 $|q| < 1$ 时, 原级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{(1-q)^2}$. □

性质 8.1.1 可以用来判断一些级数是发散的. 例如, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 是发散的, 因为它们的通项都不趋于零. 值得注意的是, 级数通项趋于零仅是级数收敛的必要条件, 但并不充分, 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其通项 $a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 趋于零, 但是其部分和 $S_n = \ln(n+1)$ 却趋于 $+\infty$, 因而级数发散.

利用数列极限的线性性, 可以得到收敛级数的线性性:

性质 8.1.2 (收敛级数的线性性) 两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的线性和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n)$ 仍然收敛, 并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

其中 c_1, c_2 为两个固定的常数.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别收敛到 A 和 B , 它们的第 n 个部分和分别为 A_n 和 B_n , 那么部分和数列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别收敛到 A 和 B . 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n)$ 的部分和数列为 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, 于是由有限求和的四则运算法则知

$$S_n = \sum_{k=1}^n (c_1 a_k + c_2 b_k) = c_1 \sum_{k=1}^n a_k + c_2 \sum_{k=1}^n b_k = c_1 A_n + c_2 B_n.$$

利用数列极限的线性性, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$S_n = c_1 A_n + c_2 B_n \rightarrow c_1 A + c_2 B. \quad \square$$

级数还有如下性质:

性质 8.1.3 修改级数的有限项的值, 或者增减有限项, 不会改变级数的敛散性.

因为通过这种修改或增减, 所得级数的部分和 S_n 与原级数的部分和仅差一个常数 (当 n 足够大时), 所以级数的敛散性不变.

利用收敛数列的任意子列也收敛的性质, 可以得到级数的结合律:

性质 8.1.4 (级数的结合律) 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的相邻有限项加括号以后形成

的新级数

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$
仍然收敛,且与原级数具有相同的和值.

由此得知,若加括号后所形成的级数发散,则原级数必发散,但是此命题的逆命题不真.例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 发散,但是把它的项两两结合,便得到一个收敛级数:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0.$$

8.1.2 正项级数敛散性的判别法则

对于一个级数,首要的目标就是判定其收敛性.为研究一般级数的敛散性,我们首先考虑相对简单的正项级数.如果级数通项 $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$),则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.由于正项级数的部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调增的,所以利用单调数列的有界判别法,可以得到正项级数收敛的有界判别法(第4题):

定理 8.1.1(有界判别法) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是,其部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界.

例 8.1.3 证明:级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

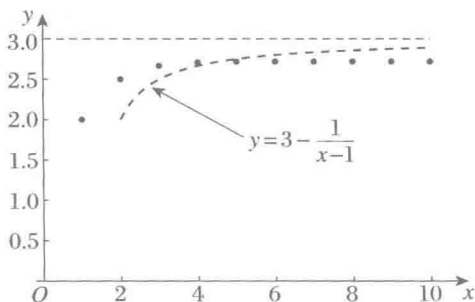


图 8.3 例 8.1.3 中级数的部分和

证明 估计级数部分和(图 8.3)的上界.当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) \\
 &= 3 - \frac{1}{n-1} < 3,
 \end{aligned}$$

从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛. \square

例 8.1.3 的证明提示我们,在判定正项级数收敛时,可以对其通项作适当的放大,以简化计算,得出部分和数列的上界.事实上,在例 8.1.3 的证明中,我们将原级数的通项 $\frac{1}{(n-1)!}$ 与 $\frac{1}{(n-2) \cdot (n-1)}$ 作比较,再由级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1)}$ 部分和数列的有界性,推出原级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 部分和数列的有界性.一般地,我们有如下正项级数的比较判别法:

定理 8.1.2(比较判别法) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 如果从某项开始有不等式 $a_n \leq b_n$, 那么:

- (1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
- (2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证明 由性质 8.1.3, 不妨设不等式 $a_n \leq b_n$ 对一切正整数都成立. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则其部分和数列 $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ 有上界, 而由不等式 $a_n \leq b_n$ 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 也有上界, 于是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, (1) 得证. 而(2) 是(1) 的逆否命题, 所以(2) 也成立. \square

例 8.1.4 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的敛散性.

解 直接计算, 可得

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n \cdot (2n-1)!} = \frac{1}{2^n} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \leq \frac{1}{2^n}.$$

又由于等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数收敛. \square

例 8.1.5 考察 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性, 其中 p 为常数 (图 8.4 和 8.5 中, $p = \frac{3}{2}$).

证明 (a) 当 $p \leq 1$ 时, 对任意正整数 n , 有

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散, 故原级数发散.

(b) 当 $p > 1$ 时, 对 $n > 1$, 有估计式

$$\frac{1}{n^p} < \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right].$$

由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] = \frac{1}{p-1}$ 收敛, 所以原级数收敛. \square

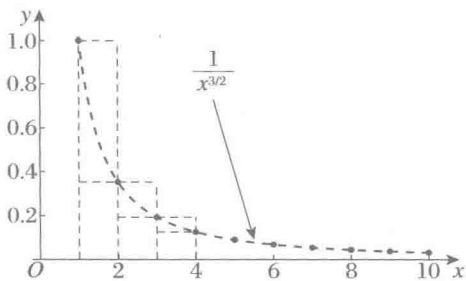


图 8.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 的通项

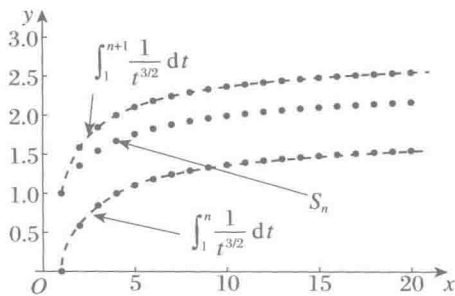


图 8.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 的部分和

从例 8.1.5 可以看出, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛与通项 a_n 收敛于零的速度有关. 事实上, 我们有如下定理:

定理 8.1.3 (比较判别法的极限形式) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($b_n > 0$). 如果满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, 那么:

- (1) 当 $0 < A < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;
- (2) 当 $A = 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(3) 当 $A = +\infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

证明 这里仅证明结论(1), 类似可得结论(2)和(3). 当 $0 < A < +\infty$ 时, 由极限的性质知, 存在一个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有不等式 $\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}$, 即 $\frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n$. 利用比较判别法则可知, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则不等式 $a_n < \frac{3A}{2} b_n$ 蕴涵级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 而如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则不等式 $\frac{A}{2} b_n < a_n$ 蕴涵级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. 综上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散. \square

上述定理为判别正项级数的敛散性提供了一个基本的方法, 即与其他可以判定敛散性的级数比较通项趋于零的速度, 而寻找合适的比较对象是问题的关键.

例 8.1.6 考察下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n^5+1}}.$$

解 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln n} / \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以原级数发散;

(2) 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原级数收敛;

(3) 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{3n+2}{\sqrt{n^5+1}} \sim \frac{3}{n^{3/2}}$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2}}$ 收敛, 所以原级数收敛. \square

下面的柯西根值判别法与达朗贝尔比值判别法本质上是通过与等比级数作比较得到的, 由于只用到待判定级数自身的信息, 使用起来比较方便.

定理 8.1.4 (柯西根值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则:

(1) 当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 当 $q < 1$ 时, 有 $q < \frac{q+1}{2} < 1$. 由极限的保序性知, 存在一个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有不等式 $\sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2}$, 即 $a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛, 从而由比较判别法则知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $q > 1$ 时, 有 $1 < \frac{q+1}{2} < q$. 由极限的保序性知, 存在一个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有不等式 $\frac{q+1}{2} < \sqrt[n]{a_n}$, 即 $\left(\frac{q+1}{2}\right)^n < a_n$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 发散, 从而由比较判别法则知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. \square

定理 8.1.5 (达朗贝尔比值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $a_n > 0$ 对所有正整数 n 都成立, 并且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则:

(1) 当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明与定理 8.1.4 的证明类似, 请读者写出具体过程.

例 8.1.7 考察下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解 (1) 易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1,$$

从而由柯西根值判别法知原级数收敛;

(2) 易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1,$$

从而由柯西根值判别法知原级数发散. \square

例 8.1.8 考察下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ ($x > 0$); (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ ($x > 0$).

解 (1) 直接计算, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e}.$$

当 $0 < x < e$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ 收敛; 而当 $x > e$ 时, 有

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ 发散; 当 $x = e$ 时, 有

$$a_n = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \left(\frac{e}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1.$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 级数通项 a_n 不趋于零, 由级数收敛的必要条件知原级数发散.

(2) 直接计算, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^{n+1}} = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

因此, 原级数对 $\forall x > 0$ 都收敛. \square

注 8.1.1 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 时, 我们不能利用根值判别法或比值判别法对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性下任何断言, 需要更精细的判别法则. 例如,

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

如果正项级数的通项单调减, 则可以利用相应函数无穷积分的敛散性作判断依据, 这就是下面的柯西积分判别法.

定理 8.1.6 (柯西积分判别法) 设 $f(x)$ 是定义在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的非负单调减函数, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+nT)$ 与无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散, 其中 $T > 0$.

证明 这里仅给出当 $a = T = 1$ 时的证明, 一般情形仅相差一个线性变换. 由于 $f(x)$ 是单调减的, 故当 $k \leq x \leq k+1$ 时, 有

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

将这些不等式对 k 求和, 得到

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

如果无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,则上式中的左半部分不等式蕴涵 $\sum_{k=1}^n f(k+1)$ 有界,因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛;如果积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散,部分积分 $\int_1^n f(x)dx$ 无界,则上式中的右半部分不等式蕴涵 $\sum_{k=1}^n f(k)$ 无界,因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. \square

由证明可知,只需当 $x > 0$ 充分大时, $f(x)$ 单调减即可.在非单调减的区间上, $f(x)$ 连续.

在例 8.1.5 中,我们利用柯西积分判别法的思想判断了 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.如果直接应用柯西积分判别法,可以将证明简写为:当 $p > 0$ 时,因为函数 $f(x) = \frac{1}{x^p}$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上非负单调减且连续,并且 p 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & 0 < p \leq 1, \end{cases}$$

所以 p 级数当 $p > 1$ 时收敛,当 $p \leq 1$ 时发散.

例 8.1.9 考察下列级数的敛散性(其中 p 为常数):

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

解 (1) 令 $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$,则函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[2, +\infty)$ 上非负且连续.直接计算导数,有 $f'(x) = -\frac{\ln x + p}{x^2 \ln^{p+1} x}$.对任意固定的常数 p ,当 x 充分大时,总有 $f'(x) < 0$,从而 $f(x)$ 单调减.因此,原级数与无穷积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ 同敛散,而

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt.$$

由 p 积分的敛散性知原级数当 $p > 1$ 时收敛,当 $p \leq 1$ 时发散.

(2) 当 $p \leq 1$ 时, $\frac{\ln n}{n^p} > \frac{1}{n^p}$ ($n \geq 3$),而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散,从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 发散.

下设 $p > 1$.令 $f(x) = \frac{\ln x}{x^p}$,则函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[2, +\infty)$ 上非负且连续,类似于(1),可以证明当 x 充分大时, $f(x)$ 是单调减的.因此,级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 与无穷积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$ 同敛散,而

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx &= \frac{x^{1-p}}{(1-p)^2} [(1-p)\ln x - 1] \Big|_2^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}(p-1)^2} [(p-1)\ln 2 + 1].\end{aligned}$$

于是原级数当 $p > 1$ 时收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时发散. □

注 8.1.2 (1) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的通项 a_n 和 b_n , 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 时, 条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 说明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 趋于零的速度比 b_n 快. 比较判别法说明, 比收敛级数收敛速度更快的级数一定收敛. 如果存在收敛速度“最慢”的级数, 以它为标准来判别其他级数的收敛性当然最好, 但是这样的级数是不存在的(为什么?). 由此也可看出, 寻找更精细的判别法并无太大的意义.

(2) 判断正项级数收敛性的基本想法就是考察通项趋于零的速度. 例如, 在例 8.1.9(2)中, 如果注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ 对 $\forall \alpha > 0$ 成立, 则可以立刻得到结论. 事实上, 设 $p > 1$, 令 $p = 1 + 2\alpha$, 则当 n 充分大时, $\frac{\ln n}{n^p} < \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 是收敛的, 因而 $p > 1$ 时, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 收敛.

8.1.3 一般数项级数的敛散性

上一小节讨论了正项级数的敛散性, 本小节将考察一般数项级数的敛散性. 这里所谓的“一般数项级数”是指级数的各项可以是正数, 也可以是负数. 我们还是从特殊情形开始, 考虑级数通项交错地取正负数, 这样的级数称为交错级数.

1. 交错级数

若 $a_n > 0$, 称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

为交错级数. 对于交错级数, 其收敛的必要条件还是通项趋于零, 但是还需要补充什么条件才能保证它收敛呢? 我们有下面的莱布尼茨判别法:

定理 8.1.7(莱布尼茨判别法) 若数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调减趋于零, 则交错级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

证明 下面分奇偶项考察交错级数的部分和数列. 对于偶数下标的部分和 S_{2n} , 有

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

由于数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调减, 从而 $a_{2n-1} - a_{2n} > 0$, 故数列 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 为严格单调增的; 又因为

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

故 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界 a_1 . 由单调有界判别法知数列 $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 设其极限为 S . 对于奇数下标的部分和数列 $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, 因为 $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, 以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S,$$

即数列 $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛到 S . 因此, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的部分和数列

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 从而交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. \square

称满足定理 8.1.7 条件的交错级数为莱布尼茨级数.

例 8.1.10 考察交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n = \frac{1}{n}$ 严格单调减且趋于零, 所以交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛(图 8.6 和 8.7). \square

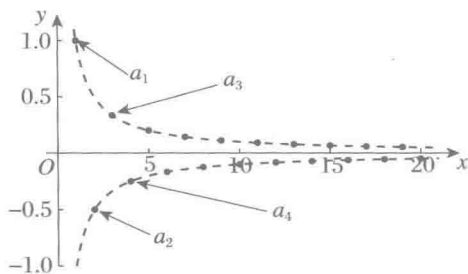


图 8.6 例 8.1.10 中交错级数的通项

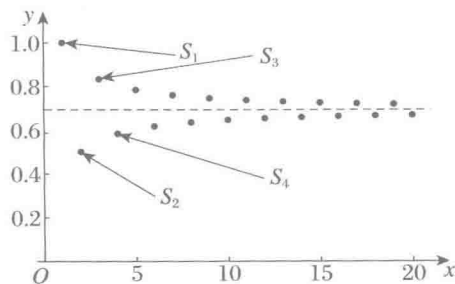


图 8.7 例 8.1.10 中交错级数的部分和

注 8.1.3 以后将会求出例 8.1.10 中交错级数的和为 $\ln 2$, 即交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的部分和

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

收敛到 $\ln 2$, 由此可以得到 $\ln 2$ 的近似值. 下面考虑用 S_n 近似 $\ln 2$ 所产生的误差 δ_n . 直接计算, 有

$$\delta_n = |\ln 2 - S_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots \right| < \frac{1}{n+1}.$$

可以证明, 莱布尼茨级数的部分和 S_n 近似其和 S 所产生的误差严格小于 a_{n+1} .

2. 级数收敛的一般判别法

现在, 我们讨论一般数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 其中 a_n 可以是正数、负数或零. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性等价于它的部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的敛散性, 利用数列的柯西收敛准则, 可以得到级数的柯西收敛准则.

定理 8.1.8 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是, 对任给的正数 ε , 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 成立.

例 8.1.11 利用柯西收敛准则, 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解 由于

$$|S_{n+p} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

所以对任意正数 ε , 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ 对一切正整数 p 成立. 因此原级数收敛. \square

柯西收敛准则告诉我们, 如果对任给的正数 ε , 在某个级数充分靠后的地方任意截取一段 (不论这段包含多少项), 它的绝对值都小于 ε , 则该级数收敛. 柯西收敛准则虽然适用于一切级数, 但是应用它去判别某些具体级数的敛散性并不方便. 下面利用柯西收敛准则推导一些比较容易验证的级数收敛的充分条件, 例如魏尔

斯特拉斯判别法、狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

利用不等式 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$ 以及柯西收敛准则, 容易推得魏尔斯特拉斯判别法(第14题).

定理 8.1.9 (魏尔斯特拉斯判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足: $|a_n| \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$), 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

例 8.1.12 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3\sin n}{7+\sqrt{n^3}}$ 的敛散性.

解 由于

$$\left| \frac{2+3\sin n}{7+\sqrt{n^3}} \right| \leq \frac{|2+3\sin n|}{7+\sqrt{n^3}} \leq \frac{5}{n^{3/2}},$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{3/2}}$ 收敛(图 8.8 和 8.9), 所以由魏尔斯特拉斯判别法知原级数收敛. \square

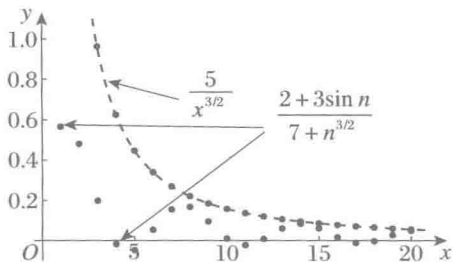


图 8.8 例 8.1.12 中级数的通项

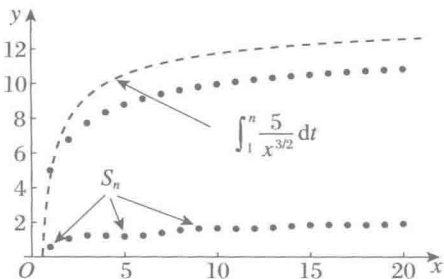


图 8.9 例 8.1.12 中级数的部分和

为探讨通项是两项乘积形式 $a_n b_n$ 的乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的精细判别法则——狄利克雷判别法和阿贝尔判别法, 首先引入阿贝尔分部求和公式.

引理 8.1.1 (阿贝尔分部求和公式) 设有两组实数 a_1, a_2, \dots, a_n 与 b_1, b_2, \dots, b_n , 记 a_i 的部分和 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ ($1 \leq k \leq n$), 则有:

- (1) $\sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1});$
- (2) 当 $\{b_i\}_{i=1}^n$ 为单调的且 $|S_k| \leq M$ ($1 \leq k \leq n$) 时,

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq M(|b_1| + 2|b_n|).$$

特别地,若 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, 则有 $\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq M b_1$.

证明 记 $S_0 = 0$, 由 $a_k = S_k - S_{k-1}$ 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n \\ &= S_1 (b_1 - b_2) + S_2 (b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + S_n b_n. \end{aligned}$$

由于 b_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为单调的, 所以每个 $b_i - b_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 都是同符号的. 又因为 $|S_k| \leq M$ ($k=1, 2, \dots, n$), 所以有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |b_i - b_{i+1}| |S_i| + |S_n| |b_n| \\ &\leq M \left| \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) \right| + M |b_n| \leq M(|b_1| + 2|b_n|). \end{aligned}$$

特别地,若 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| &\leq M(b_1 - b_2) + M(b_2 - b_3) + \cdots + M(b_{n-1} - b_n) + M b_n \\ &= M b_1. \end{aligned} \quad \square$$

将阿贝尔分部求和公式应用到柯西收敛准则中需要估算的 $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}|$, 则有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq M(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|).$$

为使得当 n 很大时, $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right|$ 的值很小, 狄利克雷和阿贝尔分别对数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 提出了不同的条件, 从而得到了不同的判别法则, 即狄利克雷判别法和阿贝尔判别法(第 15 题).

定理 8.1.10(狄利克雷判别法) 乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 如果它满足以下两条:

- (a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界;
- (b) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调趋于零.

交错级数的莱布尼茨判别法可以看成狄利克雷判别法的推论.

定理 8.1.11 (阿贝尔判别法) 乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛, 如果它满足以下两条:

- (a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
 (b) 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调有界.

例 8.1.13 考察以下级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0, x \in \mathbb{R}); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

解 (1) 当 $\alpha > 1$ 时, 由于

$$\left| \frac{\cos nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 故由魏尔斯特拉斯判别法知原级数收敛.

当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 若 $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, 故原级数发散. 若 $x \neq 2k\pi$, 令 $a_n = \cos nx$, $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, 易见, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调趋于零, 并且

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \frac{1}{2} \left| \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2} \right] / \sin \frac{x}{2} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right|.$$

从而由狄利克雷判别法知原级数收敛.

(2) 由结论(1)可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 而数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调有界, 从而由阿贝尔判别法可知原级数收敛. \square

3. 绝对收敛与条件收敛

我们在 8.1.2 小节深入研究了正项级数敛散性的判别法则, 而对于一般数项级数的敛散性, 其判别法则比较少. 我们设想从待判定的一般数项级数出发, 构造一个正项级数, 然后利用这个正项级数的敛散性推得原级数的敛散性. 对于任意

一个一般数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 将其通项取绝对值后所得到的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的绝对值级数. 如果绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 利用魏尔斯特拉斯判别法则, 立刻得:

定理 8.1.12 如果绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 都收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 定理 8.1.12 即是说绝对收敛蕴涵收敛, 由此可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$$

都是绝对收敛的, 从而也都是收敛的.

但是必须注意的是, 定理 8.1.12 的逆命题不成立, 即当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, 其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 未必收敛, 例如交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. 由此可见, 收敛的数项级数可以分成两类: 一类是绝对收敛的, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 都收敛; 另一类是级数自身是收敛的, 但其绝对值级数发散, 此时称该级数条件收敛, 例如, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 是条件收敛的.

例 8.1.14 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n}$ 的敛散性.

解 易知, 有恒等变形

$$(-1)^n \frac{\cos n}{n} = \frac{\cos(\pi + 1)n}{n}.$$

再利用例 8.1.13, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n}$ 收敛. 但是其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$

却是发散的. 事实上, 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ 收敛, 则由于

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{\cos^2 n}{n},$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ 也收敛. 但是

$$\frac{1}{2n} = \frac{\cos^2 n}{n} - \frac{\cos 2n}{2n},$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 化为两个收敛级数的和,从而它自身也收敛,这是不可能的.此矛盾

说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$ 发散.

综上所述,原级数是条件收敛的. \square

绝对收敛级数与条件收敛级数具有完全不同的性质,例如,级数的交换律与分配律只对绝对收敛级数成立.

定理 8.1.13(绝对收敛级数的交换律) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则任意交换此级数的各项顺序后所得到的新级数也绝对收敛,且其和不变.

证明 先对正项级数证明结论成立. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于和 S , 任意交换级数的各项顺序后所得到的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$. 一方面,新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 的任何一个部分和 $S'_n = \sum_{k=1}^n a'_k$ 都是从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中挑选出某些项(有限个)构成的和,因而

$$S'_n = \sum_{k=1}^n a'_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 的部分和数列有上界,从而收敛,并且

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \leq S.$$

另一方面,也可以把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 视为由 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 交换各项顺序后所得到的级数,因而也有 $S \leq S'$, 所以有 $S = S'$, 即定理结论对正项级数成立.

再证定理结论对一般的绝对收敛级数也成立. 设一般数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 下面我们分别用通项 a_n 的正部与负部:

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

将级数的正负项分开. 易知 $b_n, c_n \geq 0$, 并且

$$a_n = b_n - c_n, \quad |a_n| = b_n + c_n.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 都收敛, 所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也都收敛. 利用前面正项级数的定理结论, 并注意到, 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意交换各项的顺序后得到新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 时, 其正、负部相应地变为 $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$, 从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b'_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n - \sum_{n=1}^{\infty} c'_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

这就完全证明了定理. \square

对于条件收敛级数, 情形就完全不同. 一般来说, 当任意交换条件收敛级数的各项顺序时, 它们的和是要改变的, 甚至还有可能得到发散的级数. 先考察下面的例题.

例 8.1.15 设条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的和为 S , 现交换它的求和顺序, 使得在一个正项后面跟着两个负项, 即

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots.$$

试判断新级数的敛散性, 如果收敛, 试求出其和.

解 以 S'_n 表示新级数的部分和, 则有

$$\begin{aligned} S'_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

因此, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, S'_{3m} 收敛于 $\frac{1}{2}S$. 又因为

$$S'_{3m-1} = S'_{3m} + \frac{1}{4m}, \quad S'_{3m-2} = S'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2},$$

故当 $m \rightarrow \infty$ 时, S'_{3m-1} , S'_{3m-2} 与 S'_{3m} 具有相同的极限 $\frac{1}{2}S$, 所以交换顺序后的级数收敛, 且其和为 $\frac{1}{2}S$. \square

后面将得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 的和 $S = \ln 2$, 从而知上例中交换顺序后的级数和为 $\frac{1}{2} \ln 2$. 由此可见, 条件收敛级数与绝对收敛级数具有很大的区别. 为探究产生这种差别的原因, 下面考察条件收敛级数与绝对收敛级数通项的正负部对应的两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的敛散性. 由定理 8.1.13 的证明过程, 可以推得下面两个推论(第 18 题):

推论 8.1.1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充要条件是, 其通项的正负部对应的两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛.

推论 8.1.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则其通项的正负部对应的两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都发散.

由推论 8.1.1 和 8.1.2 可以看出, 绝对收敛与条件收敛的收敛机制不同: 绝对收敛级数的收敛是由于各项的绝对值减小的速度较快产生的, 因而与各项参与求和的先后顺序无关; 而条件收敛级数的收敛是由于正负项相互抵消造成的, 因此与各项的先后顺序有关. 进一步地, 有如下更深刻的黎曼重排定理:

对一个条件收敛的级数来说, 总可以恰当地交换求和顺序, 使得新级数收敛到预先任意指定的一个实数值, 或发散到 $\pm \infty$ (第 19 题). 从而, 级数的交换律对绝对收敛级数是成立的, 而对条件收敛级数不成立.

绝对收敛与条件收敛的差异还表现在级数的乘法运算上. 下面讨论级数的乘法运算. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 我们可仿照有限项之和相乘的规则, 作出两个级数的各项之间所有可能的乘积, 将其排成一个表(表 8.1).

表 8.1 两个级数的各项之间所有可能的乘积

$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	\cdots	$a_1 b_n$	\cdots
$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	\cdots	$a_2 b_n$	\cdots
$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	\cdots	$a_3 b_n$	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
$a_n b_1$	$a_n b_2$	$a_n b_3$	\cdots	$a_n b_n$	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	

可以有很多种方法将表 8.1 中的项排列成不同的级数,下面只介绍最常用的“对角线法”,即将其排成级数

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) + \cdots,$$

称之为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的柯西乘积.它的特点是每个括号内的子项中 a_i 和 b_j 的下标之和 $i+j$ 相等(表 8.2).

表 8.2 对角线法排列

$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	\cdots	$a_1 b_n$	\cdots
	\swarrow	\swarrow	\swarrow		
$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	\cdots	$a_2 b_n$	\cdots
	\swarrow	\swarrow			
$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	\cdots	$a_3 b_n$	\cdots
	\swarrow				
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
$a_n b_1$	$a_n b_2$	$a_n b_3$	\cdots	$a_n b_n$	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	

定理 8.1.14(绝对收敛级数的分配律) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛,且其和分别为 A 和 B ,则它们各项的乘积 $a_i b_j$ ($i, j = 1, 2, \cdots$) 按任意顺序依次相加所得到的级数也绝对收敛,且其和等于 AB .

证明 将各项乘积 $a_i b_j$ ($i, j = 1, 2, \cdots$) 按某种顺序依次相加所得到的级数记为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. 下证:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛,且其和为 AB .

事实上,设绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 分别收敛到 A' 和 B' ,考虑绝对

值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 的部分和数列. 令

$$C'_n = \sum_{k=1}^n |c_k|,$$

其中 $|c_k| = |a_{i_k} b_{j_k}|$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 令 $m = \max\{i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_n, j_n\}$, 于是有

$$C'_n \leq \left(\sum_{k=1}^m |a_k| \right) \left(\sum_{k=1}^m |b_k| \right) \leq A'B',$$

即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 的部分和数列有上界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

为求出绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的和, 由绝对收敛级数的结合律和交换律, 把级数

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 重新结合成新级数

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + \dots \\ & + (a_1 b_n + a_2 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_1) + \dots \end{aligned}$$

此时所得级数的第 n 个部分和恰好就是

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = A_n B_n.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 即得结论. □

例 8.1.16 证明: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ ($|q| < 1$); 由此求出级数

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ ($|q| < 1$) 的和.

证明 由于 $|q| < 1$, 故几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛. 记

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2,$$

其中 c_n 是柯西乘积的通项, 即

$$c_n = \sum_{k=0}^n q^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n q^n = (n+1)q^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

由定理 8.1.14 知 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$.

由于几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 的和为 $\frac{1}{1-q}$, 所以有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad \square$$

注 8.1.4 对于条件收敛级数,乘法分配律未必成立.例如,交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛的,它的柯西乘积是

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1}.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{n}$, 所以有

$$c_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1,$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ 的通项 c_n 不收敛于零,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ 发散.

习题 8.1

1. 写出数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的 $\varepsilon-N$ 定义.

2. 判断下列级数是否收敛,若收敛,求出级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

3. 证明性质 8.1.3 和 8.1.4.

4. 证明正项级数收敛的有界判别法.

5. 研究下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n-1}};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$$

(5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}};$$

(7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\pi}{4n};$$

(8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

(9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

(10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!};$$

(11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^n}{(1+n)^n};$$

(12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n};$$

(13)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}};$$

(14)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^k n};$$

(15)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3};$$

(16)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \quad (a > 0).$$

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛; 试举例说明逆命题不成立. 但是, 如果 $a_n > 0$, 则逆命题成立.

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛; 试举例说明逆命题不成立.

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛; 试举例说明逆命题不成立.

9. 证明定理 8.1.3 的结论(2)和(3).

10. 研究下列级数的敛散性:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1};$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n};$$

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

11. 证明: 用莱布尼茨级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的部分和 S_n 近似其和 S 所产生的误差小于 a_{n+1} .

12. 证明级数的柯西收敛准则.

13. 研究下列级数的敛散性:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n};$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{n!(n+1)};$$

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos n + b \sin n}{n(n + \sin n!)}.$$

14. 证明级数收敛的魏尔斯特拉斯判别法.

15. 证明乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

16. 研究下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}.$$

17. 证明级数的绝对收敛蕴涵收敛.

18. 证明推论 8.1.1 和 8.1.2.

19. 利用交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 来验证黎曼重排定理, 即经过恰当地交换求和顺序, 新级数可分别收敛到 $-1, 0, 1, -\infty, +\infty$.

20. 证明黎曼重排定理.

21. 设阿基里斯的速率为 $v_1 = 10 \text{ m/s}$, 乌龟的速率为 $v_2 = 1 \text{ m/s}$. 一开始, 乌龟在阿基里斯前方 100 m 处. 试确定阿基里斯第 n 次跑到乌龟前一次所在位置时所用的时间以及阿基里斯与乌龟之间的距离.

8.2 函数项级数

8.2.1 函数列的收敛性

上一节讨论了数项级数, 即无穷多个数相加. 在很多时候, 我们需要考虑无穷多个函数相加, 即所谓的函数项级数. 由上一节可知, 数项级数的收敛性是借助其部分和数列的收敛性来定义的. 类似地, 为研究函数项级数的收敛性, 我们首先研究函数列的收敛性.

所谓函数列就是一列定义在 I_0 中的函数 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 这里 I_0 是一个实数子集. 为了方便论述, 这里以及后面的 I_0 是一个区间. 如果对于 I_0 中的某个点 x_0 , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则称 x_0 是函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛点; 全体收敛点构成 I_0 的一个子集 I , 称为该函数列的收敛域. 当 x 在 I 中变化时, 极限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 依 x 的变化而变化. 将此极限值记为函数 $f(x)$, 称 $f(x)$ 为该函数列的极

限函数;称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 中逐点收敛到 $f(x)$ (图 8.10),记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

例 8.2.1 讨论函数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛域和极限函数.

解 显然,函数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在整个实数轴上有定义.对 $\forall x_0 \in (-1, 1)$,有极限关系 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = 0$;当 $x_0 = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_0^n = 1$;当 $x_0 \notin (-1, 1]$ 时, $\{x_0^n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散.因此,函数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛域为 $(-1, 1]$ (图 8.11);其极限函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad \square$$

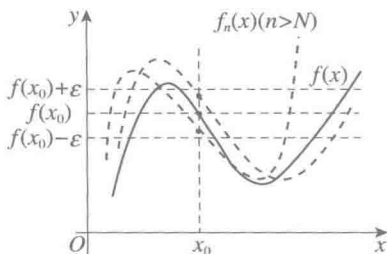


图 8.10 函数列的逐点收敛

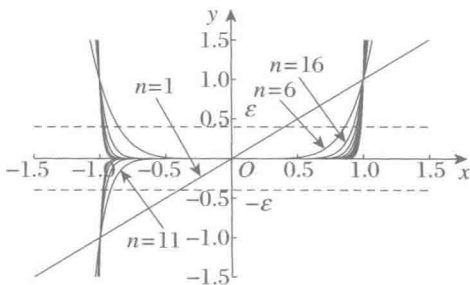


图 8.11 函数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛性

上例中,通项 $f_n(x) = x^n$ 在区间 $(-1, 1]$ 上连续,但是其极限函数 $f(x)$ 却在区间 $(-1, 1]$ 上有间断点 $x_0 = 1$ (图 8.11).

极限函数产生间断的原因是,逐点收敛的函数列在不同点处的收敛速度有快有慢.函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$ 是指:对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon, x_0)$,当 $n > N$ 时, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$.其中 N 不仅依赖于 ϵ ,还依赖于 x_0 .如果 $N(\epsilon, x_0)$ 关于 $x_0 \in I$ 有一致的上界,就得到如下一致收敛性的概念:

定义 8.2.1(函数列的一致收敛) 设函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 和函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.如果对 $\forall \epsilon > 0$,存在一个仅与 ϵ 有关的正整数 $N = N(\epsilon)$,使得当 $n > N$ 时,不等式 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ 对所有 $x \in I$ 都成立,则称函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$.

例 8.2.2 对 $\forall a \in (0, 1)$,证明:函数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[-a, a]$ 上一致收敛于零.

证明 对 $\forall x \in [-a, a]$,总有 $|x^n - 0| \leq a^n$,从而对 $\forall \epsilon \in (0, 1)$,取 $N = [\ln \epsilon / \ln a] + 1$,则当 $n > N$ 时,有

$$|x^n - 0| \leq a^n < a^{\ln \epsilon / \ln a} < \epsilon,$$

即函数列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[-a, a]$ 上一致收敛于零(图 8.12). \square

例 8.2.3 考察定义在无穷区间 $[0, +\infty)$ 上的函数列 $\left\{\frac{1}{x+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的一致收敛性.

证明 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 总有 $0 < \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$. 而当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于零, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x+n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即原函数列在无穷区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于零 (图 8.13). \square

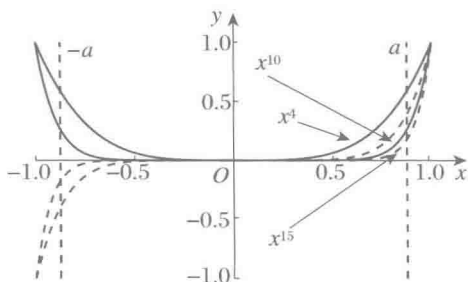


图 8.12 例 8.2.2 中函数列的一致收敛性

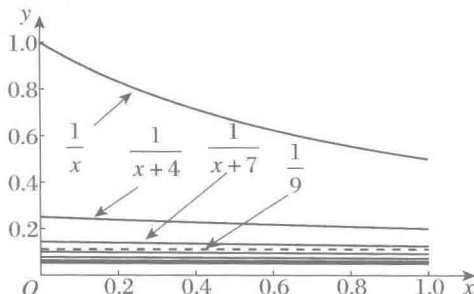


图 8.13 例 8.2.3 中函数列的收敛性

函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $f(x)$ 的几何意义为: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一个正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 函数 $f_n(x)$ 的图像完全落在由曲线 $y = f(x) - \varepsilon$ 和 $y = f(x) + \varepsilon$ 所围成的曲形带状区域中 (图 8.14).

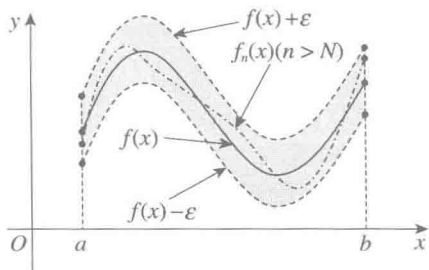


图 8.14 函数列的一致收敛

类似于级数收敛的柯西准则与魏尔斯特拉斯判别法, 函数列的一致收敛也有相应的柯西准则与魏尔斯特拉斯判别法 (第 1 题).

8.2.2 函数项级数的收敛性

利用函数列的逐点收敛和一致收敛, 可以定义函数项级数的逐点收敛和一致收敛.

设函数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 定义在区间 I_0 上, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为函数项级数. 如果部分和函数列

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

的收敛域为 I , 且 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 中收敛于函数 $S(x)$, 那么称 I 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域, 并称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中(逐点)收敛于 $S(x)$. 类似地, 如果函数列 $S_n(x)$ 在 I' 中一致收敛, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I' 中一致收敛.

另外, 对任意一个函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 可以构造一个以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为部分和的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 事实上, 令 $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), 补充定义 $f_0(x) \equiv 0$, 即得函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列为 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. 因此, 函数项级数的收敛性及其性质与函数列的收敛性及其性质是完全对应的. 下面我们仅叙述有关函数项级数的一致收敛的判别法则以及和函数的性质, 读者可以自行写出相应的函数列一致收敛的判别法则以及极限函数的性质.

定理 8.2.1 (柯西收敛准则) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中一致收敛的充要条件为, 对 $\forall \epsilon > 0$, 存在一个仅与 ϵ 有关的正整数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon$ 对所有的正整数 p 和每个 $x \in I$ 都成立.

证明 必要性. 假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中一致收敛于函数 $S(x)$, 则对 $\forall \epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |S_{n+p}(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

对任意正整数 p 以及所有 $x \in I$ 都成立. 于是, 对任意正整数 p 以及所有 $x \in I$, 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

充分性. 假设对 $\forall \epsilon > 0$, 存在一个正整数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ 对所有正整数 p 和每个 $x \in I$ 都成立. 由数项级数的

柯西收敛准则,对每个 $x \in I$, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 均收敛, 设其和为 $S(x)$. 任意固定 $n > N$ 和 $x \in I$, 在不等式 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 中, 令 $p \rightarrow \infty$, 则得到 $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. 由于 $n > N$ 和 $x \in I$ 是任意的, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中一致收敛于 $S(x)$. \square

推论 8.2.1 (必要条件) 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中一致收敛, 则其通项 $u_n(x)$ 在 I 中一致收敛于零.

这个必要条件常用来判定函数项级数的非一致收敛性.

例 8.2.4 考察定义在无穷区间 $(0, +\infty)$ 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 的收敛性.

解 (a) 逐点收敛性. 对任意固定的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 不难判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx_0}$ 是收敛的, 所以函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在无穷区间 $(0, +\infty)$ 上逐点收敛.

(b) 一致收敛性. 考察级数的通项 $u_n(x) = ne^{-nx}$. 虽然 $u_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中逐点收敛于零, 但是若取正数 $\varepsilon_0 < \frac{1}{e}$, 则对任意正整数 N , 任取 $n_0 > N$ 和

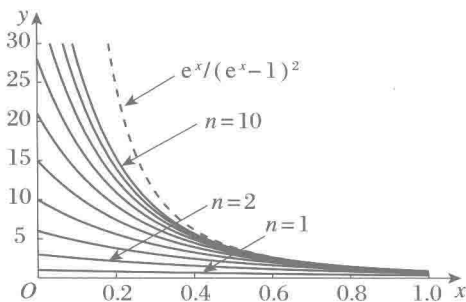


图 8.15 例 8.2.4 中函数项级数的收敛性

$x_0 = \frac{1}{n_0} \in (0, +\infty)$, 都有

$$n_0 e^{-n_0 x_0} = n_0 e^{-1} > \frac{1}{e} > \varepsilon_0,$$

即通项 $u_n(x) = ne^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 0, 从而函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在无穷区间 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛(图 8.15). \square

推论 8.2.2 设 $u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 内逐点收敛, 其通项 $u_n(x)$ 在右端点 $x = b$ 处左连续(或在左端点 $x = a$ 处右连续), 并且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ (或 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$) 发散, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 内非一致收敛.

证明 只需对右端点 $x = b$ 证明即可.

反证法. 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛. 由柯西判别法知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a, b)$ 和正整数 p , 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

再由通项 $u_n(x)$ 在右端点 b 的左连续性, 对于任意固定的 $p > 0$, 在上式两边取极限 $x \rightarrow b^-$, 可得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(b) \right| = |u_{n+1}(b) + \cdots + u_{n+p}(b)| \leq \varepsilon,$$

即数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 满足柯西收敛准则, 从而收敛, 与假设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 发散矛盾.

因此, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 内非一致收敛. \square

例 8.2.5 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $(0, 1)$ 内的收敛性.

解 (a) 逐点收敛性. 对任意固定的 $x_0 \in (0, 1)$, 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$ 收敛, 从而函

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $(0, 1)$ 上逐点收敛.

(b) 一致收敛性. 显然, 级数的通项 $u_n(x) = x^n$ 在区间 $(0, 1]$ 上连续,

并且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ 发散. 由推

论 8.2.2 知, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在区间 $(0, 1)$ 内非一致收敛(图 8.16). \square

类似于数项级数, 柯西收敛准则在实际应用时通常很难直接验证, 但由它可以推出某些更为实用的判别准则, 例如下面的魏尔斯特拉斯判别法.

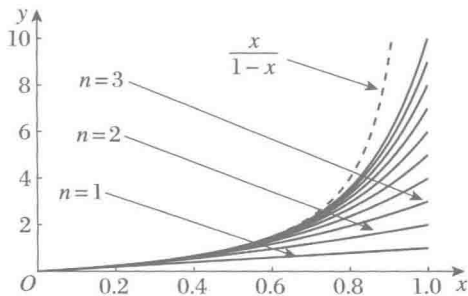


图 8.16 例 8.2.5 中函数项级数的收敛性

定理 8.2.2 (魏尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中有定义.

如果存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得从某项起不等式

$$|u_n(x)| \leq a_n$$

对所有 $x \in I$ 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 中一致收敛.

例 8.2.6 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 因为对任意实数 x , 都有

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛(图 8.17). \square

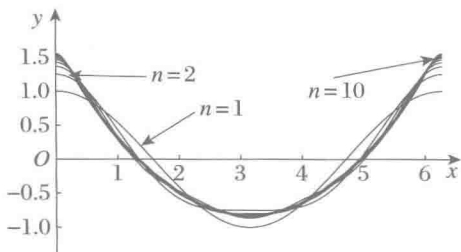


图 8.17 例 8.2.6 中函数项级数的收敛性

魏尔斯特拉斯判别法用起来比较方便, 但是其条件太强. 事实上, 它要求

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 及其绝对值级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 都在 I 中一致收敛. 实际

上, 存在这样的级数, 它本身一致收敛, 但其绝对值级数不收敛, 或者其绝对值级数收敛, 但非一致收敛, 等等. 对于这类级数的一致收敛性, 魏尔斯特拉斯判别法就无效了, 故需要一些更精细的判别法. 类似于数项级数, 我们有关于乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛的狄利克雷判别法以及阿贝尔判别法(第 5 题).

定理 8.2.3(狄利克雷判别法) 乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 如果它满足以下两条:

- (a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界, 即存在一个与 n 和 x 均无关的常数 M , 使得 $|S_n(x)| \leq M$ 对所有正整数 n 和 $x \in I$ 都成立;
- (b) 函数列 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 对于每个 $x \in I$ 都是单调的, 并且在 I 上一致趋于零.

定理 8.2.4(阿贝尔判别法) 乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛,

如果它满足以下两条:

(a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛;

(b) 函数列 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 对于每个 $x \in I$ 都是单调的, 并且在 I 上一致有界.

例 8.2.7 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调趋于零. 在任何一个不包含 $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的闭区间 I 上, 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的一致收敛性.

解 为应用狄利克雷判别法, 只需证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ 的部分和函数列在 I 上一致有界. 事实上, 对于 $x \neq 2k\pi$, 我们有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \frac{\left| \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right|}{\left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|},$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \frac{\left| \sin \frac{x}{2} - \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right|}{\left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

在闭区间 I 上, 连续函数 $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, 故存在一个与 n 和 x 均无关的常数 M , 使得

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq M, \quad \left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq M.$$

故由狄利克雷判别法知, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在闭区间 I 上一致收敛. \square

例 8.2.8 设数项级数 $\sum_{k=1}^n a_n$ 收敛, 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 利用阿贝尔判别法, 只需证明: 数列 $\{n^{-x}\}_{n=1}^{\infty}$ 对于每个 $x \geq 0$ 都是单调的, 并且在 $[0, +\infty)$ 上一致有界. 单调性是显然的, 同时, 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 < n^{-x} \leq 1$. 因此, 由阿贝尔判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. \square

8.2.3 一致收敛级数和函数的性质

我们知道,有限个连续函数的和仍是连续函数,有限个可微(或可积)函数的和仍是可微(或可积)函数,并且和函数的微分(或积分)等于各项的微分(或积分)之和,即对有限个函数求和,可以逐项求极限、微分以及积分.但是对无限个函数求和的无穷级数则未必可以逐项求极限、微分以及积分.

例 8.2.9 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 的和函数在区间 $[0,1]$ 上的连续性和可微性.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ (图 8.18) 的部分和函数列 $S_n(x) = x^n - 1$ 在区间 $[0,1]$ 上逐点收敛,其和函数为

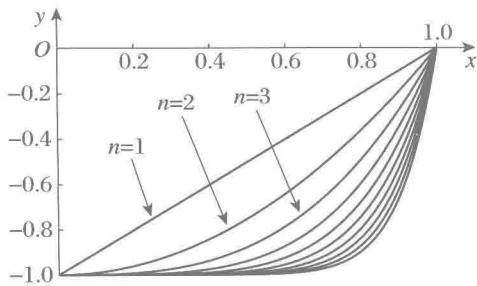


图 8.18 例 8.2.9 中级数的收敛性

$$S(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

由此可见,虽然级数的通项 $u_n(x) = x^{n-1}(x-1)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且可微,但是其和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处是不连续的,当然也不可微. \square

例 8.2.9 说明,通项为连续(或可微)函数的收敛无穷级数,其和函数未必连续(或可微).

例 8.2.10 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [2n^2 x e^{-n^2 x^2} - 2(n-1)^2 x e^{-(n-1)^2 x^2}]$ 的和函数在区间 $[0,1]$ 上的可积性以及是否可以逐项积分.

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [2n^2 x e^{-n^2 x^2} - 2(n-1)^2 x e^{-(n-1)^2 x^2}]$ 的部分和函数列 $S_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上逐点收敛(图 8.19),其和函数 $S(x) = 0$,显然, $\int_0^1 S(x) dx = 0$.但若对级数进行逐项积分,则可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [2n^2 x e^{-n^2 x^2} - 2(n-1)^2 x e^{-(n-1)^2 x^2}] dx = \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2} - e^{-n^2}] = 1,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [2n^2 x e^{-n^2 x^2} - 2(n-1)^2 x e^{-(n-1)^2 x^2}] dx \neq \int_0^1 S(x) dx,$$

从而原函数项级数不可以逐项求积分. □

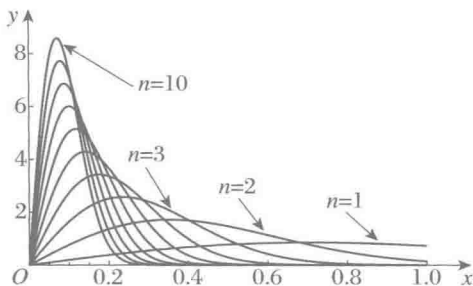


图 8.19 函数列 $S_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$

例 8.2.10 说明,一般情形下,对于收敛的无穷级数,逐项积分是不允许的.再仔细考察例 8.2.9 和 8.2.10 中的函数项级数,发现它们仅在给定的区间上是收敛的,而非一致收敛.下面证明,加上适当的一致收敛性条件,无穷级数也可以逐项求极限、微分以及积分.

定理 8.2.5 (逐项求极限) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 并且通项 $u_n(x)$ 在 I 上连续, 则和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

证明 对 $x_0 \in I$, 为证函数 $S(x)$ 在 x_0 点连续, 只需证明极限关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0),$$

即考察当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数值 $S(x)$ 和 $S(x_0)$ 之差是否趋于零. 由于不等式

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| \\ &\quad + |S_n(x_0) - S(x_0)| \end{aligned}$$

对任意正整数 n 成立, 下面对不等式右边的三项分别给出估计. 对 $\forall \epsilon > 0$, 由级数的一致收敛性知, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S(x) - S_n(x)| < \epsilon/3$$

对所有 $x \in I$ 都成立. 选定一个这样的 n 之后, 再由有限个连续函数之和 $S_n(x)$ 的连续性可知, 存在正数 δ , 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 且 $x \in I$ 时, 有不等式

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3.$$

于是,当 $|x - x_0| < \delta$ 且 $x \in I$ 时,我们有

$$|S(x) - S(x_0)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

这就证明了函数 $S(x)$ 在 x_0 点连续. 由 $x_0 \in I$ 的任意性,可知 $S(x)$ 在 I 上连续. \square

推论 8.2.3 如果逐点收敛的连续函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数 $S(x)$ 在区间 I 上不连续,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上非一致收敛.

考察例 8.2.9 中的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$, 其和函数 $S(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上不连续,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在区间 $[0, 1]$ 上非一致收敛.

例 8.2.11 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

解 在区间 $[-2, 2]$ 上,由于

$$\left| \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2 \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n,$$

而等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 收敛,所以由魏尔斯特拉斯判别法可知,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$ 在区间 $[-2, 2]$ 上一致收敛(图 8.20). 显然,级数的通项 $u_n(x) = \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$ 在区间 $[-2, 2]$ 上连续. 由定理 8.2.5 可知,和函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上连续,特别地,在 $x = 1$ 处连续. 于是,有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}. \quad \square$$

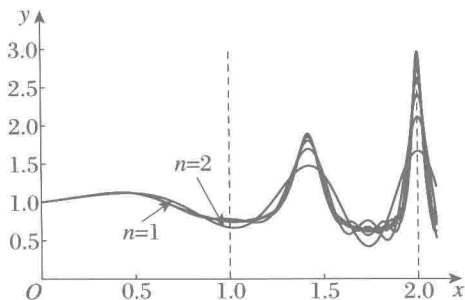


图 8.20 例 8.2.11 中级数的收敛性

定理 8.2.5 的条件是充分条件,但不是必要条件,即和函数 $S(x)$ 连续不一定要求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛.

例 8.2.12 考察函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的连续性.

解 由例 8.2.4 可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛.但是,对 $\forall x_0 \in (0, +\infty)$,取正数 $\delta < x_0$,对 $\forall x \in [\delta, +\infty)$,有

$$ne^{-nx} \leq ne^{-n\delta}.$$

由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\delta}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛.因此,其和函数 $f(x)$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ 上连续,特别地,在 x_0 处连续.由 x_0 的任意性可知,函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续. \square

定理 8.2.6 (逐项积分公式) 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,并且通项 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则有逐项积分公式

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

证明 由定理 8.2.5 知,和函数 $S(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上也连续,因而是可积的.又因为对有限项求和可以逐项积分,即

$$\sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x) dx = \int_a^b S_n(x) dx,$$

所以只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

为此,考察差值

$$\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx$$

是否趋于零.对 $\forall \epsilon > 0$,由级数的一致收敛性知,存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,不等式

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

对所有 $x \in [a, b]$ 都成立. 于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon,$$

即得逐项积分公式成立. □

现在讨论函数项级数在什么条件下可以逐项求导.

定理 8.2.7 (逐项求导公式) 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上收敛于 $S(x)$, 其通项 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数 $u'_n(x)$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 并且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$, 即

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

我们只需证明: $S'(x) = \sigma(x)$. 对 $\forall x \in [a, b]$, 由定理 8.2.6 知, 函数 $\sigma(t)$ 在区间 $[a, x]$ 上连续, 并有逐项积分公式

$$\begin{aligned} \int_a^x \sigma(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] \\ &= S(x) - S(a). \end{aligned}$$

由 $\sigma(t)$ 的连续性以及微积分基本定理, 可得 $S'(x) = \sigma(x)$. □

例 8.2.13 考察函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导性.

解 由于区间 $(-\infty, +\infty)$ 是无穷区间, 故不能直接应用定理 8.2.7. 但是, 对 $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 取正数 $M > |x_0|$, 显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在有界闭区间 $[-M, M]$ 上收敛, 其通项在 $[-M, M]$ 上有连续的导数 $\frac{\cos nx}{n^2}$, 并且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在区间 $[-M, M]$ 上一致收敛. 从而由定理 8.2.7 知, $f(x)$ 在区间 $[-M, M]$ 上有连续的导数, 并且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

在区间 $[-M, M]$ 上成立. 由 x_0 的任意性知, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且导函数连续. \square

注 8.2.1 由例 8.2.12 和 8.2.13 可知, 由于连续性和可微性是“点态”性概念, 应用定理 8.2.5 和 8.2.7 时, 可以将条件“区间上一致收敛”减弱为“区间上内闭一致收敛”, 即在原区间中的任意一个有界闭子区间上一致收敛. 由此可以将定理 8.2.5 和 8.2.7 推广到无穷区间上.

习 题 8.2

1. 写出函数列一致收敛的柯西准则和魏尔斯特拉斯判别法.
2. 确定下列函数列的收敛域以及极限函数:

$$(1) f_n(x) = x^n - x^{n+1};$$

$$(2) f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2};$$

$$(3) f_n(x) = n^\alpha e^{-nx} \quad (\alpha \geq 0 \text{ 为常数});$$

$$(4) f_n(x) = \sin \frac{1+nx}{2n}.$$

3. 确定下列级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n^2};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

4. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad (-\infty, \infty);$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+n^2x^2)}, \quad (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n, \quad (\text{a}) \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (\text{b}) (-1, 1);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, [0, +\infty);$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, [0, +\infty);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, (1, \infty);$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, [\delta, 2\pi - \delta] (\delta > 0);$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^x e^{nx}}, [0, +\infty).$$

5. 证明乘积项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛的狄利克雷判别法以及阿贝尔判别法.
6. 设两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 均在区间 I 上收敛(或一致收敛), 则它们的线性组合 $\sum_{n=1}^{\infty} [c_1 u_n(x) + c_2 v_n(x)]$ 也在区间 I 上收敛(或一致收敛), 其中 c_1, c_2 为常数.
7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在集合 I_1 和 I_2 上收敛(或一致收敛), 则它在 $I = I_1 \cup I_2$ 上也收敛(或一致收敛).
8. 设数项级数 $\sum_{k=1}^n a_n$ 收敛, 考察函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.
9. 研究函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的一致收敛性、连续性、可微性.
10. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 以及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
11. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$. 求积分 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$.
12. 证明: 函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续的二阶微商.
13. 证明定理 8.2.8.

8.3 幂级数与泰勒级数

在函数项级数中,理论上最简单、应用上极其广泛的一类级数是幂级数,即通项为幂函数 $a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ + a_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

其中实常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称为幂级数的系数,点 x_0 称为幂级数的中心. 对于一般情形 $x_0 \neq 0$, 经变量代换 $y = x - x_0$, 便可仅考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 幂级数的重要性就在于它的部分和是多项式, 而多项式不仅形式上简单、计算方便, 而且在整个数轴上具有任意阶的微商. 因此只要幂级数收敛, 尽管其和函数可能是很复杂的函数, 但是总可以用我们熟悉的多项式来近似表达, 并且可以达到任意的精度.

8.3.1 幂级数的收敛半径

我们首先研究幂级数的收敛性, 幂级数的收敛性比一般的函数项级数的收敛性简单, 因为幂级数的收敛域总是一个区间, 这就为研究这类级数带来许多方便.

定理 8.3.1 (阿贝尔定理) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_1 \neq 0$ 处收敛, 则它在区间 $(-|x_1|, |x_1|)$ 内绝对收敛; 反之, 若幂级数在点 x_2 处发散, 则它在所有满足 $|x| > |x_2|$ 的点 x 处发散.

证明 假设数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其通项 $a_n x_1^n$ 趋于零, 因此数列 $\{a_n x_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ 必有界, 即存在常数 $M > 0$, 使得 $|a_n x_1^n| \leq M$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$). 对 $x \in (-|x_1|, |x_1|)$, 有估计

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_1} \right|^n.$$

由于 $\left| \frac{x}{x_1} \right| < 1$, 故等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ 收敛, 于是由比较判别法可知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

法,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

(1) 当 $L > 0$ 时:若 $|x| < R = 1/L$, 则 $L|x| < 1$, 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 绝对收敛; 若 $|x| > R$, 则 $L|x| > 1$, 故当 n 充分大时, 有 $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_nx^n|$, 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的通项 a_nx^n 不趋于零, 因此该级数发散. 综上, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径为 $R = 1/L$.

(2) 当 $L = 0$ 时:对 $\forall x \neq 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = 0 < 1,$$

因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 绝对收敛, 即该幂级数的收敛半径为 $R = +\infty$.

(3) 当 $L = +\infty$ 时:对 $\forall x \neq 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = +\infty$, 故当 n 充分大时, 有 $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_nx^n|$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 的通项 a_nx^n 不趋于零, 因此该级数发散, 从而该幂级数的收敛半径为 $R = 0$. \square

例 8.3.1 求出下列幂级数的收敛半径:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

解 对于第一个幂级数, 直接计算, 得

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

所以收敛半径 $R_1 = 1/L = 1$. 同理, 可得 $R_2 = R_3 = 1, R_4 = +\infty, R_5 = 0$. \square

仔细研究例 8.3.1 的前三个幂级数, 虽然它们的收敛半径都是 1, 但是它们在收敛区间 $(-1, 1)$ 的两个端点 $x = \pm 1$ 处的敛散性不同: 第一个幂级数在左右端点 $x = \pm 1$ 处都发散; 第二个幂级数在左端点 $x = -1$ 处收敛, 在右端点 $x = 1$ 处发散; 第三个幂级数在左右端点 $x = \pm 1$ 处都收敛. 一般地, 幂级数在收敛区间端点处的敛散性需要具体分析, 因此收敛区间与收敛域是两个不同的概念.

应用定理 8.3.2 时, 要求幂级数的所有系数 $a_n \neq 0$, 有时幂级数可能不包含 x 的所有幂次, 即有部分系数 $a_n = 0$, 此时不能直接应用定理 8.3.2, 但是可以利用其证明思想, 求出幂级数的收敛半径.

例 8.3.2 求出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径.

解 本例中的幂级数只含有 x 的偶次幂, 因此不能直接应用定理 8.3.2. 令 $u_n(x) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$, 可直接应用达朗贝尔比值判别法, 直接计算, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} |x|^2 = 4|x|^2.$$

当 $4|x|^2 < 1$, 即 $|x| < 1/2$ 时, 原级数绝对收敛; 当 $4|x|^2 > 1$, 即 $|x| > 1/2$ 时, 原级数发散. 综上, 级数的收敛半径 $R = 1/2$. \square

8.3.2 幂级数及其和函数的性质

类似于一般函数项级数, 我们研究幂级数的一致收敛性, 进而研究幂级数及其和函数的分析性质, 例如连续性、可微性以及可积性等.

定理 8.3.3 (内闭一致收敛) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则该幂级数在收敛区间 $(-R, R)$ 内的任何有界闭区间 $[-r, r]$ 上一致收敛 ($0 < r < R$), 即级数在收敛区间 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛 (图 8.22).

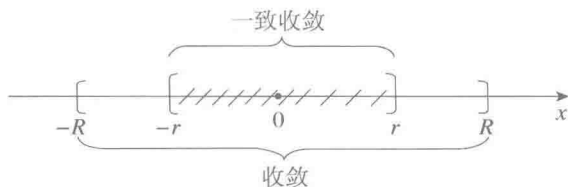


图 8.22 内闭一致收敛

证明 因为 $0 < r < R$, 所以幂级数在 $x = r$ 处绝对收敛, 而对于满足 $|x| \leq r$ 的 x , 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n.$$

由魏尔斯特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在闭区间 $[-r, r]$ 上一致收敛. \square

幂级数的内闭一致收敛性保证了其和函数不仅在收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的, 而且具有任意阶连续导数, 同时有相应的逐项积分公式.

定理 8.3.4 (和函数的性质) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则:

(1) 其和函数 $S(x)$ 在级数的收敛区间 $(-R, R)$ 内连续;

(2) 其和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内具有任意阶导数, 并且可以逐项求导, 即

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \quad (k=1, 2, \dots),$$

逐项求导后所得的幂级数与原幂级数具有相同的收敛半径 R ;

(3) 对 $\forall x \in (-R, R)$, 有如下逐项积分公式:

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

并且逐项积分后所得的幂级数的收敛半径也为 R .

证明 只需证明逐项一次求导后所得的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 与原幂级数具有相同的收敛半径 R , 而其他结论由一致收敛函数项级数和函数的性质可得.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为 R' , 首先证明 $R' \geq R$. 为此, 任取 $x_0 \in (-R, R)$, 则存在正数 r , 使得 $|x_0| < r < R$. 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 它的通项 $a_n r^n$ 趋于零, 所以存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n r^n| < 1$. 因此, 当 $n > N$ 时, 有

$$|n a_n x_0^{n-1}| = \left| n a_n r^{n-1} \left(\frac{x_0}{r} \right)^{n-1} \right| \leq \frac{n}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1}.$$

由于 $\left| \frac{x_0}{r} \right| < 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \left| \frac{x_0}{r} \right|^{n-1}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在点 x_0 处收敛. 这就证明了 $R' \geq R$.

现在证明 $R' \leq R$, 用反证法. 假设 $R' > R$, 则存在 $r > R$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ 收敛. 由于

$$a_n r^n = n a_n r^{n-1} \cdot \frac{r}{n},$$

由阿贝尔定理知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R 矛盾.

综上所述, $R' = R$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径为 R . □

利用幂级数和函数的性质, 可以求出某些幂级数的和函数.

例 8.3.3 求出以下幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty); \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad (-1 < x < 1).$$

解 (1) 前面已经求出了幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径 $R = +\infty$, 所以其和函数 $S(x)$ 在整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 并且可以逐项求导, 从而有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

另外, 易知, $S(0) = 1$, 即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和函数 $S(x)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} S'(x) = S(x), \\ S(0) = 1. \end{cases}$$

求解可得 $S(x) = e^x$ ($-\infty < x < +\infty$).

(2) 注意到幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 具有相同的收敛半径 $R = 1$, 所以其收敛区间为 $(-1, 1)$. 对 $x \in (-1, 1)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \\ &= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数为 $\frac{x}{(1-x)^2}$ ($-1 < x < 1$). □

例 8.3.4 设实常数 α 不是非负整数. 求出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

的收敛半径与和函数.

解 计算极限:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1,$$

因此, 该幂级数的收敛半径 $R = 1$, 记它在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数为 $F(x)$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 由逐项求导公式可得

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n.$$

利用公式 $\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}$, 直接计算, 可得 $(1+x)F'(x) = \alpha F(x)$. 求解此

微分方程, 可得通解 $F(x) = C(1+x)^{\alpha}$, 其中 C 为常数. 再由条件 $F(0) = 1$, 可定出 $C = 1$, 即得原幂级数的和函数为 $F(x) = (1+x)^{\alpha}$ ($-1 < x < 1$). \square

定理 8.3.5 (幂级数的四则运算) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2 , 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则在区间 $(-R, R)$ 上, 有:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n;$$

$$(2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ 其中 } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

证明 由收敛级数的线性性, 即可得到结论(1). 利用在收敛区间内绝对收敛级数的分配律, 可得到结论(2). \square

最后, 我们研究幂级数的和函数在收敛区间的端点处的单侧连续性.

定理 8.3.6 (和函数的单侧连续性) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 如果级数在 $x = R$ 处收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续; 如果级数在 $x = -R$ 处收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

证明 只对 $x = R$ 给出证明, 同理可得 $x = -R$ 的情形. 将幂级数表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 而对区间 $[0, R]$ 上每个固定的 x 值, 数列 $\left\{ \left(\frac{x}{R}\right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ 是单调减的, 并且一致有界, $\left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$. 由乘积项级数一致收敛的阿贝尔判别法知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $[0, R]$ 上一致收敛, 故和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续. \square

8.3.3 函数的泰勒级数展开

前面我们讨论的是如何确定幂级数的收敛区域, 并研究其和函数有哪些性质. 但在实际应用中, 所遇到的经常是相反的问题, 即考虑已知函数 $f(x)$ 在给定区间上是否可以展开成一个幂级数, 进而利用幂级数或其部分和函数列来近似 $f(x)$. 这就是本小节的主要内容.

首先, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近可以展开成幂级数, 即它可以表示成

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

则 $f(x)$ 在点 x_0 附近必有任意阶导数, 并且

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)!a_{k+1}(x-x_0) + \cdots \\ + n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} + \cdots.$$

令 $x = x_0$, 可得

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, \cdots, f^{(k)}(x_0) = k!a_k, \cdots,$$

即

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), \cdots, a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \cdots.$$

这就是说, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近可以展开成幂级数, 那么这个幂级数是唯一的, 并且一定具有如下形式:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有任意阶导数, 则可以构造幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

并称之为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数**. 特别地, 当 $x_0 = 0$ 时, 称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**. 一般来说, $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数可能在除去点 x_0 外所有点都发散, 或者即使在点 $x \neq x_0$ 处收敛, 其和也未必等于 $f(x)$, 所以 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数一般只能记作

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

当函数 $f(x)$ 的泰勒级数收敛到自身时, 称函数 $f(x)$ 可以展开成泰勒级数, 其泰勒级数称为函数 $f(x)$ 的**泰勒展开式**. 特别地, 当 $x_0 = 0$ 且 $f(x)$ 的麦克劳林级数收敛到自身时, 其麦克劳林级数称为 $f(x)$ 的**麦克劳林展开式**.

什么样的函数可以展开成泰勒级数? 为解决这个问题, 回忆上册第 3 章中带有拉格朗日型余项的泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

而 ξ 介于 x 与 x_0 之间. 由此可见, 要使 $f(x)$ 的泰勒级数收敛到其自身, 必须且只需

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

注意, ξ 不仅依赖于 x 和 x_0 , 还依赖于 n . 使上式成立的一个充分条件是, $f(x)$ 的各阶导数在点 x_0 附近一致有界.

定理 8.3.7 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有任意阶导数, 并且其各阶导数在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上一致有界, 则 $f(x)$ 可以展开成泰勒级数, 即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (x_0 - R < x < x_0 + R).$$

利用上述定理以及直接求导法, 可以求出一些简单函数的泰勒展开式或麦克劳林展开式(与上册第3章中的麦克劳林公式比较). 例如:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

特别地, 当 $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 时, 可分别得

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 < x \leq 1). \end{aligned}$$

注 8.3.1 值得注意的是, 仅有函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有任意阶导数这个条件, $f(x)$ 的泰勒级数即使收敛, 也未必收敛到函数本身, 考察函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

可以证明(第7题):函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处有任意阶导数,且 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$). 因此,其麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$. 显然,除 $x = 0$ 外, $f(x)$ 的麦克劳林级数处处不收敛到 $f(x)$.

利用幂级数及其和函数的性质,可以从某些(简单)函数的泰勒展开式得到另外一些(复杂)函数的泰勒展开式. 例如,若将展开式

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

两边从 0 到 x ($-1 < x < 1$) 积分,就得到对数函数 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

由于展开式右边的幂级数在 $x = 1$ 处收敛,故展开式的收敛域为 $(-1, 1]$, 并且由定理 8.3.5 知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$$

同样,对展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1)$$

逐项积分,可得反正切函数的泰勒展开式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

当 $x = 1$ 时,就得到 $\frac{\pi}{4}$ 的级数表示

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

这个公式给出了计算 π 的新方法.

例 8.3.5 求函数 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 的麦克劳林展开式,并给出其收敛域.

解 解法 1 利用绝对收敛级数分配律的乘法运算,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

解法 2 在展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

两边对 x 求导, 可得

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (-1 < x < 1). \quad \square$$

例 8.3.6 求函数 $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的麦克劳林展开式, 并给出其收敛域.

解 首先, 作恒等变形

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1), \\ \frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2), \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n \quad (-1 < x < 1). \quad \square$$

例 8.3.7 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解 由于需要展成 $x-1$ 的幂级数, 作变量代换 $t = x-1$, 即 $x = t+1$, 代入函数表达式, 则有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(t+1)^2+4(t+1)+3} \\ &= \frac{1}{t^2+6t+8} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+4} \right). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n} \quad (-2 < t < 2), \\ \frac{1}{t+4} &= \frac{1}{4} \frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{4^n} \quad (-4 < t < 4), \end{aligned}$$

因此,有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) t^n \quad (-2 < t < 2).$$

代回 $t = x - 1$, 则得到关于 $x - 1$ 的幂级数展开

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n$$

$$(-1 < x < 3).$$

□

习题 8.3

1. 求下列幂级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)};$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a, b > 0).$$

2. 求下列级数的和函数:

$$(1) x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots;$$

$$(2) 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots;$$

$$(3) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \cdots + n \cdot (n+1)x^{n-1} + \cdots;$$

$$(4) \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot (n+1)} + \cdots;$$

$$(5) x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} + \cdots.$$

3. 证明幂级数在其收敛区间内的逐项积分与逐项求导公式.

4. 将下列函数在指定点附近展开成幂级数, 并求其收敛区域:

$$(1) x^3 - 2x^2 + 5x - 7, x_0 = 1;$$

$$(2) e^{\frac{x}{a}}, x_0 = a \neq 0;$$

$$(3) \ln x, x_0 = 1;$$

$$(4) \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x_0 = 0;$$

$$(6) \ln(1+x-2x^2), x_0 = 0;$$

$$(7) \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, x_0 = -4;$$

$$(8) 3^{\frac{x+1}{2}}, x_0 = 0.$$

5. 将下列函数表示成 x 的幂级数:

(1) $\sin^2 x$;

(2) $\arcsin x$;

(3) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(4) $(1+x)\ln(1+x)$;

(5) $\tan x$;

(6) $\tanh x$;

(7) $\sec x$;

(8) $\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ (t 为实参数).

6. 将下列积分表示成 x 的幂级数:

(1) $\int \frac{e^x}{x} dx$;

(2) $\int_0^x \cos t^2 dt$.

7. 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x_0 = 0$ 处有任意阶导数, 且 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$).

8.4 级数应用举例

类似于上册第3章中的泰勒公式, 幂级数也在近似计算以及求极限中有着广泛而又有效的应用, 这里就不再重复. 下面我们通过具体而又典型的例题, 揭示如何运用级数这个概念及其思想解决实际问题.

例 8.4.1 (函数方程的近似解) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y + \lambda \sin y = x$ 在 $(x, y) = (0, 0)$ 附近确定的隐函数, 其中 $\lambda \neq -1$ 为参数. 试求出 $y = y(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的泰勒展开式的前四项.

解 由于 $y(0) = 0$, 可设 $y = y(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的展开式为 $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$. 将它代入原方程, 利用 $\sin y$ 的泰勒展开, 可得

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \lambda \left[(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) - \frac{1}{3!} (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^3 \right] + o(x^3) = x,$$

即

$$(1 + \lambda) a_1 x + (1 + \lambda) a_2 x^2 + \left[(1 + \lambda) a_3 - \frac{\lambda}{6} a_1^3 \right] x^3 + o(x^3) = x.$$

比较两边的系数, 可得 $(1 + \lambda) a_1 = 1$, $(1 + \lambda) a_2 = 0$, $(1 + \lambda) a_3 - \frac{\lambda}{6} a_1^3 = 0$, 解得

$a_1 = \frac{1}{1+\lambda}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{\lambda}{6(1+\lambda)^4}$. 因此, $y = y(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的泰勒展开式的前四项为

$$y(x) = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{6(1+\lambda)^4}x^3 + o(x^3). \quad \square$$

例 8.4.2 (定积分的近似计算) 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值, 精确到 10^{-4} .

解 被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在整个数轴上都可以展开成幂级数:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

对上式逐项积分, 可得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$$

这是一个交错级数, 由交错级数部分和 S_n 逼近其级数和 S 的误差估计 $|S_n - S| \leq |a_{n+1}|$ 知, 只需计算交错级数通项的绝对值 $|a_n|$. 下面依次计算:

$$\frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 0.05556, \quad \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.00167, \quad \frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{35280} < 0.3 \times 10^{-4}.$$

于是可得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - 0.05556 + 0.00167 \approx 0.9461. \quad \square$$

例 8.4.3 (椭圆积分) 计算椭圆积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$ 的值, 其中 $k^2 < 1$.

解 令 $t = k^2 \sin^2 \varphi$, 则被积函数可以展开成

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^3 + \dots$$

由于对 $\varphi \in [0, \pi/2]$, 有 $|t| = |k^2 \sin^2 \varphi| \leq k^2 < 1$, 所以逐项积分可得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{2}k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi d\varphi + \dots$$

利用上册中定积分 $\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi$ 的公式, 可得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]. \quad \square$$

例 8.4.4 (数项级数求和) 计算数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!2^n}$ 的和.

解 构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n$. 利用比值法可知, 该级数的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$. 设其和函数为 $S(x)$, 则有

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n.$$

由于

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^n = x^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) = x^2 e^x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n = x \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) = x e^x,$$

所以有 $S(x) = x(x+1)e^x$. 令 $x = \frac{1}{2}$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)! 2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{e}. \quad \square$$

例 8.4.5(欧拉公式) 利用泰勒展开式, 形式上推导欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

解 将实指数函数的泰勒展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

形式上推广到指数为纯虚数 ix 上, 有

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots.$$

利用虚数单位 i 的性质, 可得

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \cos x + i \sin x. \quad \square$$

在欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 中, 令 $x = \pi$, 即得到

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

这个公式被认为是数学领域中最优美的结果之一, 因为它在一个简单的方程中, 把算术基本常数 0 和 1、几何基本常数 π 、分析常数 e 以及复数 i 联系在一起.

例 8.4.6(微分方程的幂级数解法) 求微分方程 $y'' - xy = 0$ 的通解.

解 设原微分方程有幂级数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则有

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

代入方程,可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n]x^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

比较两边的系数,可得

$$a_2 = 0, \quad (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(a) 若令 $a_0 = 1, a_1 = 0$, 则有

$$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0, \quad a_{3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} = \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!},$$

从而得到原微分方程的一个幂级数解

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-2)!!!}{(3k)!} x^{3k}.$$

(b) 若令 $a_0 = 0, a_1 = 1$, 则有

$$a_{3k} = a_{3k+2} = 0, \quad a_{3k+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} = \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!},$$

从而得到原微分方程的另一个幂级数解

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k-1)!!!}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

利用朗斯基行列式,可以验证(第11题): y_1 和 y_2 是原微分方程的两个线性无关的解,因此,原微分方程的通解为 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$). \square

最后,作为函数项级数的应用,我们介绍皮卡逐次逼近法,并证明一阶常微分方程初值问题解的存在唯一性定理.

考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x, y)$ 是在点 (x_0, y_0) 某个邻域上有定义的连续函数. 注意到,上面微分方程初值问题的解等价于下面积分方程的解:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

皮卡逐次逼近法的主要思想就是:利用迭代法构造上面积分方程的一列近似解 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$; 证明这列近似解收敛,且其极限函数就是所求的解 $y(x)$. 近似解序列构造如下:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (n \geq 1).$$

显然, $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是连续函数列.

我们首先通过一个具体的例子来直观感受一下皮卡逐次逼近法. 考虑初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = y(x), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

与该微分方程初值问题等价的积分方程为

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt.$$

按照上面的迭代公式, 取 $y_0(x) = 1$, 逐次计算, 则有

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}.$$

一般地, 有

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

注意到 $y_n(x)$ 在整个数轴上收敛于 $y(x) = e^x$, 这与直接求解得到的结果是一样的.

对于一般的一阶微分方程初值问题, 我们有下面的皮卡定理.

定理 8.4.1 (皮卡定理) 设函数 $f(x, y)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在有界闭矩形域 $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上连续, 其中 $a, b > 0$, 则存在一个正数 $h < a$, 使得初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有唯一解 $y = y(x)$.

证明 (a) 近似解序列的一致收敛性. 为证明皮卡逐次逼近法所构造的近似解序列 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛性, 构造一个以近似解序列为部分和函数列的函数项级数

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)].$$

$\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛性等价于上述函数项级数的收敛性.

由于假设函数 $f(x, y)$ 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在有界闭矩形域 D 上连续, 故 $f(x, y)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上有界, 即存在常数 M 和 K , 使得对 D 上的所有点 (x, y) , 有

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K.$$

令 $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{3K}\right\}$, 下面证明级数 $y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛.

由于在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上, 有估计

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq M |x - x_0| \leq b,$$

所以近似解序列 $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义好的. 利用数学归纳法, 可以证明下式(第12题):

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由魏尔斯特拉斯判别法知, 级数 $y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛, 记其和函数为 $y(x)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] = y(x).$$

因此, 极限函数 $y(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上连续.

(b) 极限函数满足积分方程. 由近似解序列的一致收敛性, 在迭代式

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

的两边取极限 ($n \rightarrow \infty$), 得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

即 $y(x)$ 是积分方程的连续解, 因而也是微分方程初值问题的解.

(c) 解的唯一性. 假设微分方程初值问题在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有两个解 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别满足积分方程:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad \psi(x) = \psi_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt.$$

于是有估计

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| dt \right|.$$

由微分中值定理得

$$\begin{aligned} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| &\leq \left| \frac{\partial}{\partial y} f(t, y^*) \right| |\varphi(t) - \psi(t)| \\ &\leq K |\varphi(t) - \psi(t)|, \end{aligned}$$

其中 y^* 介于 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 之间. 于是, 进一步地, 有估计

$$\begin{aligned} \max_{|x-x_0| \leq h} |\varphi(x) - \psi(x)| &\leq K \int_{x_0-h}^{x_0+h} |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq 2hK \max_{|t-x_0| \leq h} |\varphi(t) - \psi(t)|. \end{aligned}$$

如果 $\max_{|x-x_0| \leq h} |\varphi(x) - \psi(x)| \neq 0$, 因为 h 满足 $2hK < 1$, 故由上式就得到矛盾. 因此, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上恒等, 即微分方程初值问题的解唯一. \square

利用类似的逐次逼近思想, 可以给出隐函数存在定理的一个证明(第13题).

习题 8.4

1. 计算 e 和 π 的近似值, 要求误差不超过 10^{-6} .
2. 计算 $\sin 9^\circ$ 和 $\sin 18^\circ$ 的近似值, 要求精确到第三位小数.
3. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4} .
4. 考虑开普勒方程 $E = M + \epsilon \sin E$, 其中 E 是行星的偏近点角, M 是其平均近点角, 而 ϵ 是行星轨道的离心率. 试求 E 展开成 ϵ 的幂级数的前三项.
5. 考虑方程 $y = x + \frac{\alpha}{2}(y^2 - 1)$. 试求 y 展开成 α 的幂级数的前三项.
6. 计算第二类椭圆积分 $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ 的值, 其中 $k^2 < 1$.
7. 计算积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4} .

8. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

9. 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$$

过原点 $(0, 0)$ 的近似解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$.

10. 求出零阶贝塞尔(F. W. Bessel, 1784~1846)方程

$$xy'' + y' + xy = 0$$

的满足 $J_0(0) = 1$ 的幂级数解 $J_0(x)$.

11. 验证例 8.4.4 中所得到的解 y_1 和 y_2 是线性无关的.
12. 证明定理 8.4.1 的证明过程中用到的估计式

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

13. 利用逐次逼近法, 证明特殊形式的隐函数存在定理: 假设函数 $\varphi(x, y)$ 在矩形域 $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上具有连续的偏导数, 并且有 $\varphi(x_0, y_0) = 0, |\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1$, 则方程 $y = y_0 + \varphi(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 附近唯一确定了一个函数 $y = y(x)$.
14. 利用上一题结论, 证明一般形式的隐函数存在定理: 假设函数 $F(x, y)$ 在矩形域 $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上具有连续的偏导数, 并且有 $F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 附近唯一确定了一个函数 $y = y(x)$. (提示: 令 $\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)}$.)

复 习

本章主要内容

1. 数项级数的基本概念: 敛散性, 收敛的必要条件;
2. 收敛数项级数的性质: 线性性、结合律;
3. 正项级数收敛的判别法则: 有界判别法、比较判别法、比较准则的极限形式、柯西根值判别法、达朗贝尔比值判别法以及柯西积分判别法;
4. 交错级数收敛的莱布尼茨判别法;
5. 一般数项级数收敛的判别法则: 柯西收敛准则、魏尔斯特拉斯判别法, 乘积项级数收敛的判别法则: 狄利克雷判别法、阿贝尔判别法;
6. 条件收敛与绝对收敛的定义, 绝对收敛级数的性质: 交换律及其正负部级数的收敛性, 条件收敛级数的正负部级数都发散;
7. 级数的乘法, 绝对收敛级数乘法的分配律;
8. 函数列与函数项级数的基本概念: 收敛与一致收敛、收敛域、极限函数与和函数, 函数项级数一致收敛的判别准则: 柯西收敛准则、魏尔斯特拉斯判别法、狄利克雷判别

法和阿贝尔判别法;

- 一致收敛函数项级数和函数的性质: 连续性与逐项求极限、可积性与逐项积分公式、可微性与逐项微分公式;
- 幂级数的基本概念: 收敛半径与收敛区间, 收敛半径的计算方法, 幂级数在其收敛区间的内闭一致收敛性, 和函数的性质: 连续性、无穷次可微性以及可积性, 和函数的计算方法, 幂级数的四则运算, 和函数的单侧连续性;
- 函数的幂级数展开: 泰勒展开与麦克劳林展开、泰勒展开的充分条件, 初等函数的泰勒展开式, 泰勒展开的方法;
- 幂级数的应用: 函数值的近似计算、求极限、函数方程以及微分方程的求解, 定积分的近似计算, 数项级数的求和;
- 一般级数理论的应用: 皮卡逐次逼近法.

复习思考题

- 数项级数与数列之间有什么关系? 级数收敛的必要条件是什么? 该条件是充分的吗?
- 对于一般数项级数能否使用比较判别法? 柯西根值判别法和达朗贝尔判别法的依据是什么?
- 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的不同敛散性组合, 讨论以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n), \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (b_n \neq 0), \sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}, \sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}.$$

- 讨论下列级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}.$$

- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 是否同敛散?

- 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的敛散性.

- 总结并证明级数发散的常用方法, 并举例说明.
- 写出函数项级数不一致收敛的 $\epsilon - \delta$ 定义.
- 举例说明函数项级数一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法的条件不是必要的.
- 幂级数的收敛区间与收敛域是同一个概念吗? 它们的区别在哪里?
- 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, 或者 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, 计算幂级数的收敛半径, 要求所有系

数 $a_n \neq 0$. 有没有更好的计算方法和公式?

12. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 是否成立逐项积分式:

$$\int_0^R \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}?$$

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 收敛, 上式是否成立?

13. 总结将函数展开成幂级数的方法.

复习题

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且数列 $\{a_n\}$ 单调减. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$.

2. 设 $a_n > 0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 的敛散性.

3. 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \dots$,
 $a_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}, \dots$. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

4. 讨论下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ 的敛散性:

(1) $\lambda_n = a^{1/n} - b^{1/n} \quad (a > b > 0)$;

(2) $\lambda_n = 2a^{1/n} - b^{1/n} - c^{1/n} \quad (a, b, c > 0, a^2 > bc)$.

5. 研究下列级数的条件收敛与绝对收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^k \tan \frac{\pi}{2^n} \quad (k \text{ 为常数});$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n};$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n};$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n};$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi;$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n a^{2n}} \quad (a \text{ 为常数});$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\ln n}} \quad (a > 0).$

6. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{e^{nx} \sqrt{n+x}}, [0, +\infty);$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (1-x) \frac{x^n}{1-x^{2n}} \sin nx, [0, 1);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} (p, q > 0), (0, \pi).$$

7. 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}$ 在 $(0, +\infty)$ 内绝对收敛, 且一致收敛, 但其绝对值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n x}{(1+x)^n} \right| \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内并不一致收敛.}$$

8. 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, 又设

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad F_1(x) = \int_a^x F_0(t) dt, \quad \dots, \quad F_n(x) = \int_a^x F_{n-1}(t) dt, \quad \dots$$

$$(a \leq x \leq b).$$

(1) 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛;

(2) 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上的和函数为 $S(x)$, 求证: $S(x)$ 满足方程

$$S'(x) - S(x) = f(x).$$

9. 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \cos nx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛, 但其和函数在区间 $(0, +\infty)$ 上连续.

10. 设函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 若积分 $\int_a^b g(x) dx$ 绝对收敛, 则有如下推广的逐项积分公式:

若积分 $\int_a^b g(x) dx$ 绝对收敛, 则有如下推广的逐项积分公式:

$$\int_a^b g(x) S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g(x) f_n(x) dx.$$

11. 求下列数项级数的和:

$$(1) 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots;$$

$$(2) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n-1} + \dots;$$

$$(3) 1^2 + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!};$$

$$(4) \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!};$$

$$(5) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots.$$

12. 求下列函数项级数的收敛域, 并在其收敛域内求出其和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x+1)^{n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!} \quad (x > 0);$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n x}{2^n \cdot n!} \quad (x > 0);$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)x^{2n}}{(2n)!};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}.$$

13. 求下列函数的麦克劳林展开式, 并求出其收敛区间:

$$(1) x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2};$$

$$(2) \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$(3) \arctan \frac{4+x^2}{4-x^2};$$

$$(4) \sin^4 x.$$

14. 将下列积分表示成级数形式:

$$(1) \int \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(2) \int_0^x e^{-t^2} dt;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx;$$

$$(4) \int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x} \right)^2 dx;$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(6) \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1+k \sin x}{1-k \sin x} \right) \frac{dx}{\sin x} \quad (|k| < 1).$$

15. 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足: $a_n, b_n > 0$, 且从某项起有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

证明: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

16. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项 $a_n > 0$. 证明:

(1) 如果从某项起有 $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \gamma > 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果从某项起有 $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

第 9 章 含参变量积分

在上一章中,我们学习了无穷级数理论,并利用函数项级数,跳出初等函数的范围,构造出一些新的函数.在函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 中可以将 x 看做参数,对离散的变量 n 求和.我们知道,对离散变量的求和可以推广为关于连续变量的积分,这样可以得到含有参变量的积分,称为含参变量积分.

在实际问题中,我们经常会遇到带有参变量的积分,例如,椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的弧长为

$$l = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt,$$

其中 $k = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ 是离心率.称

$$I(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

为第二类椭圆积分,它不能用初等函数表示,这就是一个含有参变量 k 的积分.

与函数项级数类似,含参变量积分也是构造新函数的一种方法,因此,含参变量积分在数学以及工程计算中有着广泛的应用,特别是由参变量积分定义的 B(贝塔)函数和 Γ (伽马)函数,许多重要的定积分值可以用它们表示出来.

含参变量积分理论与函数项级数理论有许多相似之处,关于函数项级数的概念、思想和方法都可以毫无困难地类推到含参变量积分上,特别是一致收敛性、连续性、可微性和可积性等.

根据被积函数以及积分区间的不同性态,含参变量的积分分为常义积分和广义积分.为深入研究含参变量广义积分的收敛性及其性质,本章首先研究不含参变量的广义积分的收敛性及其判别法则.

9.1 广义积分收敛的判别法则

在上册第4章中,我们简单介绍了无穷积分和瑕积分这两类广义积分的基本概念,并给出了其敛散性的定义以及计算简单广义积分的方法.但是,对于如何判断这两类积分的敛散性,没有作进一步的讨论.在学习了数项级数收敛的判别法则之后,再学习广义积分收敛性的判别法则,就会发现两者有着许多类似之处,请读者自己多加体会.

9.1.1 无穷积分收敛的判别法则

回忆无穷积分的定义:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

利用极限的柯西收敛准则,可以得到无穷积分收敛的柯西收敛准则(第2题):

定理 9.1.1(柯西收敛准则) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,那么无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists B = B(\varepsilon) > a$, 使得当 $b_1, b_2 > B$ 时,有

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

与数项级数类似,对任意函数的广义积分,有绝对收敛与条件收敛等概念,并且绝对收敛蕴涵收敛(第1题),即:

定理 9.1.2(绝对收敛蕴涵收敛) 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续,并且积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛,则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

像数项级数中的正项级数一样,非负函数的无穷积分也有一些便于应用的收敛判别法则,例如有界判别法和比较判别法(第2题).

定理 9.1.3(有界判别法) 设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数,那么无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充要条件是,存在 $M > 0$, 使得对任意 $b \geq a$, 都有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M.$$

定理 9.1.4 (比较判别法) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且对充分大的 x , 满足不等式 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 那么:

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 也发散.

例 9.1.1 考察积分 $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$ 的敛散性, 其中 a 为实常数.

解 因为对于任意固定的实数 a , 有极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-x/2} = 0.$$

故对充分大的 x , 有不等式 $x^a e^{-x/2} < 1$, 从而有

$$x^a e^{-x} < e^{-x/2}.$$

而积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x/2} dx$ 收敛. 由比较判别法, 可知原积分收敛. \square

由于当 $p > 1$ 时, p 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($a > 0$) 收敛, 当 $p \leq 1$ 时, p 积分发散, 所以在应用比较判别法时, 经常拿待判定函数与函数 $\frac{1}{x^p}$ 比较, 即得如下推论:

推论 9.1.1 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 其中 $a > 0$.

(1) 如果对充分大的 x , 有不等式:

$$|f(x)| \leq \frac{c}{x^p} \quad (p > 1, c \text{ 为正常数}),$$

则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛;

(2) 如果对充分大的 x , 有不等式:

$$|f(x)| \geq \frac{c}{x^p} \quad (p \leq 1, c \text{ 为正常数}),$$

则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 9.1.2 考察积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 和 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 的敛散性, 其中 $p > 1$.

解 注意到, 当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}, \quad \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p},$$

由 $p > 1$ 和推论 9.1.1 可知, 原积分都是绝对收敛的 (图 9.1 中, $p = 2$). \square

在实际应用中, 更方便的是比较判别法的极限形式 (第 2 题).

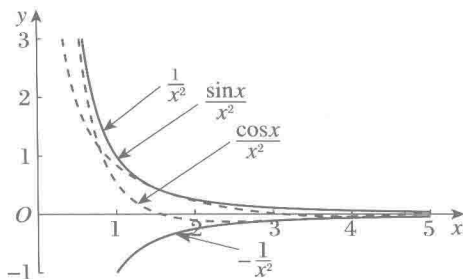


图 9.1 例 9.1.2 中的两个积分

定理 9.1.5 (比较判别法则的极限形式) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数, 且有极限关系 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, 那么:

- (1) 当 $0 < k < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 同敛散;
- (2) 当 $k = 0$, 且积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;
- (3) 当 $k = +\infty$, 且积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 9.1.3 考察积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)} dx$ 的敛散性.

解 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有等价无穷小量关系

$$\frac{x^2}{\sqrt{x+1}(x^4+x+1)} \sim \frac{1}{x^{5/2}},$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx$ 收敛, 所以由比较判别法的极限形式可知, 原积分收敛. \square

例 9.1.4 考察积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ 的敛散性.

解 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有等价无穷小量关系

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2x^3},$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^3} dx$ 收敛, 所以由比较判别法的极限形式可知, 原积分收敛. \square

9.1.2 乘积函数积分收敛的精细判别法则

类似于乘积项级数的精细判别法, 下面我们考察乘积函数 $f(x)g(x)$ 在无穷区

间上积分收敛性的精细判别法. 类似于阿贝尔分部求和法, 博内(O. Bonnet, 1819~1892)引入下述的博内公式, 又称做第二积分中值定理.

引理 9.1.1 (博内公式) 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负, 那么:

(1) 如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减, 则在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx;$$

(2) 如果 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增, 则在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

证明 只证 $g(x)$ 单调减的情形, 类似可得 $g(x)$ 单调增的情形. 因为在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 连续, $g(x)$ 单调减, 它们也是可积的, 所以 $f(x)g(x)$ 可积. 用任意的分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

分割区间 $[a, b]$, 于是有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]dx.$$

若用 K 表示 $|f(x)|$ 的上界, ω_i 表示 $g(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, 则有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[g(x) - g(x_{i-1})]dx \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| |g(x) - g(x_{i-1})| dx \\ & \leq K \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 因为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 所以有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0 \quad (\lambda = \max_i \Delta x_i).$$

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则利用阿贝尔分部求和法, 上式右边的和数可以写成

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}).$$

因为连续函数 $F(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 且 $g(x)$ 单调

减, 即 $g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), 所以有不等式

$$mg(a) \leq \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \leq Mg(a),$$

令 $\lambda \rightarrow 0^+$, 即得

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mg(a),$$

进而推得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu g(a),$$

其中 $\mu \in [m, M]$. 再由函数 $F(x)$ 的连续性可知, 在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $\mu = F(\xi)$. 从而可得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = F(\xi)g(a) = g(a) \int_a^\xi f(x) dx. \quad \square$$

如果函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是变号的, 即有正有负, 则有:

推论 9.1.2 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx.$$

证明 假设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减, 则差式 $g(x) - g(b) \geq 0$. 应用博内公式, 可得

$$\int_a^b f(x)[g(x) - g(b)] dx = [g(a) - g(b)] \int_a^\xi f(x) dx,$$

化简即可得需证的公式. 可类似证明 $g(x)$ 单调增的情形. \square

利用博内公式, 可以推出无穷积分的狄利克雷判别法和阿贝尔判别法 (第 2 题).

定理 9.1.6 (狄利克雷判别法) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 并且它们满足以下两条:

(a) 存在 $M > 0$, 使得对 $\forall b \in [a, +\infty)$, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M$;

(b) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛.

定理 9.1.7 (阿贝尔判别法) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 并且它们满足以下两条:

(a) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

(b) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界.

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

例 9.1.5 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $g(x)$ 单调减且趋于零, 考察积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\sin x dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\cos x dx$ 的敛散性.

解 由于对 $\forall b \in [a, +\infty)$, 都有

$$\left| \int_a^b \sin x dx \right| = |\cos a - \cos b| \leq 2, \quad \left| \int_a^b \cos x dx \right| = |\sin a - \sin b| \leq 2,$$

故由狄利克雷判别法可知, 积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\sin x dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\cos x dx$ 收敛. \square

例 9.1.6 考察积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 和 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 的收敛性与绝对收敛性, 其中 $a > 0, 0 < p \leq 1$.

解 由例 9.1.5 以及 $p > 0$ 知, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 和 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 收敛. 为考察原积分的绝对收敛性, 只需考察被积函数取绝对值之后的积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^p} dx$$

的收敛性. 利用三角函数的性质, 有 $|\sin x| \geq \sin^2 x$ 和 $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, 于是

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq \int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x^p} dx.$$

由于当 $0 < p \leq 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$ 收敛, 而积分 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2x^p} dx$ 发散, 所以积分

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$ 发散. 再由比较判别法知, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ 发散, 从而无穷积分

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 条件收敛. 类似可得, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 条件收敛. \square

例 9.1.7 考察积分 $\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx$ 和 $\int_a^{+\infty} x \cos x^3 dx$ 的收敛性与绝对收敛性, 其中 $a > 0$.

解 作变量代换 $x^2 = t$, 则有

$$\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

由例 9.1.6 可知, 积分 $\int_{a^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ 条件收敛, 所以积分 $\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx$ 也条件收敛

(图 9.2). 类似可得, 积分 $\int_a^{+\infty} x \cos x^3 dx$ 条件收敛(图 9.3). □

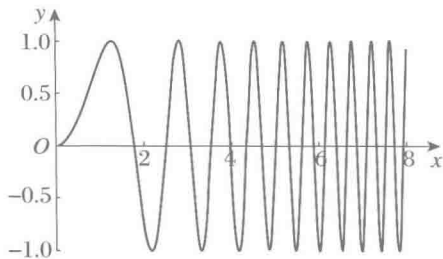


图 9.2 积分 $\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx$

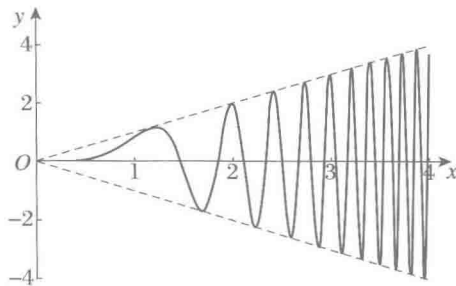


图 9.3 积分 $\int_a^{+\infty} x \cos x^3 dx$

注 9.1.1 (1) 以上只是考察了积分区间为 $[a, +\infty)$ 的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 但是所得到的结论以及收敛性的各种判别法都可以类推到积分区间为 $(-\infty, b]$ 的无穷积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, 或者积分区间为整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

(2) 无穷积分的内容与无穷级数的相应部分是平行的, 很多定理几乎是逐字逐句照搬过来的. 原因很简单, 因为无穷积分与无穷级数同样是以有限逼近无限的极限过程, 只不过无穷积分是函数的极限, 而无穷级数是数列的极限罢了. 但是必须注意, 两者还是有差别的, 例如, 级数收敛的必要条件是当 $n \rightarrow \infty$ 时通项趋于零; 而无穷积分收敛时, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时其被积函数可以不趋于零, 甚至可以是无界的, 如例 9.1.7 中的收敛积分 $\int_a^{+\infty} \sin x^2 dx$ 和 $\int_a^{+\infty} x \cos x^3 dx$.

9.1.3 无界函数积分的收敛性

我们知道, 另外一种类型的广义积分是被积函数有瑕点的无界函数积分——瑕积分, 这类广义积分与无穷区间上的积分有着十分密切的联系. 事实上, 通过作适当的变量代换, 可以将瑕积分转化为无穷积分. 假设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且以点 a 为瑕点, 即当 $x \rightarrow a^+$ 时, $f(x)$ 无界. 瑕积分定义为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

在上式右边的积分中作变量代换 $x = a + \frac{1}{y}$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{1/\epsilon} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^2}.$$

这样, 对无穷积分所建立的整个理论, 就可以通过这种联系完全平移到瑕积分上. 也可以参考无穷积分那里的证明, 重新给出瑕积分理论的证明, 这里不再重复叙述瑕积分的收敛性及其判别法, 读者可以自行写出瑕积分收敛的判别法. 下面主要通过例题, 展示这些理论的应用.

例 9.1.8 判断瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$ ($a < b$) 的敛散性, 其中 $p > 0$ 是常数.

解 在上册 4.7.2 小节的例 4.7.6 中, 已证明: 当 $p < 1$ 时, 原积分收敛; 当 $p \geq 1$ 时, 原积分发散. \square

例 9.1.9 考察椭圆积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 的敛散性, 其中 $k^2 < 1$.

解 首先注意到, 积分上限 $x = 1$ 是被积函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

在区间 $[0, 1)$ 上的唯一瑕点, 并且有极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}.$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛, 故由比较判别法可知, 原椭圆积分收敛. \square

例 9.1.10 考察积分 $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 的敛散性, 其中 p 为实常数.

解 当 $p = 0$ 时, 这是常义积分; 而当 $p \neq 0$ 时, 这是瑕积分. 当 $p > 0$ 时, 瑕点是 $x = 0$, 并且有极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln x|^p}{x^{-1/2}} = 0,$$

而且积分 $\int_0^1 x^{-1/2} dx$ 收敛, 故由比较判别法可知, 此时原积分收敛.

当 $p < 0$ 时, 虽然被积函数在 $x = 0$ 处无定义, 但是由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^p = 0$, 可见 $x = 0$ 并不是瑕点. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} |\ln x|^p = +\infty$, 所以 $x = 1$ 是瑕点. 注意到, 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 有等价无穷大量关系

$$|\ln x|^p = |\ln[1 - (1-x)]|^p \sim (1-x)^p = \frac{1}{(1-x)^{-p}}.$$

由此可知,原积分在 $-1 < p < 0$ 时收敛,而在 $p \leq -1$ 时发散.

综上所述:当 $p > -1$ 时,原积分收敛;当 $p \leq -1$ 时,原积分发散. \square

例 9.1.11 考察积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx$ ($\beta \geq 0$) 的敛散性.

解 当 $\alpha < 0$ 时, $x=0$ 是瑕点,但它又是无穷积分,所以将积分拆成两个部分来考虑:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} dx.$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时,有等价关系

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} \sim \frac{1}{2} x^{\alpha+1}.$$

因此,当且仅当 $\alpha+1 > -1$,即 $\alpha > -2$ 时,第一个积分收敛.当 $x \rightarrow +\infty$ 时,有等价关系

$$\frac{x^\alpha \arctan x}{2+x^\beta} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$

因此,当且仅当 $\beta-\alpha > 1$ 时,第二个积分收敛.

综上所述,当 $\alpha > -2$ 且 $\beta-\alpha > 1$ 时,原积分收敛;其余情况下,原积分发散. \square

习 题 9.1

1. 叙述无穷积分绝对收敛与条件收敛的定义,并证明无穷积分的绝对收敛蕴涵收敛.
2. 证明无穷积分收敛的柯西收敛准则、有界判别法、比较判别法、比较判别法的极限形式、狄利克雷判别法以及阿贝尔判别法.
3. 叙述并证明瑕积分收敛的柯西收敛准则、有界判别法、比较判别法、比较判别法的极限形式、狄利克雷判别法以及阿贝尔判别法.
4. 对无穷积分,证明分部积分公式成立(公式中各部分都有意义):

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x)dx,$$

并证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

5. 对瑕积分,叙述并证明其分部积分公式.
6. 研究下列广义积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} dx;$

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1 - x^2)^2} dx;$

(4) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx;$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1 + x^4}} dx;$

(6) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \ln x dx;$

(7) $\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx;$

(8) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

(9) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx;$

(10) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx;$

(11) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx;$

(12) $\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x} dx;$

(13) $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx;$

(14) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(x^2 - 1)} dx;$

(15) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx;$

(16) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx;$

(17) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx;$

(18) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\mu} dx.$

7. 研究下列广义积分的条件收敛性与绝对收敛性:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{x^2+1}} dx;$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} dx;$

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx;$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})} dx.$

8. 计算下列广义积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx;$

(2) $\int_0^1 \ln^n x dx;$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx;$

(4) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$

9.2 含参变量常义积分

同函数项级数一样,含参变量积分也是引入非初等函数的一个重要手段.我们

首先研究含参变量常义积分,即被积函数连续、积分区间以及参变量变化区间都为有界闭区间的情形.

设二元函数 $f(x, u)$ 在有界闭区域 $D: a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta$ 上连续,这时称积分

$$\int_a^b f(x, u) dx \quad (9.2.1)$$

为含参变量常义积分,其中 u 称为参变量.

如果在式(9.2.1)中的积分为广义积分(例如,区间 $[a, b]$ 为无穷区间,或者被积函数 $f(x, u)$ 在 (a, b) 中无界),则称相应的含参变量积分 $\int_a^b f(x, u) dx$ 为含参变量广义积分.我们将在下一节中讨论含参变量广义积分.

9.2.1 含参变量常义积分的性质

设二元函数 $f(x, u)$ 在有界闭区域 $D: a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta$ 上连续,则含参变量常义积分 $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$ 是定义在 $[\alpha, \beta]$ 上的函数.下面我们讨论函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的连续性、可微性以及可积性.

定理 9.2.1 设二元函数 $f(x, u)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta$ 上连续,那么:

(1) 函数 $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,即对 $\forall u_0 \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b f(x, u_0) dx = \int_a^b \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u) dx,$$

即可以交换极限运算与积分运算的顺序,或称在积分号下求极限;

(2) 函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积,并且

$$\int_a^\beta \left[\int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[\int_a^\beta f(x, u) du \right] dx,$$

即可以交换两个积分运算的顺序;

(3) 如果函数 $f(x, u)$ 对变量 u 在区域 D 上有连续的偏导数,则函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续的导数,并且

$$\varphi'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx,$$

即可以交换求导运算与积分运算的顺序,或称在积分号下求导.

证明 (1) 设 $u_0 \in [\alpha, \beta]$, 计算函数的增量

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &= \left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, u) - f(x, u_0)| dx. \end{aligned}$$

$f(x, u)$ 由于在有界闭区域 D 上连续, 从而一致连续, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正数 δ , 使得只要 D 中两点 (x_1, u_1) 与 (x_2, u_2) 的距离小于 δ , 就有

$$|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| < \varepsilon.$$

特别地, 当 $x \in [a, b]$, $u \in [\alpha, \beta]$ 且 $|u - u_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x, u) - f(x, u_0)| < \varepsilon$, 从而得到

$$|\varphi(u) - \varphi(u_0)| < (b - a)\varepsilon.$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在点 u_0 处连续, 即

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b f(x, u_0) dx = \int_a^b \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u) dx.$$

(2) 已经证明了函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 因此它在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 并且

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[\int_a^b f(x, u) dx \right] du.$$

由于 $f(x, u)$ 在区域 D 上连续, 故上式右边的积分等于 $f(x, u)$ 在 D 上的二重积分, 从而有

$$\int_a^\beta \left[\int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[\int_a^\beta f(x, u) du \right] dx.$$

(3) 令 $g(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$, 由(3)中条件和(1)中结论知, $g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$

上连续, 对 $\forall v \in [\alpha, \beta]$, 由(2)中结论交换积分顺序可得

$$\int_a^v g(u) du = \int_a^b \left[\int_a^v \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} du \right] dx = \varphi(v) - \varphi(\alpha).$$

因此 $\varphi'(v) = g(v)$, 即

$$\varphi'(u) = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx. \quad \square$$

注 9.2.1 由于连续性和可微性是“点态”概念, 在定理 9.2.1(1)和(3)中, 将参数的变化区间 $[\alpha, \beta]$ 换成无穷区间仍然是成立的; 但是在(2)中, 如果参数的变化区间 $[\alpha, \beta]$ 换成无穷区间, 将会涉及广义积分, 结论不一定成立. 我们将在下一节讨论这个问题.

例 9.2.1 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 考察函数

$$F(t) = \int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx$$

的连续性.

解 显然, $F(t)$ 在整个实数轴上有定义. 设 $t_0 \neq 0$, 不妨设 $t_0 > 0$ ($t_0 < 0$ 的情形类似). 由于被积函数 $h(x, t) = \frac{tf(x)}{x^2 + t^2}$ 在矩形区域 $D = [0, 1] \times [\frac{1}{2}t_0, 2t_0]$ 上连续, 则由定理 9.2.1 知, $F(t)$ 在点 t_0 连续, 从而 $F(t)$ 在 $t \neq 0$ 处是连续的. 下面讨论 $F(t)$ 在 $t_0 = 0$ 处的连续性.

首先注意到被积函数 $\frac{tf(x)}{x^2 + t^2}$ 在 $(x, t) = (0, 0)$ 处不一定连续, 因此不能直接交换极限与积分的次序. 我们先考虑单侧极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t)$, 注意到

$$\int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx = \int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx + \int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx.$$

当 $x \in [0, t^{1/3}]$ 时, $\frac{t}{x^2 + t^2} \geq 0$, 由第一积分中值定理知, 存在 $\xi \in [0, t^{1/3}]$, 使得

$$\int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx = f(\xi) \int_0^{t^{1/3}} \frac{t}{x^2 + t^2} dx = f(\xi) \arctan \frac{t^{1/3}}{t},$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^{t^{1/3}} \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

又由于

$$\left| \int_{t^{1/3}}^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx \right| \leq \frac{t}{t^{2/3} + t^2} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \frac{t^{1/3}}{1 + t^{4/3}} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+),$$

所以, 有单侧极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2 + t^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$

同理, 可证 $\lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = -\frac{\pi}{2} f(0)$.

综上, 当 $f(0) = 0$ 时, $F(t)$ 在 $t_0 = 0$ 处连续; 否则, $F(t)$ 在 $t_0 = 0$ 处不连续. \square

例 9.2.2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx$.

解 定义二元函数

$$f(x, u) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 + xu)^{1/u}}, & u \neq 0, \\ \frac{1}{1 + e^x}, & u = 0. \end{cases}$$

可以验证,二元函数 $f(x, u)$ 在闭区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq u \leq 1$ 上连续,故含参变量积分 $\varphi(u) = \int_0^1 f(x, u) dx$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 于是有极限

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_0^1 f(x, u) dx = \int_0^1 \lim_{u \rightarrow 0^+} f(x, u) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx = \ln \frac{2e}{1 + e}.$$

如果在上述极限过程中取 $u = \frac{1}{n}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0^+$, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} dx = \ln \frac{2e}{1 + e}. \quad \square$$

例 9.2.3 求积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ 的值.

解 解法 1 考虑含参变量积分

$$I(u) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2} dx.$$

这个积分的被积函数 $f(x, u) = \frac{\ln(1+ux)}{1+x^2}$ 及其偏导数 $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) = \frac{x}{(1+x^2)(1+ux)}$ 都在矩形区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq u \leq 1$ 上连续, 从而有

$$I'(u) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ux)} dx = \frac{1}{1+u^2} \left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} u - \ln(1+u) \right].$$

对上式两边求关于 u 从 0 到 1 的积分, 可得

$$I(1) - I(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} u - \ln(1+u) \right] du = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I(1).$$

又因为 $I(0) = 0$, 故所求积分的值为 $I(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

解法 2 同样考虑含参变量积分 $I(u)$. 但是, 注意到

$$\ln(1+ux) = \int_0^u \frac{x}{1+xy} dy,$$

所以有

$$I(u) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \left(\int_0^u \frac{1}{1+xy} dy \right) dx.$$

对于固定的 $u \in [0, 1]$, 函数 $\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ 在矩形区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq u$ 上连续, 故交换积分顺序, 有

$$I(u) = \int_0^u \left[\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx \right] dy$$

$$= \frac{\ln 2}{2} \arctan u + \frac{\pi}{8} \ln(1+u^2) - \int_0^u \frac{\ln(1+y)}{1+y^2} dy.$$

在上式中,令 $u=1$,则有 $I(1) = \frac{\pi}{8} \ln 2$. □

9.2.2 积分限依赖于参变量的积分

在实际应用中,经常会遇到这样的情形,不仅被积函数依赖于参变量,积分限也依赖于参变量,即

$$\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx.$$

如同积分限是常数的情形一样,我们研究函数 $\psi(u)$ 的连续性和可微性.

定理 9.2.2 设二元函数 $f(x, u)$ 在有界闭区域 $D: a \leq x \leq b, \alpha \leq u \leq \beta$ 上连续,而函数 $a(u)$ 和 $b(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,并且

$$a \leq a(u) \leq b, \quad a \leq b(u) \leq b,$$

那么:

(1) 函数 $\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,即对 $\forall u_0 \in [\alpha, \beta]$, 有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx;$$

(2) 如果函数 $f(x, u)$ 对变量 u 在区域 D 上有连续的偏导数,函数 $a(u)$ 和 $b(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续导数,则函数 $\psi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续导数,并且

$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(b(u), u) b'(u) - f(a(u), u) a'(u).$$

证明 (1) 不妨对区间 $[\alpha, \beta]$ 上的任意一个内点 u_0 讨论. 将参变量积分 $\psi(u)$ 改写为

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x, u) dx + \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx + \int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x, u) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

积分 $I_2 = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx$ 的积分限为常数,所以由定理 9.2.1 知,它关于 u 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,即

$$\lim_{u \rightarrow u_0} I_2 = \lim_{u \rightarrow u_0} \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u) dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx.$$

对于 I_1 和 I_3 , 有估计

$$|I_1| \leq M |a(u) - a(u_0)|, \quad |I_3| \leq M |b(u) - b(u_0)|,$$

其中 $M = \max_D |f(x, u)|$ 是连续函数 $|f(x, u)|$ 在 D 上的最大值. 由于 $a(u)$ 和 $b(u)$ 在点 u_0 处连续, 所以当 $u \rightarrow u_0$ 时, 有 $I_1, I_3 \rightarrow 0$. 综上, 有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u) dx = \int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x, u_0) dx.$$

(2) 定义函数 $F(u, y, z) = \int_y^z f(x, u) dx$, 则 $\psi(u)$ 是由 $F(u, y, z)$ 与 $y = a(u), z = b(u)$ 复合而成的复合函数. 由复合函数的可微性及链式法则有

$$\psi'(u) = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{du} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{du}.$$

将 $y = a(u), z = b(u)$ 代入上式, 即得

$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(b(u), u) b'(u) - f(a(u), u) a'(u). \quad \square$$

例 9.2.4 设 $F(x) = \int_0^x \sin xy dy$. 求 $F'(x)$.

解 由于被积函数 $f(x, y) = \sin xy$ 以及积分上限 $b(x) = x$ 在整个实数轴上连续可微, 所以直接计算, 可得

$$F'(x) = \int_0^x y \cos xy dy + \sin x^2. \quad \square$$

例 9.2.5 设 $I(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt} dt$. 求 $I'(0)$.

解 由于被积函数 $f(x, t) = e^{t^2+xt}$ 以及积分限 $a(x) = \sin x, b(x) = \cos x$ 在整个实数轴上具有任意阶的连续微商, 所以直接计算, 可得

$$I'(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} t e^{t^2+xt} dt + e^{\cos^2 x + x \cos x} (-\sin x) - e^{\sin^2 x + x \sin x} (\cos x).$$

令 $x=0$, 有 $I'(0) = \int_0^1 t e^{t^2} dt - 1 = \frac{e-3}{2}$. □

习 题 9.2

1. 试用不同的方法计算以下极限:

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx; \quad (2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{1+\alpha} \frac{1}{1+x^2 + \alpha^2} dx.$$

2. 求 $F'(\alpha)$:

$$(1) F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx; \quad (2) F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$$

$$(3) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx; (4) F(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha) dx.$$

3. 应用对参数进行微分或积分的方法, 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx;$$

$$(2) F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx;$$

$$(3) F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x} dx;$$

$$(4) F(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + \alpha \cos x}{1 - \alpha \cos x} \frac{dx}{\cos x} \quad (|\alpha| < 1).$$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 证明: 函数

$$y(x) = \frac{1}{k} \int_c^x f(t) \sin k(x-t) dt \quad (c, x \in [a, b])$$

满足常微分方程 $y'' + k^2 y = f(x)$, 其中 c 与 k 为常数.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $K(x, y)$ 在区域 $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq x$ 上连续, 则对任意实数 λ , 积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

有且只有一个连续解.

9.3 含参变量广义积分

在这一节, 我们讨论含参变量广义积分. 为明确起见, 只讨论在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \quad (u \in I),$$

其中 I 为有限或无穷区间; 而对它建立起来的一切理论可以类推到具有无穷下限及无界函数的含参变量广义积分的情形.

如同广义积分与数项级数的理论之间存在对应关系, 含参变量广义积分与函数项级数的理论之间也存在对应关系. 我们知道, 函数项级数的一致收敛性是十分重要的概念, 对于含参变量广义积分也是如此.

9.3.1 一致收敛性及其判别法则

假设函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times I$ 上连续. 如果对于任意一个参变量 $u \in I$, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 都收敛, 则它就确定了区间 I 上的一个函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \quad (u \in I).$$

此时称含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 I 上逐点收敛.

定义 9.3.1 (含参变量广义积分的一致收敛性) 如果对任给的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $B = B(\epsilon) > a$, 使得当 $b > B$ 时, 不等式

$$\left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right| = \left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \epsilon$$

对所有 $u \in I$ 都成立, 则称含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 I 上一致收敛.

与函数项级数类似, 含参变量广义积分一致收敛有一系列的判别法则, 其证明与函数项级数一致收敛相应的判别法则相仿, 留做习题.

定理 9.3.1 (柯西收敛准则) 含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 I 上一致收敛的充要条件是, 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在一个仅与 ϵ 有关的正数 $B = B(\epsilon) > a$, 使得当 $b_1, b_2 > B$ 时, 不等式 $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, u) dx \right| < \epsilon$ 对所有 $u \in I$ 都成立.

定理 9.3.2 (魏尔斯特拉斯判别法) 设函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times I$ 上连续. 如果存在一个非负连续函数 $p(x)$, 使得对充分大的 x 以及所有 $u \in I$, 都有

$$|f(x, u)| \leq p(x),$$

且积分 $\int_a^{+\infty} p(x) dx$ 收敛, 则含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 I 上一致收敛.

与乘积项级数类似, 被积函数为两个因子乘积形式的含参变量广义积分一致收敛也有更精细的狄利克雷判别法以及阿贝尔判别法.

定理 9.3.3 (狄利克雷判别法) 设函数 $f(x, u)$ 和 $g(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times I$ 上连续, 且满足以下两条:

(a) 积分 $\int_a^b f(x, u) dx$ 关于 b 和 u 一致有界, 即存在一个与 b 和 u 均无关的常数 K , 使得 $\left| \int_a^b f(x, u) dx \right| \leq K$ 对 $\forall b > a$ 和所有 $u \in I$ 成立;

(b) 函数 $g(x, u)$ 对于每个 $u \in I$ 关于 x 是单调的, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

对于每个 $u \in [0, +\infty)$ 关于 x 单调减, 且在区域 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上有界, 故由阿贝尔判别法知, 原积分在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. \square

例 9.3.4 研究含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} u e^{-ux} dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 对 $\forall u \in [0, +\infty)$, 积分 $\int_0^{+\infty} u e^{-ux} dx$ 收敛. 为考察其一致收敛性, 对 $b > 0$, 估计积分

$$\int_b^{+\infty} u e^{-ux} dx = e^{-bu}.$$

如果取 $u = \frac{1}{b}$, 则有 $\left| \int_b^{+\infty} u e^{-ux} dx \right| = e^{-1}$. 因此, 取 $\epsilon_0 \in (0, e^{-1})$, 对 $\forall B > 0$, $\exists b_0 > B$ 及 $u_0 = \frac{1}{b_0}$, 有

$$\left| \int_{b_0}^{+\infty} u_0 e^{-u_0 x} dx \right| = e^{-1} > \epsilon_0,$$

即原含参变量广义积分在区间 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛. \square

例 9.3.5 研究广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2 x} \sin x du$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 原广义积分收敛. 作变量代换 $t = \sqrt{x}u$, 则有

$$I_A(x) = \int_A^{+\infty} e^{-u^2 x} \sin x du = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}A}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} \int_{\sqrt{x}A}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

由于函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上有上界 1 以及积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 收敛, 所以对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in (0, \delta]$ 时, 有

$$|I_A(x)| \leq \left| \sqrt{\delta} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right| \leq \epsilon.$$

对 $x > \delta$, 有估计

$$|I_A(x)| \leq \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}A}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{\sqrt{\delta}A}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

再由积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ 的收敛性知, 存在正数 M , 当 $A > M$ 时, 有

$$|I_A(x)| \leq \epsilon.$$

综上, 即得原广义积分在区间 $[0, +\infty)$ 上是一致收敛的. \square

9.3.2 一致收敛含参变量广义积分的性质

设含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 I 上收敛, 我们将研究由它所确定的函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$$

的性质, 例如连续性、可微性以及可积性等. 首先, 考虑 $I = [\alpha, \beta]$ 为有界闭区间的情形; 然后再考虑 I 为无穷区间的情形, 例如 $I = [\alpha, +\infty)$.

定理 9.3.5 (连续性与可积性) 设函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 且含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在有界闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛, 那么:

(1) 函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 即对 $\forall u_0 \in [\alpha, \beta]$, 有极限关系

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^{+\infty} f(x, u) dx = \int_a^{+\infty} f(x, u_0) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u) dx,$$

即可以交换极限运算与积分运算的顺序;

(2) 函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 并有

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[\int_a^\beta f(x, u) du \right] dx,$$

即可以交换两个积分运算的顺序.

证明 (1) 设 $u_0 \in [\alpha, \beta]$, 考察差值

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &= \left| \int_a^{+\infty} f(x, u) dx - \int_a^{+\infty} f(x, u_0) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| + \left| \int_b^{+\infty} f(x, u_0) dx \right|, \end{aligned}$$

其中 $b > a$. 下面利用定理的条件, 分别估计上式右边中的三项. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的一致收敛性知, 存在常数 $B > a$, 使得对 $\forall b > B$, 不等式

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对所有 $u \in [\alpha, \beta]$ 成立. 对于取定的 $b > B$, 积分 $\int_a^b f(x, u) dx$ 就是含参变量常义

积分,则由含参变量常义积分的连续性知,存在 $\delta > 0$, 当 $|u - u_0| < \delta$ 时,

$$\left| \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

综上, 当 $|u - u_0| < \delta$ 时, 有

$$|\varphi(u) - \varphi(u_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即函数 $\varphi(u)$ 在 u_0 处连续. 由 u_0 的任意性知, 函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

(2) 由(1)知函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 所以 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积. 为证明可交换积分顺序, 对 $b > a$, 改写积分:

$$\int_a^\beta \varphi(u) du = \int_a^\beta \left[\int_a^b f(x, u) dx \right] du + \int_a^\beta \left[\int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = I_1 + I_2,$$

其中 I_1 是含参变量常义积分. 由含参变量常义积分可交换积分顺序的性质知

$$I_1 = \int_a^\beta \left[\int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[\int_a^\beta f(x, u) du \right] dx.$$

而对于积分 I_2 , 当取 b 充分大时, 其值非常小, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在常数 $B > a$, 使得对 $\forall b > B$, 有不等式

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \varepsilon.$$

进而有估计

$$|I_2| = \left| \int_a^\beta \left[\int_b^{+\infty} f(x, u) dx \right] du \right| < (\beta - \alpha)\varepsilon.$$

于是, 当 $b > B$ 时, 有估计

$$\left| \int_a^b \left[\int_a^\beta f(x, u) du \right] dx - \int_a^\beta \varphi(u) du \right| < (\beta - \alpha)\varepsilon.$$

这就说明了广义积分 $\int_a^{+\infty} \left[\int_a^\beta f(x, u) du \right] dx$ 收敛, 并且等于 $\int_a^\beta \varphi(u) du$. \square

例 9.3.6 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, 其中 $0 < a < b$.

解 被积函数可以表示为积分

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-ux} du,$$

于是, 所要计算的积分就变为

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-ux} du \right) dx.$$

如果能够交换积分顺序, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} e^{-ux} dx \right) du = \int_a^b \frac{du}{u} = \ln \frac{b}{a}.$$

下面验证可交换积分顺序的条件,即被积函数 $f(x, u) = e^{-ux}$ 在区域 $D = [0, +\infty) \times [a, b]$ 上连续,并且含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} dx$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛. 被积函数的连续性是显然的,为证含参变量广义积分的一致收敛性,注意到,对 $\forall u \in [a, b]$,有

$$e^{-ux} \leq e^{-ax},$$

而无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛. 由魏尔斯特拉斯判别法知,含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} dx$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛. \square

下面,我们再研究函数 $\varphi(u)$ 的可导性.

定理 9.3.6(可导性) 设函数 $f(x, u)$ 满足下列条件:

- (a) 函数 $f(x, u)$ 和 $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续;
- (b) 含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上收敛;
- (c) 含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

那么函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可导,并且

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx,$$

即可以交换求导运算与积分运算的顺序.

证明 对任意自然数 n , 令

$$\varphi_n(u) = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x, u) dx,$$

则 $\varphi_n(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,且具有连续的导数,并且

$$\varphi_n'(u) = \int_{a+n-1}^{a+n} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx.$$

函数 $\varphi(u)$ 可以改写成函数项级数的形式: $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u)$, 并且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$$

在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛,所以函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u)$ 满足逐项微分的条件,从而和函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微,并且

$$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx. \quad \square$$

例 9.3.7 计算积分 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ ($-\infty < \beta < +\infty$).

解 对任意实数 β , 有估计

$$|e^{-x^2} \cos 2\beta x| \leq e^{-x^2},$$

而无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛. 由比较判别法知, 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ 收敛. 为求其值, 可视 β 为参数, 并注意到, 当 $x > 0$ 时, 有

$$\left| \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) \right| = |2xe^{-x^2} \sin 2\beta x| \leq 2xe^{-x^2},$$

但积分 $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx$ 收敛, 从而由魏尔斯特拉斯判别法知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx$ 在整个数轴上关于 β 一致收敛. 交换求导与积分的顺序, 有

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx = -2 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx.$$

利用分部积分法, 可得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\beta x dx = \beta \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx = \beta I(\beta).$$

于是, 函数 $I(\beta)$ 满足微分方程

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -2\beta I(\beta),$$

以及定解条件 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 求解这个定解问题, 可得 $I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$. \square

注 9.3.1 如同注 9.2.1 中所述的理由, 定理 9.3.5 中关于连续性以及定理 9.3.6 中关于可微性的命题中, 参数 u 的变化范围 $[\alpha, \beta]$ 可以是无穷区间. 事实上, 在例 9.3.7 中, 我们就已经这样做了.

如果参变量 u 的变化范围是无穷区间, 例如, 设 $u \in [\alpha, +\infty)$, 考虑含参变量广义积分 $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 的无穷积分

$$\int_a^{+\infty} \varphi(u) du = \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du.$$

如果希望交换两个无穷区间上广义积分的顺序, 则需要更多的条件.

定理 9.3.7 (含参变量广义积分的无穷积分) 如果函数 $f(x, u)$ 满足下列条件:

(a) 函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times [\alpha, +\infty)$ 上连续:

(b) 含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在无穷区间 $[\alpha, +\infty)$ 上“内闭一致收敛”，即在任何有界闭区间 $[\alpha, \beta]$ ($\beta > \alpha$) 上一致收敛，而积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) du$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上“内闭一致收敛”，即在任何有界闭区间 $[a, b]$ ($b > a$) 上一致收敛；

(c) 以下两个累次积分

$$\int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx, \quad \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx \right] du$$

至少有一个存在.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx, \quad \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du$$

都存在, 而且相等, 即

$$\int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du,$$

也即可以交换两个无穷积分的运算顺序.

证明 为明确起见, 不妨设积分 $\int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx$ 存在, 要证明的便是

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx.$$

对 $\forall \beta > \alpha$, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛, 于是可以交换如下积分的顺序:

$$\int_a^{\beta} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{\beta} f(x, u) du \right] dx.$$

因此, 要证明的就变成

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{\beta} f(x, u) du \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} f(x, u) du \right] dx,$$

即

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \left[\int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = 0.$$

将上式中的积分拆成两项, 即

$$\int_a^{+\infty} \left[\int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx = \int_a^b \left[\int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx + \int_b^{+\infty} \left[\int_{\beta}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx,$$

其中 $b > a$. 下面对上式右边中的两个积分分别作估计.

不妨设积分 $\int_a^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx$ 收敛. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists b > a$, 使得

$$\int_b^{+\infty} \left[\int_a^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是, 有估计

$$\left| \int_b^{+\infty} \left[\int_\beta^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| \leq \int_b^{+\infty} \left[\int_\beta^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另外, 对于上面选定的 $b > a$, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) du$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 即存在 $\beta_0 > a$, 使得当 $\beta > \beta_0$ 时, 不等式

$$\left| \int_\beta^{+\infty} f(x, u) du \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对区间 $[a, b]$ 上的所有 x 成立. 由此可得

$$\left| \int_a^b \left[\int_\beta^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| \leq \int_a^b \left[\int_\beta^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上, 当 $\beta > \beta_0$ 时, 有

$$\left| \int_a^{+\infty} \left[\int_\beta^{+\infty} f(x, u) du \right] dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就是所要证明的等式. □

例 9.3.8 计算极限 $\lim_{v \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)x} \sin x du \right] dx$.

解 考虑函数 $f(x, u, v) = e^{-(u^2+v)x} \sin x$, 它在区域 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续. 对固定的 $v > 0$, 由于 $|e^{-(u^2+v)x} \sin x| \leq e^{-vx}$, 而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-vx} dx$ 收敛, 所以积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)x} \sin x dx$ 关于 u 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 类似于例 9.3.5, 可以证明 $\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)x} \sin x du$ 关于 x 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 于是, 交换积分顺序, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)x} \sin x dx \right] du &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)x} \sin x dx \right] du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + v)^2}. \end{aligned}$$

又因为积分 $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + v)^2}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上关于 v 一致收敛, 而被积函数 $\frac{1}{1 + (u^2 + v)^2}$ 在区域 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续, 因此在积分号下取极限

($v \rightarrow 0^+$), 有

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + v)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

从而得极限 $\lim_{v \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v)x} \sin x du \right] dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$ □

后面计算菲涅耳积分时将用到例 9.3.8 的结论.

习 题 9.3

1. 确定下列含参变量广义积分的收敛域:

(1) $\int_0^{+\infty} x^u dx;$

(2) $\int_1^{+\infty} x^u \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx;$

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^u \ln x} dx;$

(4) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^u x} dx;$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^u (1+x)} dx;$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^u} dx;$

(7) $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt;$

(8) $\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$

2. 研究下列积分在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx, -\infty < u < +\infty;$

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx$ ($\beta \neq 0$ 为常数), (a) $0 < \alpha_0 < \alpha < +\infty$, (b) $0 < \alpha < +\infty$;

(3) $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, 0 \leq \alpha < +\infty;$

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx, 0 \leq \alpha < +\infty;$

(5) $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx, 0 \leq \alpha < +\infty$, 其中 $p > 0$ 为常数;

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, 0 \leq p < +\infty.$

3. 设函数 $f(x, u)$ 在区域 $D = [a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 且对于区间 $[\alpha, \beta]$ 上的每个 u , 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 收敛, 而当 $u = \beta$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 发散. 试证明: 积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 在区间 $[\alpha, \beta)$ 上必不一致收敛.

4. 证明: 函数 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是连续且可微的.

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx \quad (\alpha, \beta > -1);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx \quad (a > -1);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} dx \quad (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha, \beta > 0);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} dx;$$

$$(6) \int_0^{+\infty} [e^{-(\frac{a}{x})^2} - e^{-(\frac{b}{x})^2}] dx \quad (0 < a < b).$$

9.4 含参变量积分的应用

为了今后物理等学科的需要,本节利用含参变量积分理论计算几个重要的广义积分,最后介绍在数学和物理学科以及工程计算上极为重要的函数——B 函数和 Γ 函数.

9.4.1 几个重要的广义积分*

例 9.4.1 (狄利克雷积分) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

解 由例 9.1.6 知,这个积分收敛,但不绝对收敛.为计算其值,引进收敛因子 e^{-ux} ,即考虑含参变量广义积分

$$I(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx.$$

容易验证:被积函数 $f(x, u) = e^{-ux} \frac{\sin x}{x}$ 在区域 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续,并且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.因此,函数 $I(u)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续,特别地,在 $u = 0$ 处连续,即

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} I(u) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

另外,由于对 $\forall u_0 > 0$,积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx$ 在区间 $[u_0, +\infty)$ 上一致收敛,所以可以交换求导与积分的顺序,得

$$I'(u) = - \int_0^{+\infty} e^{-ux} \sin x dx = - \frac{1}{1+u^2}.$$

上式两边对 u 求积分, 可得

$$I(u) = - \arctan u + C.$$

又当 $u \rightarrow +\infty$ 时, 根据不等式

$$|I(u)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-ux} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-ux} dx = \frac{1}{u},$$

可知 $I(u) \rightarrow 0$, 由此定出常数 $C = \frac{\pi}{2}$, 从而有 $I(u) = \frac{\pi}{2} - \arctan u$. 再令 $u \rightarrow 0^+$, 即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

例 9.4.2 (拉普拉斯积分) 计算积分:

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx,$$

其中 $\alpha, \beta > 0$.

解 因为对 $\alpha > 0, \beta \geq 0$, 有估计

$$|I(\beta)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos \beta x|}{\alpha^2 + x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha},$$

所以, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上关于 β 一致收敛. 而由例 9.3.2 知, 对任意固定的常数 $\beta_0 > 0$, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 在区间 $[\beta_0, +\infty)$ 上一致收敛. 因此, 可以交换求导与积分的顺序, 从而得

$$I'(\beta) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = -J(\beta).$$

当 $\beta > 0$ 时, 利用狄利克雷积分, 可得 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 于是有

$$I'(\beta) + \frac{\pi}{2} = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx.$$

可以验证: 上式又可对 β 在积分号下求导, 即

$$I''(\beta) = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha^2 I(\beta).$$

这是不显含自变量 β 的二阶常系数线性齐次方程, 求得其通解为

$$I(\beta) = C_1 e^{a\beta} + C_2 e^{-a\beta},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 由于对 $\forall \beta > 0, |I(\beta)| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$, 即积分 $I(\beta)$ 有界, 所以常数 C_1 必为零, 即 $I(\beta) = C_2 e^{-\alpha\beta}$.

为确定常数 C_2 的值, 注意到积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上关于 β 一致收敛, 因此函数 $I(\beta)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续, 特别地, 在 $\beta = 0$ 处连续, 于是有

$$C_2 = \lim_{\beta \rightarrow \beta^+} I(\beta) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

进而有

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0),$$

以及

$$J(\beta) = -I'(\beta) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}. \quad \square$$

例 9.4.3 (菲涅耳积分) 计算积分: $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

解 由例 9.1.7 的方法, 可以推出积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 和 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ 条件收敛. 作变量代换 $x^2 = t$, 则有

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

为计算第一个积分的值, 利用等式

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du,$$

代入可得

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du \right) dt.$$

为交换积分顺序, 引入收敛因子 e^{-vt} , 可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+v)} \sin t du \right] dt.$$

由例 9.3.3 知, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上关于 v 一致收敛. 令 $v \rightarrow 0^+$, 利用例 9.3.8 的结果, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \lim_{v \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-vt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而得积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

同理, 可得 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. □

9.4.2 Γ 函数和 B 函数及其性质

欧拉在求解微分方程时, 引出如下两个含参变量积分:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

勒让德(A. M. Legendre, 1752~1833)建议分别称为 Γ 函数和 B 函数. Γ 函数和 B 函数统称为欧拉积分或欧拉函数, 其中 B 函数也称为第一类欧拉积分, 而 Γ 函数也称为第二类欧拉积分.

Γ 函数和 B 函数在数学、物理以及工程计算中有着广泛的应用, 有不少重要的定积分值可以用 Γ 函数和 B 函数表示出来. 工程上为了便于查找, 编制了详尽的 Γ 函数表和 B 函数表.

首先, 由 Γ 函数和 B 函数的积分表示可以推出, Γ 函数的定义域为区间 $(0, +\infty)$, 而 B 函数的定义域为第一象限 $(x, y > 0)$ (第 2 题). 下面讨论 Γ 函数和 B 函数的性质, 如连续性、递推公式以及 Γ 函数和 B 函数之间的关系式等.

性质 9.4.1 (连续性) Γ 函数在区间 $(0, +\infty)$ 上连续; B 函数在第一象限 $(x, y > 0)$ 内连续.

证明 (a) Γ 函数的连续性. 将 $\Gamma(x)$ 分成两个部分:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

对 $\forall \beta > \alpha > 0$, 当 $\alpha \leq x \leq \beta, 0 < t \leq 1$ 时, 有不等式

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{\alpha-1},$$

而积分 $\int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha}$ 收敛, 故积分 $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛; 又当

$\alpha \leq x \leq \beta, 1 \leq t < +\infty$ 时, 有不等式

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{\beta-1} e^{-t},$$

而积分 $\int_1^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt$ 收敛, 于是积分 $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ 也在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

综上所述, 积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛, 而被积函数 $t^{x-1} e^{-t}$ 在区域

$D = (0, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 上连续, 所以 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

由 α, β 的任意性知, $\Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

(b) B 函数的连续性. 在第一象限内任取一点 (x_0, y_0) . 当 $x \geq x_0, y \geq y_0$ 时, 对 $t \in (0, 1)$, 总有

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}.$$

而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1} dt$ 收敛, 故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ 在区域 $x \geq x_0, y \geq y_0$ 上一致收敛, 从而函数 $B(x, y)$ 在这个区域上连续. 再由点 (x_0, y_0) 的任意性知, B 函数在第一象限 $(x, y > 0)$ 内连续. \square

性质 9.4.2 (Γ 函数的递推公式) 当 $x > 0$ 时, 有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

证明 由分部积分法可得

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \quad \square$$

对 $\forall x > 1$, 取正整数 $n < x \leq n+1$, 反复利用 Γ 函数的递推公式, 可得

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) = \cdots = (x-1)\cdots(x-n)\Gamma(x-n),$$

且 $0 < x-n \leq 1$, 即对 $\forall x > 1$, Γ 函数值 $\Gamma(x)$ 的计算总可以归结为计算 $\Gamma(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上的函数值. 特别地, 当 $x = n+1$ 为正整数时, 就有

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = n! \Gamma(1),$$

并且 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, 从而得到 $\Gamma(n+1) = n!$, 即 Γ 函数可以视为正整数阶乘的推广.

另外, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值也可以定出. 事实上, 作变量代换 $t = x^2$, 有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

结合 Γ 函数的递推公式知, 当 x 为半正数 $n + \frac{1}{2}$ 时, Γ 函数的值为

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

B 函数还经常表示为无穷积分的形式.

性质 9.4.3 (B 函数的无穷积分表示) 对 $\forall x, y > 0$, 有

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz.$$

证明 在 B 函数的定义式中, 作变量代换 $t = \frac{1}{1+z}$, 则当 $t \in (0, 1)$ 时, $z \in$

$(0, +\infty)$, 并且 $1-t = \frac{z}{1+z}$, $dt = -\frac{1}{(1+z)^2} dz$, 于是有

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz. \quad \square$$

性质 9.4.4 (Γ 函数和 B 函数的关系) 对 $\forall x, y > 0$, 有

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

证明 计算乘积

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \cdot \int_0^{+\infty} v^{y-1} e^{-v} dv = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u+v)} u^{x-1} v^{y-1} du dv.$$

作变量代换 $s = u + v$, $t = v/u$, 即

$$u = \frac{s}{1+t}, \quad v = \frac{st}{1+t},$$

则有

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{x+y-1} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} ds dt = \Gamma(x+y)B(x, y),$$

即得 Γ 函数和 B 函数的关系式 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. □

当 x 和 y 分别为正整数 n 和 m 时, 利用 Γ 函数和 B 函数之间的关系式, 可得

$$B(n, m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

利用 Γ 函数和 B 函数之间的关系式, 可以推出 B 函数的对称性(第 5 题).

性质 9.4.5 (B 函数的对称性) 对 $\forall x, y > 0$, 有 $B(x, y) = B(y, x)$.

利用 Γ 函数和 B 函数之间的关系式以及 Γ 函数的递推公式, 可得 B 函数的递推公式(第 5 题).

性质 9.4.6 (B 函数的递推公式) 对 $\forall x, y > 0$, 有

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y), \quad B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y),$$

以及

$$B(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x, y).$$

利用 Γ 函数和 B 函数之间的关系式, 可得 Γ 函数的勒让德加倍公式.

性质 9.4.7 (勒让德加倍公式) 对 $\forall x > 0$, 有

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

证明 在积分

$$\begin{aligned} B(x, x) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1} dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{x-1} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{x-1} dt \end{aligned}$$

中,作变量代换 $t - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\tau}$, 则有

$$B(x, x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{x-1} d\tau = \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

将上式中的 B 函数用 Γ 函数表达, 则有

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}.$$

将 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 代入, 即得

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right). \quad \square$$

在下一章中, 利用傅里叶级数的有关知识, 还将证明 Γ 函数的余元公式.

性质 9.4.8 (余元公式) 对 $\forall x \in (0, 1)$, 有 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

利用余元公式, 为确定 $\Gamma(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上的函数值, 只要确定 $\Gamma(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上的函数值即可.

9.4.3 Γ 函数和 B 函数的应用

本小节利用 Γ 函数和 B 函数知识, 计算一些积分的值, 这些积分在几何、概率统计以及电磁学和量子物理等学科中有着广泛的应用.

例 9.4.4 计算积分 $I = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q dx$ ($b > a; p, q > -1$).

解 作变量代换 $t = (x-a)/(b-a)$, 则得

$$I = (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1). \quad \square$$

例 9.4.5 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$, 其中 n 和 m 都是自然数.

解 作变量代换 $t = \sin^2 x$, 则得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right),$$

或者用 Γ 函数表达:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

由于 n 和 m 都是自然数, 上式中 Γ 函数的自变量是整数或半整数, 因此根据 n 和 m 的奇偶性以及 Γ 函数在整数点或半整数点上的取值, 可以将上述积分的值计算出来. \square

在求椭圆的面积时, 可将其转化为计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$, 而由例 9.4.5 的结果知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{4}.$$

例 9.4.6 确定参数 α, β, γ , 使得积分

$$I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma} < +\infty,$$

并求积分 I 的值, 其中 $D = \{(x, y, z) | x, y, z \geq 0\}$ 为第一卦限.

解 首先应该有 $\alpha, \beta, \gamma > 0$, 至于进一步的条件, 将在下面的计算中提出. 作变量代换 $x = u^{2/\alpha}, y = v^{2/\beta}, z = w^{2/\gamma}$, 则积分变为

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \iiint_{\Omega} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1} v^{\frac{2}{\beta}-1} w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2} du dv dw,$$

其中 $\Omega = \{(u, v, w) | u, v, w \geq 0\}$. 再选取球坐标

$$\begin{aligned} u &= \rho \sin \varphi \cos \theta, & v &= \rho \sin \varphi \sin \theta, & w &= \rho \cos \varphi \\ (\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

于是积分变为

$$I = \frac{8}{\alpha\beta\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{\alpha}-1} \theta \sin^{\frac{2}{\beta}-1} \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-1} \varphi \cos^{\frac{2}{\gamma}-1} \varphi d\varphi \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-1}}{1+\rho^2} d\rho.$$

可见当且仅当 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$ 时, 最后一个积分收敛, 并且利用 Γ 函数和 B 函数, 可以将上述积分写为

$$I = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right) B\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, 1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right),$$

或

$$I = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right) \Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\right). \quad \square$$

例 9.4.7 设随机变量 X 服从参数 α 的麦克斯韦分布. 若其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2/\alpha^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

计算其数学期望 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

解 代入其概率密度函数表达式, 则其数学期望

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2/\alpha^2} dx = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2/\alpha^2} dx.$$

作变量代换 $t = x^2/\alpha^2$, 则有

$$E(X) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}. \quad \square$$

习 题 9.4

1. 利用 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 计算下列积分:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\sigma > 0); \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\sigma > 0);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad (a, b > 0); \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in \mathbb{Z}^+); \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$$

2. 证明: Γ 函数的定义域为区间 $(0, +\infty)$, 而 B 函数的定义域为第一象限 $(x, y > 0)$.

3. 证明: Γ 函数在区间 $(0, +\infty)$ 内有任意阶导数, 并计算导数 $\Gamma'(x)$.

4. 证明: B 函数在第一象限 $(x, y > 0)$ 内有任意阶偏导数, 并计算偏导数 $\frac{\partial B(x, y)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial B(x, y)}{\partial y}$.

5. 证明 B 函数的对称性和递推公式.

6. 利用 Γ 函数和 B 函数, 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx;$$

$$(4) \int_0^1 x^{n-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (n, m, q > 0);$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-at} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt;$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \alpha x dx \quad (|\alpha| < 1);$$

$$(7) \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}} dx;$$

$$(8) \int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^p dx \quad (0 < p < 1).$$

7. 试求曲线 $x^n + y^n = a^n$ ($x > 0, y > 0, n > 0$) 所围成的平面图形的面积.

复 习

本章主要内容

1. 广义积分收敛的判别法则: 柯西收敛准则、有界判别法、比较判别法以及比较判别法的极限形式;
2. 乘积函数广义积分收敛的精细判别法则: 狄利克雷判别法和阿贝尔判别法;
3. 含参变量常义积分的性质: 连续性、可微性以及可积性;
4. 积分限依赖于参变量的积分: 连续性和可微性;
5. 含参变量的广义积分: 收敛性和一致收敛性;
6. 含参变量广义积分一致收敛的判别法则: 柯西收敛准则、魏尔斯特拉斯判别法、狄利克雷判别法和阿贝尔判别法;
7. 一致收敛含参变量广义积分的性质: 连续性、可微性以及可积性;
8. 含参变量积分的应用: 计算几个重要的广义积分, 如狄利克雷积分、拉普拉斯积分、菲涅耳积分以及欧拉积分;
9. Γ 函数和 B 函数及其性质: 连续性、可微性、递推公式、 Γ 函数和 B 函数的关系、勒让德加倍公式以及余元公式;
10. Γ 函数和 B 函数的应用: 计算和表达广义积分.

复习思考题

1. 试比较无穷积分与无穷级数的相应内容,两者有何异同?为什么?
2. 两类广义积分有何联系?试建立以 b 点为瑕点的广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的敛散性理论.
3. 举例说明广义积分的收敛性、绝对收敛性以及条件收敛性之间的区别与联系.
4. 如果无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,是否能断言极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?为什么?
5. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是非负连续的,从无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛是否能断言极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?为什么?
6. 如果已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在,从 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛能否断言 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?为什么?
7. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是单调的,从无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛能否断言极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?为什么?
8. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是一致连续的,从无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛能否断言极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?为什么?
9. 从积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛能否断言 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛?反之,从积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛能否断言 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛?试举例说明.
10. 试说明含参变量广义积分收敛和一致收敛的区别与联系.
11. 试用 $\epsilon - M$ 语言,写出含参变量广义积分不一致收敛的定义;
12. 判定含参变量广义积分不一致收敛的方法有哪几种?
13. 举例说明含参变量广义积分的连续性和可微性是“点态”的概念.
14. 试比较含参变量广义积分的性质与函数项级数的性质之间的异同,并说明理由.

复习题

1. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是非负连续的,并且极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \neq 0$,试证明: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.
2. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上是正的、单调减的,试证明: 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

和 $\int_a^{+\infty} f(x) \sin^2 x dx$ 同敛散; 并由此证明积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x \ln x} dx$$

是发散的.

3. 考察无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx$ 的敛散性.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 试证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (a < x < b).$$

5. 若 φ 和 ψ 分别具有连续的二阶导数和一阶导数, 试证明:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 a 是常数.

6. 试将 $\frac{\sin x}{x}$ 化成 x 的级数, 进而证明积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛.

7. 考察函数 $f(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^u(1+x)} dx$ 的定义域及其连续性.

8. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx \quad (\alpha \geq 0);$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R});$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-e^{-\alpha x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx \quad (\alpha, \beta > 0);$$

$$(5) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (\text{提示: } \frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{du}{1+x^2 u^2}.)$$

9. 利用欧拉积分, 计算:

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(a^2 + x^2)^n} dx \quad (n \text{ 为正整数}, a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x^a \ln x}{1 + x^2} dx \quad (-1 < a < 1);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 + x^n}{1 + x^{2n}} dx;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^n} dx.$$

10. 求曲线 $r^4 = \sin^3 \theta \cos \theta$ 所围成的面积.

11. 求曲线 $r^m = a^m \cos m\theta$ 的弧长, 其中 $a, m > 0$.

第 10 章 傅里叶分析

在研究热传导问题时,傅里叶(J. B. J. Fourier, 1768~1830)创立了一套数学理论——傅里叶分析. 1807年,傅里叶向巴黎科学院呈交论文《热的传播》,推导出著名的热传导方程,并在求解该方程时发现,其解函数可以由三角函数构成的级数形式表示,从而大胆地断言:任意一个函数都可以展成三角函数的无穷级数. 虽然他并没有明确给出这个断言成立的数学条件以及严格的数学证明,但是傅里叶级数、傅里叶积分以及傅里叶变换等理论均由此创始,开创了“傅里叶分析”这一重要的数学分支. 傅里叶的工作被认为是 19 世纪科学迈出的重要一步,它对数学的发展产生的影响是他本人及同时代的其他人都难以预料的,而且这种影响至今还在发展中.

傅里叶级数可以看成特殊的函数项级数,而傅里叶积分和傅立叶变换则是特殊的含参变量积分. 傅里叶分析从诞生之日起,就围绕着“函数的傅里叶级数究竟是否收敛于函数自身”这样一个中心问题进行研究. 当傅里叶提出函数可用级数表示时,他的想法还没有得到严格的数学论证,实际的情形人们并不清楚.

狄利克雷是历史上第一个给出函数的傅里叶级数收敛于它自身的充分条件的数学家. 黎曼对傅里叶级数的研究也作出了贡献. 关于如何确定函数傅里叶级数展开中的系数——傅里叶系数,这就要用到积分. 但是人们当时对积分的理解还不深入. 黎曼在《用三角级数来表示函数》(1854)的论文中,为了使得更广的一类函数可以用傅里叶级数来表示,第一次明确地引进并研究了现在称为黎曼积分的概念及其性质,使得积分这个分析学中的重要概念有了坚实的理论基础. 他证明了:如果函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有界且可积,则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的傅里叶系数趋于零. 此外,黎曼还指出,有界可积函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在一点处的收敛性,仅仅依赖于 $f(x)$ 在该点附近的性质. 这个非常基本而重要的结果称为局部性原理.

魏尔斯特拉斯在 1861 年首次利用三角级数构造了处处不可求导的连续函数. 他的这一发现震动了当时的数学界,因为长期的直观感觉使人们误认为,连续函数

只有在少数一些点上才不可求导.

傅里叶分析在物理学和电子类学科,以及数论、组合数学、信号处理、概率论、统计学、密码学、声学、光学、海洋学、结构动力学等领域都有着广泛的应用(例如在信号处理中,傅里叶变换的典型用途是将信号分解成幅值分量和频率分量).

10.1 周期函数的傅里叶级数

泰勒级数是将函数 $f(x)$ 关于函数族 $1, x, x^2, \dots$ 的展开,而傅里叶级数则是关于函数族 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots$ 的展开.前者的部分和是多项式,计算非常简单;后者的部分和是周期函数,非常适合研究那些具有周期的现象.

10.1.1 周期函数、三角函数的正交性

在实际生活、科学实验与工程技术中,会经常遇到周期现象,例如单摆和音叉等的振动就是最常见的周期现象,再如交流电的变化、发动机中的活塞运动等也都属于这类现象.数学上利用周期函数来描述这些周期现象,最简单的周期函数有正弦函数和余弦函数等三角函数.

对于像单摆和音叉之类的简谐振动,数学上用正弦函数 $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ 来描述,其中 A 为振幅, ω 为频率, φ 为初相;这个函数的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.如果作变量代换 $\tau = \omega t$,则 $y = A \sin(\tau + \varphi)$ 的周期为 2π .

一般地,对于任意一个以 T 为周期的函数 $f(x)$,作变量代换 $\xi = \frac{2\pi x}{T}$,则得到一个以 2π 为周期的周期函数 $y(\xi) = f\left(\frac{T}{2\pi}\xi\right)$.因此,下面先对周期为 2π 的周期函数作研究,最后作变量代换,得到一般周期函数的相应结果.

现实世界中的周期现象是多种多样的,并不都可以用一个简单的正弦函数来描述.早在18世纪,丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli, 1700~1782)在解决弦振动问题时就提出:任何复杂的振动都可以分解成一系列简谐振动之和.也就是说,在一定条件下,任何周期为 2π 的函数 $f(x)$ 都可由一系列周期为 2π 的正弦函数叠加

而成,即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n).$$

其中 $y_0 = A_0 \sin \varphi_0$ 是常数,称为基波; $y_1 = A_1 \sin(x + \varphi_1)$ 称为一次谐波;以此类推.

由于 $A_n \sin(nx + \varphi_n) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, 其中 $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$, 再记 $a_0 = 2A_0$, 上式可以写成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

上式称为 $f(x)$ 的傅里叶级数展开, 其中 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 称为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

为确定函数的傅里叶系数以及研究傅里叶级数的性质, 我们首先介绍三角函数系的正交性. 三角函数 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ 称为三角函数系, 三角函数系在其一个周期 $[-\pi, \pi]$ 上的正交性, 是指三角函数系中任何两个不同函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为 0, 即:

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \quad (m \neq n; m, n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

在三角函数系中, 两个相同函数的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不为零. 事实上, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

利用三角函数系的正交性, 我们可以计算出函数 $f(x)$ 的傅里叶系数. 为此, 假设函数 $f(x)$ 可以展开成傅里叶级数, 并且傅里叶级数可以作逐项积分, 则得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx,$$

即

$$a_0 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx / \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

为计算系数 a_m , 在 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式的两边同时乘以 $\cos mx$, 再求该乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的积分, 则由三角函数系的正交性有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos mx dx \\ &= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx,\end{aligned}$$

即

$$a_m = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx.$$

同理, 可得 $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$, 这就是计算傅里叶系数的欧拉-傅里叶公式.

定理 10.1.1 (欧拉-傅里叶公式) 设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 可以展开成傅里叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则傅里叶系数 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 由下面的欧拉-傅里叶公式给出:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

10.1.2 周期函数的傅里叶级数展开

对于任意一个周期为 2π 的函数 $f(x)$, 由欧拉-傅里叶公式知, 只要在其一个周期 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 就可以算得傅里叶系数的值, 进而构成傅里叶级数, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中符号 \sim 仅表示一种对应关系, 因为没有证明傅里叶级数是否收敛, 以及若傅里叶级数收敛其是否收敛于函数 $f(x)$ 自身.

下面我们考察几个具体函数的傅里叶级数及其收敛性, 再给出一般性的结论, 即狄利克雷收敛定理.

例 10.1.1 考察周期为 2π 的函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

解 (a) 傅里叶系数. 直接计算, 有

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \quad (n \geq 1),\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n \geq 1).$$

(b) 傅里叶级数的收敛性. 函数 $f(x)$ 对应的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right].$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx$ 在整个数轴上绝对收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ 在整个数轴上条件收敛(第4题), 故函数 $f(x)$ 对应的傅里叶级数在整个数轴上收敛.

(c) 傅里叶级数的和函数 $S(x)$. 由函数 $f(x)$ 及其傅里叶级数的第 n 个部分和 $S_n(x)$ 的图像(图 10.1 和 10.2), 可以发现: 函数 $f(x)$ 在 $x = (2k - 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 处为第一类间断; 当 $x \neq (2k - 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛到它自身, 即

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right] \\ (x \neq (2k - 1)\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$$

而当 $x = (2k - 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 其傅里叶级数收敛到 $\frac{\pi}{2}$. 因此, 傅里叶级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq (2k - 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \\ \frac{\pi}{2}, & x = (2k - 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \end{cases} \quad \square$$

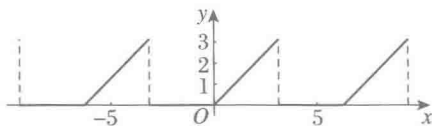


图 10.1 例 10.1.1 中的周期函数

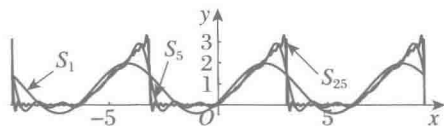


图 10.2 例 10.1.1 中傅里叶级数的部分和

在例 10.1.1 中, 当 $x = (2k - 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $\frac{\pi}{2} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, 即此时其傅里叶级数收敛到 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

例 10.1.2 (锯齿函数的傅里叶级数) 考察周期为 2π 的锯齿函数的傅里叶级数及其收敛性, 其中锯齿函数的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x \leq 2\pi, \\ f(x - 2n\pi), & 2n\pi < x \leq 2(n+1)\pi, n \text{ 为整数.} \end{cases}$$

解 (a) 傅里叶系数. 直接计算, 有

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \sin nx dx = \frac{1}{n}.$$

(b) 傅里叶级数的收敛性. 函数 $f(x)$ 对应的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

由第8章的知识可推得, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在整个数轴上收敛.

(c) 傅里叶级数的和函数 $S(x)$. 由函数 $f(x)$ 及其傅里叶级数的第 n 个部分和 $S_n(x)$ 的图像(图 10.3 和 10.4), 可以发现: 函数 $f(x)$ 在 $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 处为第一类间断; 当 $x \neq 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时, 锯齿函数的傅里叶级数收敛到它自身, 即

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (x \neq 2k\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$$

而当 $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 其傅里叶级数收敛到零. 因此, 傅里叶级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \\ 0, & x = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \end{cases} \quad \square$$

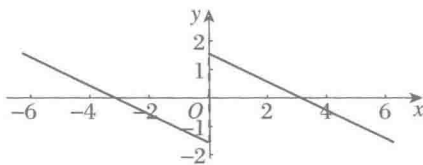


图 10.3 例 10.1.2 中的锯齿函数

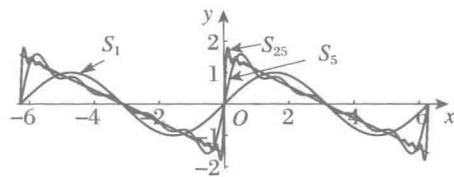


图 10.4 例 10.1.2 中傅里叶级数的部分和

在例 10.1.2 中, 当 $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时, $0 = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, 即此时其傅里叶级数收敛到 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

例 10.1.3 (三角波函数的傅里叶级数) 考察周期为 2π 的三角波函数的傅里叶级数及其收敛性, 其中三角波函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

解 (a) 傅里叶系数. 由于三角波函数 $f(x)$ 是偶函数, 直接计算, 有

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \\ &= \frac{2[1 - (-1)^n]}{n^2 \pi}. \end{aligned}$$

(b) 傅里叶级数的收敛性. 函数 $f(x)$ 对应的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

显然, 上式右边级数的绝对值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \right|$ 在整个数轴上一致收敛.

(c) 傅里叶级数的和函数 $S(x)$. 由函数 $f(x)$ 及其傅里叶级数的第 n 个部分和 $S_n(x)$ 的图像(图 10.5 和 10.6), 可以发现: 函数 $f(x)$ 在整个数轴上处处连续, 其傅里叶级数的部分和序列快速地收敛到函数自身, 并且与前两个例题不同的是, 其傅里叶级数的部分和序列在所有 x 处以近乎相同的速度收敛到函数 $f(x)$, 即其傅里叶级数在整个数轴上一致收敛到函数 $S(x) = f(x)$, 即

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (-\infty < x < \infty). \quad \square$$

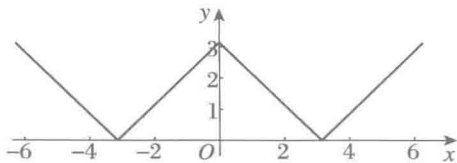


图 10.5 三角波函数

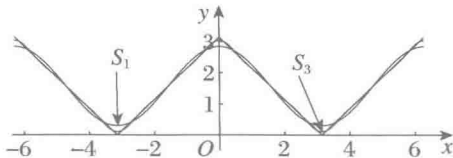


图 10.6 例 10.1.3 中傅里叶级数的部分和

由例 10.1.1~10.1.3 可以发现: 不同函数的傅里叶级数的收敛性是不同的, 有时即使傅里叶级数收敛, 但是傅里叶级数的和函数也未必处处等于原来的函数.

狄利克雷给出了一般周期函数的傅里叶级数收敛于它自身的充分条件. 下面我们直接引用狄利克雷收敛定理, 而略去其证明.

定理 10.1.2(狄利克雷收敛定理) 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π , 并且在任何有限区间上逐段光滑, 那么:

(1) 它的傅里叶级数在整个数轴上都收敛; 在 $f(x)$ 的每个连续点处收敛于 $f(x)$; 而在每个间断点处收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, 即 $f(x)$ 在这点处的左右极限的平均值.

(2) 进一步地, 如果 $f(x)$ 在整个数轴上处处连续, 则其傅里叶级数在整个数轴上绝对一致收敛于 $f(x)$, 即傅里叶级数的绝对值级数在整个数轴上一致收敛.

狄利克雷收敛定理中的逐段光滑是指: 对任意有限区间 $[a, b]$, 存在有限个分点, 将区间 $[a, b]$ 分成有限个子区间, 使得函数 $f(x)$ 在每个子区间内连续, 且有连续的导函数 $f'(x)$, 而在这些子区间的端点处 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 最坏只能是第一类间断.

从例 10.1.1~10.1.3 中, 我们可以发现狄利克雷定理与观测到的结果是吻合的.

我们称函数

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$$

的线性组合

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots)$$

为一个 n 次三角多项式. 由狄利克雷定理可得如下推论:

推论 10.1.1 设 $f(x)$ 是定义在整个数轴上的周期为 2π 的逐段光滑的连续函数, 则 $f(x)$ 可以被三角多项式一致逼近.

注 10.1.1 仔细观察例 10.1.1 和 10.1.2 中, 傅里叶级数在函数的间断点处的收敛情况, 可以发现: 傅里叶级数的部分和函数图像在函数间断点附近形成一个驼峰; 当选取的项数很大时, 逼近的误差 $\max_{[-\pi, \pi]} |f(x) - S_n(x)|$ 趋于一个常数, 大约等于函数在该间断点的跳跃度 $|f(x_0+) - f(x_0-)|$ 的 9%, 这个有趣的现象称为吉布斯现象, 或维尔布拉汉姆 - 吉布斯现象. 这一现象首先由维尔布拉汉姆 (H. Wilbraham, 1825~1883) 在 1848 年研究特殊傅里叶级数时观察到; 1899 年, 吉布斯 (J. W. Gibbs, 1839~1903) 又重新发现这一现象, 并开始利用锯齿函数作为例子研究它. 虽然吉布斯没有给出其断言的完整证明, 但是他确实强调了这一现象的重要性.

前面的讨论只限于周期为 2π 的周期函数, 现在讨论 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期的情形. 令

$$g(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right),$$

则 $g(t)$ 以 2π 为周期. 如果 $g(t)$ 满足狄利克雷定理的条件, 就有

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

回到原来的变量 x , 得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

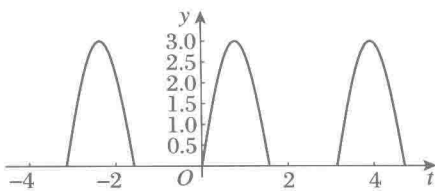


图 10.7 半波整流函数

例 10.1.4 (半波整流) 交流电压 $E(t) = E \sin \omega t$ 经半波整流后负压消失 (图 10.7). 试求半波整流函数的傅里叶级数, 并判别其收敛性.

解 交流电压 $E(t) = E \sin \omega t$ 及其半波整流的周期为 $2l = 2\pi/\omega$; 在区间 $[-\pi/\omega, \pi/\omega]$ 上, 半波整流的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi/\omega \leq t \leq 0, \\ E \sin \omega t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega. \end{cases}$$

计算傅里叶系数, 可得

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t dx = \frac{2E}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \cos n\omega t dt \\ &= \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] dt. \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, 有

$$a_1 = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} \sin 2\omega t dt = 0.$$

当 $n \neq 1$ 时,有

$$a_n = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin(n+1)\omega t - \sin(n-1)\omega t] dt = \frac{E[(-1)^{n-1} - 1]}{(n^2 - 1)\pi},$$

即 $a_{2k-1} = 0, a_{2k} = \frac{2E}{(1-4k^2)\pi} (k=1,2,3,\dots)$. 再计算 b_n . 因为

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \sin n\omega t dt,$$

所以,当 $n=1$ 时,有

$$b_1 = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{E}{2}.$$

当 $n \neq 1$ 时,有

$$b_n = \frac{E\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\cos(n-1)\omega t - \cos(n+1)\omega t] dt = 0.$$

由于半波整流函数在任何有限区间上逐段光滑,并在整个数轴上处处连续,所以,由狄利克雷收敛定理知,它的傅里叶级数在整个数轴上绝对一致收敛于函数自身(图 10.8),即

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2k\omega t \quad (-\infty < t < \infty). \quad \square$$

在半波整流的傅里叶级数展开式中,常数项 $y_0 = \frac{E}{\pi}$ 称为半波整流的直流部分,其余部分则是半波整流的交流部分(图 10.9);在交流部分中,含有一次谐波 $y_1(t) = \frac{E}{2} \sin \omega t$ 以及所有偶次谐波;并且第 $2k$ 次谐波的振幅为

$$a_{2k} = \frac{2E}{(4k^2 - 1)\pi}.$$

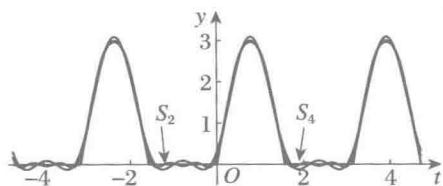


图 10.8 例 10.1.4 中傅里叶级数的部分和

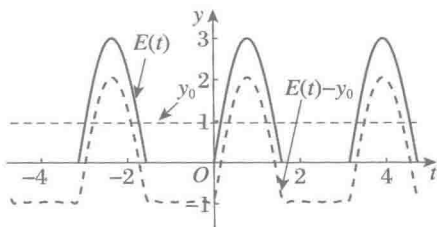


图 10.9 半波整流中的直流与交流

当 k 越大,即谐波次数越高时,谐波的振幅越小(图 10.10). 因此,在实际应用中,

由于高次谐波的振幅迅速减小,只要取展开式中前面几个低次谐波就足够了.

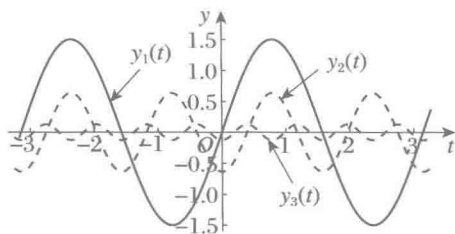


图 10.10 半波整流的谐波分解

10.1.3 傅里叶正弦级数与傅里叶余弦级数

再次考察上一小节中的例 10.1.2 和 10.1.3, 其中函数 $f(x)$ 分别是奇函数和偶函数, 相应地, 傅里叶级数中只含有正弦函数或余弦函数. 这个现象具有普遍性, 即对于奇的周期函数 $f(x)$, 不妨设其周期为 2π , 计算可得其傅里叶系数 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$, 因此, 其傅里叶级数中只含有正弦函数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

称为傅里叶正弦级数, 其中

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

而对于偶的周期函数 $f(x)$, 计算可得其傅里叶系数

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0,$$

因此其傅里叶级数中只含有余弦函数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

称为傅里叶余弦级数, 其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

例 10.1.5 考察周期为 2π 的函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq \pi, \\ f(x - 2n\pi), & (2n - 1)\pi < x \leq (2n + 1)\pi, n \text{ 为整数} \end{cases}$$

的傅里叶级数及其收敛性.

解 这是一个奇函数(图 10.11),且在任何有限区间上逐段光滑, $x = (2k-1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)是其第一类间断点.因此,由狄利克雷收敛定理知,其傅里叶级数在整个数轴上都收敛.下面计算其傅里叶展开式.

首先,由于 $f(x)$ 是奇函数,故它可以展开成傅里叶正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ (图 10.12), 其中

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n-1}.$$

于是,所给函数的傅里叶正弦级数为

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \quad (x \neq (2k-1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $x = (2k-1)\pi$ ($k=0, \pm 1, \dots$) 时,级数收敛到 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = 0$. □

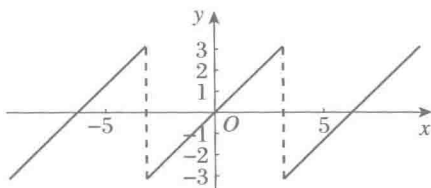


图 10.11 例 10.1.5 中的周期函数

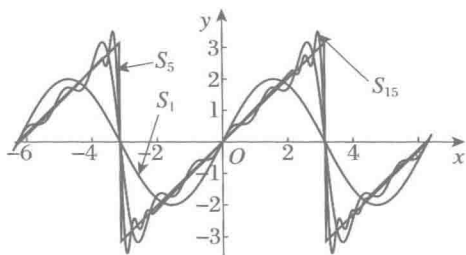


图 10.12 例 10.1.5 中傅里叶正弦级数的部分和

10.1.4 有限区间上函数的傅里叶级数

以上讨论了定义在整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数的傅里叶级数,但是,在实际问题中,所遇到的研究对象通常只定义在一个有限区间上,如何将定义在有限区间上的函数展开成傅里叶级数?我们将采用所谓的“周期开拓”的方法.

下面介绍几种常见的周期开拓.

1. 直接开拓

设 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上逐段光滑,以其在区间 $[-l, l]$ 上的值为基础,直接作周期为 $2l$ 的周期开拓,即令函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & -l < x \leq l, \\ f(x - 2nl), & (2n-1)l < x \leq (2n+1)l, n \text{ 为整数}, \end{cases}$$

则 $F(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期为 $2l$ 的周期函数, 并且在任何有限区间上逐段光滑, 故有傅里叶级数展开

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 1).$$

为得到 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数展开, 只需将函数 $F(x)$ 限制到区间 $[-l, l]$ 上, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (-l < x < l).$$

对于区间 $[-l, l]$ 的两个端点 $\pm l$, 傅里叶级数和函数的取值等于开拓后的函数 $F(x)$ 在这两点左右极限的平均值, 即 $\frac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$.

例 10.1.6 将函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h}, & |x| \leq h, \\ 0, & h < |x| \leq l \end{cases}$$

展开成傅里叶级数, 并考察其傅里叶级数的收敛性.

解 将函数 $f(x)$ 作周期为 $2l$ 的周期开拓(图 10.13), 得到的周期函数 $F(x)$ 是偶函数, 因此, $b_n = 0$, 而

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^h \frac{1}{2h} dx = \frac{1}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^h \frac{1}{2h} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi h} \sin \frac{n\pi h}{l}.$$

从而, $f(x)$ 的傅里叶级数展开为

$$f(x) \sim \frac{1}{2l} + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi h}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (-l < x < l).$$

由于函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑, 故其傅里叶级数在整个数轴上都收敛. 又因为函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在 $x = \pm h$ 处间断, 并且

$$\frac{f(h-0) + f(h+0)}{2} = \frac{f(-h-0) + f(-h+0)}{2} = \frac{1}{4h},$$

所以, 其傅里叶级数的和函数(图 10.14)为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & -l < x < l, x \neq \pm h, \\ \frac{1}{4h}, & x = \pm h. \end{cases} \quad \square$$

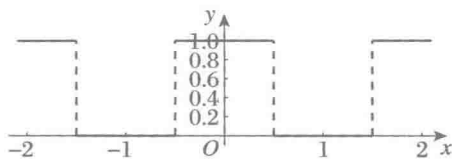


图 10.13 例 10.1.6 中的周期函数

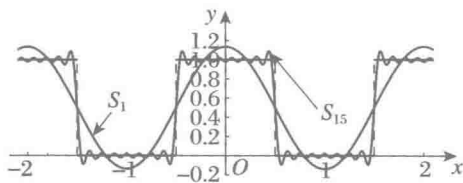


图 10.14 例 10.1.6 中傅里叶余弦级数的部分和

一般地,对于定义在有限区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$,可以作周期为 $2l = b - a$ 的周期开拓,可计算出其傅里叶级数以及欧拉-傅里叶公式:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{b-a}x + b_n \sin \frac{2n\pi}{b-a}x \right),$$

其中

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a}x dx \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{b-a}x dx \quad (n \geq 1).$$

例 10.1.7 将定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x) = x^2$ 展开成傅里叶级数,并考察其傅里叶级数的收敛性.

解 以 $2l = 1$ 为周期将函数 $f(x)$ 周期开拓到整个数轴上(图 10.15),于是有

$$a_0 = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos 2n\pi x dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} \quad (n \geq 1),$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} \quad (n \geq 1).$$

因此, $f(x)$ 的傅里叶级数展开为

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x - \frac{\pi}{n} \sin 2n\pi x \right) \quad (0 < x < 1).$$

由于函数 $f(x) = x^2$ 及其周期开拓函数 $F(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑,故其傅里叶级数在整个数轴上都收敛.又因为函数 $F(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的两个端点 $x = 0, 1$ 处间断,并且

$$\frac{f(0+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1}{2},$$

所以,其傅里叶级数的和函数(图 10.16)为

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, 1. \end{cases}$$

□

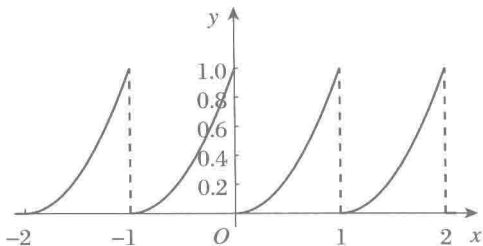


图 10.15 例 10.1.7 中的周期函数

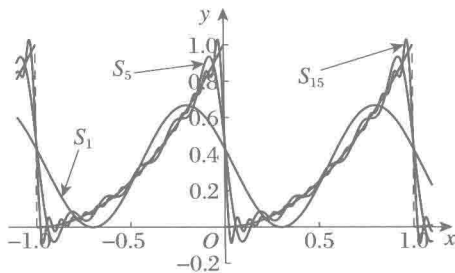


图 10.16 例 10.1.7 中傅里叶级数的部分和

2. 奇性开拓与傅里叶正弦级数

设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[0, l]$ 上, 欲将 $f(x)$ 展开为周期为 $2l$ 的傅里叶级数. 为此, 首先需要将 $f(x)$ 开拓到一个周期 $[-l, l]$ 上, 然后再作周期开拓. 根据函数 $f(x)$ 的实际意义及具体要求, 某些情况下要求拓展后的函数为奇函数, 即奇性开拓. 为作奇性开拓, 令函数

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -l < x < 0. \end{cases}$$

再作周期开拓

$$F_o(x) = \begin{cases} f_o(x), & -l < x \leq l, \\ f_o(x - 2nl), & (2n - 1)l < x \leq (2n + 1)l, n \text{ 为整数.} \end{cases}$$

于是, 函数 $F_o(x)$ 是定义在整个数轴上的周期为 $2l$ 、奇的周期函数. 当 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上分段光滑时, 函数 $F_o(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑, 从而其傅里叶级数在整个数轴上都收敛, 并且只含有正弦函数项, 即为傅里叶正弦级数

$$F_o(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f_0(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n \geq 1).$$

由此得到 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (0 \leq x \leq l).$$

例 10.1.8 将定义在 $[0, l]$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < l/2, \\ l-x, & l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

展开成傅里叶正弦级数.

解 为把函数 $f(x)$ 展开成傅里叶正弦级数, 作奇性开拓得到定义在对称区间 $[-l, l]$ 上的奇函数, 再作周期开拓得到定义在整个数轴上的周期为 $2l$ 、奇的周期函数 $F_0(x)$ (图 10.17). 计算 $F_0(x)$ 的傅里叶正弦级数的系数:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{4l}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

利用 $\sin \frac{n\pi}{2}$ 的取值情况, 可得当 $n = 2k$ 时, $b_n = 0$; 而当 $n = 2k - 1$ 时, $b_n = \frac{(-1)^{k-1} 4l}{(2k-1)^2 \pi^2}$. 注意到函数 $f(x)$ 以及 $F_0(x)$ 在各自的定义域内处处连续, 故 $f(x)$ 的傅里叶正弦级数 (其部分和的图像见图 10.18) 为

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x \quad (0 \leq x \leq l). \quad \square$$

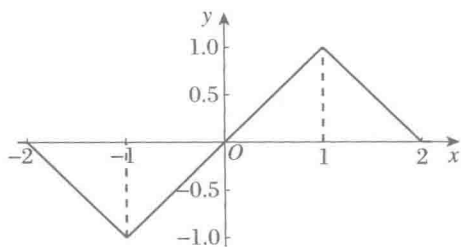


图 10.17 例 10.1.8 中的周期函数

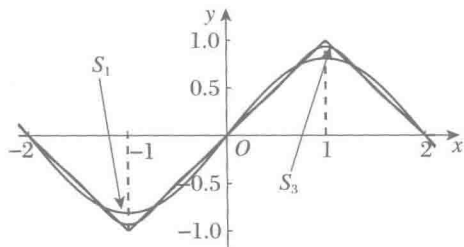


图 10.18 例 10.1.8 中傅里叶正弦级数的部分和

3. 偶性开拓与傅里叶余弦级数

对于定义在区间 $[0, l]$ 上的函数 $f(x)$, 根据函数 $f(x)$ 的实际意义及具体要求, 某些情况下要求拓展后的函数为偶函数, 即偶性开拓. 为作偶性开拓, 令函数

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ f(-x), & -l < x \leq 0, \end{cases}$$

再作周期开拓

$$F_e(x) = \begin{cases} f_e(x), & -l < x \leq l, \\ f(x - 2nl), & (2n - 1)l < x \leq (2n + 1)l, n \text{ 为整数}. \end{cases}$$

于是, 函数 $F_e(x)$ 是定义在整个数轴上的周期为 $2l$ 、偶的周期函数. 当 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上分段光滑时, 函数 $F_e(x)$ 在任何有限区间上逐段光滑, 故其傅里叶级数在整个数轴上都收敛, 并且只含有余弦函数项, 即为傅里叶余弦级数

$$F_e(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f_e(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 0).$$

由此得到 $f(x)$ 的傅里叶余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l).$$

例 10.1.9 将例 10.1.8 中的函数展开成傅里叶余弦级数.

解 为把函数 $f(x)$ 展开为傅里叶余弦级数, 作偶性开拓得到定义在对称区间 $[-l, l]$ 上的偶函数, 再作周期开拓得到定义在整个数轴上的周期为 $2l$ 、偶的周期函数 $F_e(x)$ (图 10.19). 计算 $F_e(x)$ 的傅里叶正弦级数的系数:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} x dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l-x) dx = \frac{l}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2l}{n^2 \pi^2} \left[2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + (-1)^{n+1} \right].$$

利用 $\cos \frac{n\pi}{2}$ 的取值情况, 可得除了 $a_{4k+2} = -\frac{2l}{(2k+1)^2 \pi^2}$ 外, 其余 $a_n = 0$ ($n \geq 1$).

注意到函数 $f(x)$ 及 $F_e(x)$ 在各自的定义域内处处连续, 故 $f(x)$ 的傅里叶余弦级数(其部分和的图像见图 10.20)为

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(4k+2)\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l). \quad \square$$

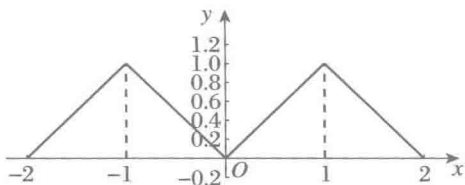
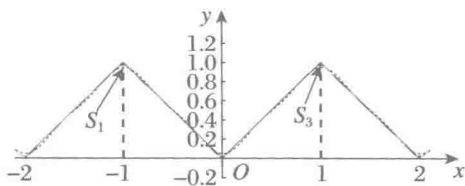


图 10.19 例 10.1.9 中的周期函数

图 10.20 例 10.1.9 中傅里叶
余弦级数的部分和

10.1.5 贝塞尔不等式与巴塞瓦尔等式

在前面几小节,我们讨论了周期函数的傅里叶级数的逐点收敛性问题,下面我们将从另外一个角度来考察傅里叶级数,进而得到傅里叶系数所满足的贝塞尔不等式与巴塞瓦尔等式.

我们将考虑比狄利克雷定理中更广泛的一类函数.用 $L^2[-\pi, \pi]$ 表示 $[-\pi, \pi]$ 中可积且平方可积函数的全体,即

$$L^2[-\pi, \pi] = \left\{ f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \text{ 存在且有限} \right\}.$$

这里我们允许 $f(x)$ 为无界函数,因此上述积分可能是通常意义下的黎曼积分,也可能是广义积分.注意,如果 $f(x)$ 黎曼可积,则 $f^2(x)$ 黎曼可积;但是 $f(x)$ 广义可积推不出 $f^2(x)$ 广义可积,所以我们要求 $f(x)$ 可积且平方可积.

可以证明:在通常的函数加法和数乘运算下, $L^2[-\pi, \pi]$ 为一个(无穷维)线性空间.在 $L^2[-\pi, \pi]$ 中引入内积

$$(f(x), g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

它诱导了 $L^2[-\pi, \pi]$ 上的度量(或距离)

$$\|f(x) - g(x)\| = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

这个度量称为 L^2 度量. $L^2[-\pi, \pi]$ 中函数列 $f_n(x)$ 在 L^2 度量下收敛于 $f(x)$, 或 $f_n(x)$ 均方收敛于 $f(x)$, 是指

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

注意,这与我们以前讨论的函数列的逐点收敛或一致收敛是完全不同的概念.

设 $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, 则下列积分存在且有限:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1).$$

$f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其第 n 个部分和

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

为 n 次三角多项式. 由于 $f(x)$ 不一定是光滑函数, 甚至可能不连续, 所以我们不能期望 $T_n(x)$ 逐点收敛于 $f(x)$. 一个自然的问题是, $T_n(x)$ 是否在 L^2 度量下收敛于 $f(x)$?

我们首先证明如下定理:

定理 10.1.3 (傅里叶系数的最优性) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 可积且平方可积, $T_n(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的第 n 个部分和函数, $S_n(x)$ 是任意一个 n 次三角多项式, 则

$$\|f(x) - S_n(x)\| \geq \|f(x) - T_n(x)\|.$$

证明 设 $S_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, 则

$$\begin{aligned} \|f(x) - S_n(x)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

容易算得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx &= \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left[\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right] \\ &= \pi \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right], \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\alpha_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 \cos^2 kx + \beta_k^2 \sin^2 kx) \right] dx \\
 &= \pi \left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right].
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 &\|f(x) - S_n(x)\|^2 \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \pi \left[-\alpha_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right] \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] \\
 &\quad + \pi \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] \right\}. \quad (10.1.1)
 \end{aligned}$$

在上式中, 当 $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ ($1 \leq k \leq n$) 时, 左边达到最小值, 即 $S_n(x) = T_n(x)$ 时, $\|f(x) - S_n(x)\|$ 取最小值. 定理证毕. \square

由式(10.1.1)知

$$\|f(x) - T_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

又由于 $\|f(x) - T_n(x)\| \geq 0$, 所以我们有下面的定理:

定理 10.1.4 (贝塞尔不等式) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积, 并且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则有贝塞尔不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

下面我们对定理 10.1.3 作一些解释. 在内积空间 $L^2[-\pi, \pi]$ 中, 三角函数组

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

是两两正交的单位向量, 以前 $2n+1$ 个向量为基生成的子空间 \mathcal{F}_n 恰由所有 n 次三角多项式构成. 记

$$a'_0 = \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a'_k = \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$b'_k = \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

不难看出, $f(x)$ 的傅里叶级数的第 n 个部分和 $T_n(x)$ 满足

$$T_n(x) = a'_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left(a'_k \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx + b'_k \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right).$$

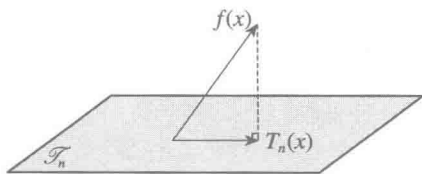


图 10.21 投影的示意图

因此, $T_n(x)$ 恰为 $f(x)$ 在子空间 \mathcal{T}_n 中的投影向量(图 10.21). 由投影的几何意义知, 空间 \mathcal{T}_n 中任何一个向量 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 之间的距离大于或等于 $f(x)$ 与其投影 $T_n(x)$ 之间的距离.

进一步, 有如下定理, 这里略去其证明.

定理 10.1.5 (L^2 收敛及巴塞瓦尔等式) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积, 并且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数的第 n 个部分和 $T_n(x)$ 在 L^2 度量下收敛于 $f(x)$, 并且有巴塞瓦尔等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

定理 10.1.5 是说, 向量组

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

是空间 $L^2[-\pi, \pi]$ 中的一组标准正交基. 而 $L^2[-\pi, \pi]$ 中任何一个向量 $f(x)$ 的模长的平方等于其在标准正交基下各坐标的平方和, 这是有限维空间中的勾股定理的推广.

推论 10.1.2 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积, 则其傅里叶系数 a_n 和 b_n 满足:

(a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n}$ 收敛;

(b) 极限关系 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

证明 由贝塞尔不等式知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛, 从而 (b) 成立. 由不等式

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + a_n^2 \right), \quad \left| \frac{b_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + b_n^2 \right),$$

再由比较判别法知(a)成立. \square

利用巴塞瓦耳等式,可以得到如下推广形式的巴塞瓦耳等式:

推论 10.1.3 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是 $f(x)$ 的傅里叶系数, 而 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $g(x)$ 的傅里叶系数, 则下式成立:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

证明 考虑函数 $f \pm g$ 的巴塞瓦耳等式, 然后把两者相减, 再除以 4 即得. \square

推广形式的巴塞瓦耳等式就是两个平方可积函数的内积等于其在标准正交基下对应坐标乘积之和.

利用巴塞瓦耳等式及其推广形式, 可得傅里叶级数的逐项积分定理:

定理 10.1.6 (傅里叶级数的逐项积分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可积且平方可积, 并且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (10.1.2)$$

则对区间 $[-\pi, \pi]$ 中的任意 a, b , 有如下逐项积分公式:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt. \quad (10.1.3)$$

特别地, 对 $x \in [-\pi, \pi]$, 有

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right). \quad (10.1.4)$$

证明 首先, 将推广形式的巴塞瓦耳等式写成

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx.$$

再令函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \in [-\pi, a) \cup (b, \pi]. \end{cases}$$

代入推广形式的巴塞瓦耳等式, 即得

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt.$$

特别地, 取 $a=0$, 对 $x \in [-\pi, \pi]$, 可得

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n}$ 收敛, 故上式右边的级数还是一致收敛的. \square

注 10.1.2 由于没有假设 $f(x)$ 连续, 故 $f(x)$ 的傅里叶级数不一定逐点收敛于 $f(x)$, 即式(10.1.2)不一定是等式, 但是逐项积分后却得到了等式(10.1.3)和(10.1.4). 仔细观察傅里叶级数的逐项积分公式, 发现求一次积分之后, 傅里叶系数相当于乘以因子 $\frac{1}{n}$, 因此, 逐项积分之后的傅里叶级数具有更好的收敛性.

傅里叶级数的逐项微分条件要比逐项积分的强得多, 这里就不具体叙述了, 有兴趣的读者可以查阅有关参考书.

10.1.6 傅里叶级数的应用

1. 计算数项级数的和

利用某些特殊函数的傅里叶级数展开式以及巴塞瓦尔等式, 可以计算许多数项级数的和.

例 10.1.10 利用锯齿函数的傅里叶级数展开式, 计算数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

解 在例 10.1.1 中已经求出锯齿函数的傅里叶级数展开式

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right]$$

$$(x \neq (2k-1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

在展开式中, 令 $x=0$, 则有

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性, 立刻得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

进一步地, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

利用例 10.1.5 中的函数及其傅里叶系数以及巴塞瓦尔等式, 也可以得到相同的结果.

例 10.1.11 利用三角波函数的傅里叶级数展开式, 计算数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.

解 在例 10.1.3 中已经求出三角波函数的傅里叶级数展开式

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \quad (-\infty < x < \infty).$$

由于三角波函数的傅里叶级数在整个数轴上一致收敛, 对 $x \in [0, \pi]$, 逐项积分可得

$$\begin{aligned} \pi x - \frac{x^2}{2} &= \int_0^x \left[\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t \right] dt \\ &= \frac{\pi}{2} x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1)x. \end{aligned}$$

这个级数仍然在整个数轴上一致收敛. 再对 $x \in [0, \pi]$, 逐项积分可得

$$\frac{\pi}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} = \frac{\pi}{4} x^2 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \cos(2k+1)x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

令 $x = \pi$, 代入可得

$$\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{4} + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

于是, 立刻得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

进而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

解得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad \square$$

利用巴塞瓦尔等式,也可得此结果.

例 10.1.12 利用函数 $f(x) = \cos ax$ ($0 < a < 1$) 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数展开, 计算数项级数

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right)$$

的和.

解 由于函数 $f(x)$ 为偶函数, 故它可以展开为傅里叶余弦级数, 其中系数

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \, dx = \frac{2 \sin a\pi}{\pi a},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx \, dx \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

即当 $|x| \leq \pi$ 时, 有

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \cos nx \right].$$

令 $x=0$, 可得

$$1 = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \right],$$

即

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \quad \square$$

2. 求解微分方程

傅里叶是在求解热传导方程时发现了傅里叶级数的, 在后续课程“数学物理方程”及“量子力学”等课程中, 将会广泛地应用傅里叶级数求解微分方程. 下面仅以受迫振动为例, 展示利用傅里叶级数求解微分方程的思想与步骤.

考虑受迫振动问题对应的非齐次微分方程

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t),$$

其中 μ 为质点的质量, $c > 0$ 为阻尼系数, k 为弹性常数, 外力项 $F(t)$ 是周期为 $2p$ 的函数, 在任意有限区间上逐段光滑, 且处处连续.

由上册中的二阶线性非齐次微分方程理论知, 非齐次方程的通解为 $y = y_h + y_p$, 其中 y_h 为齐次方程

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

的通解, 而 y_p 是非齐次方程的任意一个特解. 在上册中, 对于外力 $F(t) = F \sin \frac{\pi}{p}t$ 这个特殊情形讨论了受迫振动问题, 这里对外力是周期为 $2p$ 的一般周期函数讨论受迫振动问题. 齐次方程的通解 y_h 的求解方式与上册的情形一致, 下面给出利用傅里叶级数求出非齐次方程的特解 y_p 的过程.

因为 $F(t)$ 是周期为 $2p$ 的函数, 在任意有限区间上逐段光滑, 且处处连续, 所以它可以展开为傅里叶级数形式, 即

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{p} + b_n \sin \frac{n\pi t}{p} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p F(t) \cos \frac{n\pi t}{p} dt, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p F(t) \sin \frac{n\pi t}{p} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

利用待定系数法, 可以求出非齐次微分方程

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = f_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

的解 $y_n(t)$. 在小阻尼、非共振的情形下, $y_n(t)$ 具有形式

$$y_n(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi t}{p} + \beta_n \sin \frac{n\pi t}{p} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

利用叠加原理, 可得原非齐次微分方程

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t)$$

的特解 y_p 具有形式

$$y_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi t}{p} + \beta_n \sin \frac{n\pi t}{p} \right).$$

例 10.1.13 (受迫振动) 求解非齐次微分方程

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.05 \frac{dy}{dt} + 50y = F(t),$$

其中 $F(t)$ 是周期为 2π 的函数, 它在一个周期 $[0, 2\pi]$ 上的取值为

$$F(t) = \begin{cases} \frac{5\pi}{2} \left(x + \frac{\pi}{2} \right), & -\pi \leq x \leq 0, \\ -\frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right), & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

并讨论当 t 充分大时解的渐近性态.

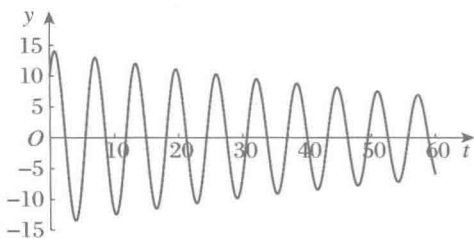


图 10.22 齐次方程的通解

解 首先,解得齐次微分方程

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.05 \frac{dy}{dt} + 50y = 0$$

的通解 $y_h(t) = e^{-0.0125t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$

(图 10.22), 其中 $\omega = \frac{\sqrt{399.9975}}{4}$.

其次,为求非齐次方程的特解 y_p , 将 $F(t)$ 展开为傅里叶级数

$$F(t) = 10 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t.$$

求解非齐次微分方程

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 0.05 \frac{dy}{dt} + 50y = \frac{10}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t.$$

利用待定系数法, 可得 $y_{2k} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); 而当 $n = 2k + 1$ 时, 有 $y_{2k+1} = \alpha_{2k+1} \cos(2k+1)t + \beta_{2k+1} \sin(2k+1)t$, 其中

$$\alpha_{2k+1} = \frac{20[25 - (2m+1)^2]}{(2m+1)^2[4(2m+1)^4 - 199.9975(2m+1)^2 + 2500]},$$

$$\beta_{2k+1} = \frac{0.5}{(2m+1)^2[4(2m+1)^4 - 199.9975(2m+1)^2 + 2500]}.$$

实际计算前面几项系数(精确到十万分位), 结果如表 10.1 所示.

表 10.1 解 $y_{2k+1} = \alpha_{2k+1} \cos(2k+1)t + \beta_{2k+1} \sin(2k+1)t$ 的系数

k	0	1	2	3	4
α_{2k+1}	0.02083	0.00347	0	-0.00043	-0.00011
β_{2k+1}	-0.00002	-0.00002	-0.16	0	0

综上, 非齐次方程的特解(图 10.23)为

$$y_p(t) = 0.02083 \cos t - 0.00002 \sin t + 0.00347 \cos 3t - 0.00002 \sin 3t - 0.16 \sin 5t + \dots$$

原非齐次方程的通解为 $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$,

并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y_h(t) \rightarrow 0$; 而 $y_p(t)$ 中占主导地位的是 $y_5(t) \approx -0.16 \sin 5t$. 因此, 当 t 充分大时, 原非齐次方程的通解为 $y(t)$,

与 $y_5(t) \approx -0.16 \sin 5t$ 基本一致. \square

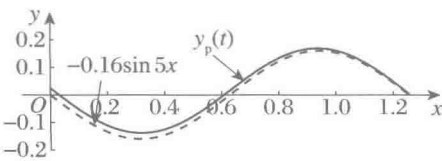


图 10.23 非齐次方程的特解

习题 10.1

- 验证三角函数系 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ 在其一个周期 $[-\pi, \pi]$ 上的正交性.
- 验证: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi (n = 1, 2, 3, \dots)$.
- 作出下列周期为 2π 的函数图像, 并把它们展开成傅里叶级数, 同时, 说明傅里叶级数的收敛情况:
 - $f(x) = |\sin x|$;
 - $f(x) = |x| (-\pi \leq x \leq \pi)$;
 - $f(x) = x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$;
 - $f(x) = \cos \frac{x}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$;
 - $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$
- 验证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ 在整个数轴上收敛.
- 试推导周期为 T 的函数 $f(x)$ 的欧拉-傅里叶公式.
- 试推导定义在有限区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 的欧拉-傅里叶公式.
- 将下列函数在指定的区间内展开成傅里叶级数, 同时, 说明傅里叶级数的收敛情况:
 - $f(x) = 1 - \sin \frac{x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$;
 - $f(x) = \frac{x}{3} (0 \leq x \leq T)$;
 - $f(x) = e^{ax} (-l \leq x \leq l)$;
 - $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ -1, & 1 \leq |x| \leq 2; \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$
- 将下列函数展开成傅里叶正弦级数和余弦级数:
 - $f(x) = x \sin x (0 \leq x \leq \pi)$;
 - $f(x) = 2x^2 (0 \leq x \leq \pi)$;

$$(3) f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x < l/2, \\ 0, & l/2 \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & 0 \leq x \leq 2h, \\ 0, & 2h < x \leq \pi. \end{cases}$$

9. 设 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的函数.

(1) 如果 $f(x \pm \pi) = -f(x)$, 试证明: $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数展开式中只含有奇次谐波, 即 $a_{2k} = b_{2k} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$);

(2) 如果 $f(x \pm \pi) = f(x)$, 试证明: $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数展开式中只含有偶次谐波, 即 $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

10. 已知周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶系数是 a_n 和 b_n . 试证明: “平移”后的函数 $f(x+h)$ 的傅里叶系数为

$$\bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh, \quad \bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

其中 h 为常数.

11. 将函数 $y = 1 - x^2$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成傅里叶级数, 并利用其结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

12. 将函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展开成傅里叶级数, 并利用其结果求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$
 的和.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 这个周期上可表示为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq x < -\frac{\tau}{2}, \\ H, & -\frac{\tau}{2} \leq x < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

试把它展开成傅里叶级数.

14. 验证: 按照通常的函数加减以及数乘运算, 所有 n 次三角多项式 $T_n(x)$ 的全体所构成的集合 \mathcal{T}_n 是一个线性空间, 其维数是 $2n+1$.

15. 验证: $(f(x), g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ ($f, g \in \mathcal{T}_n$) 定义了空间 \mathcal{T}_n 上的内积.

16. 验证: $\|f(x) - g(x)\| = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$ ($f, g \in \mathcal{T}_n$) 定义了空间 \mathcal{T}_n 上的距离.

$$f_l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (-l < x < l),$$

其中

$$\omega = \frac{\pi}{l}, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin n\omega t dt \quad (n \geq 0),$$

即

$$f_l(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega(t-x) dt.$$

由于函数 $f(x)$ 在整个数轴上绝对可积, 所以当 $l \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \rightarrow 0$.

为考察 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega(t-x) dt$ 的极限, 令 $\lambda_n = n\omega = \frac{n\pi}{l}, \Delta\lambda_n =$

$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l} = \omega$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n \int_{-l}^l f(t) \cos \lambda_n(t-x) dt.$$

上式右边的和式可看作 $[0, +\infty)$ 上 λ 的函数 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$ 的积分和,

于是有

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos n\omega(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt \right] d\lambda.$$

综上, 可得函数 $f(x)$ 的积分表示——傅里叶积分表示

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt \right] d\lambda \\ &= \int_0^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \end{aligned}$$

其中

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt,$$

称为傅里叶积分.

函数的傅里叶积分表示说明, 一个非周期函数可以分解为一系列依赖于单参数 λ 的简谐振动 $\cos \lambda(x-t)$, 即关于 λ 的积分, 这与周期函数的傅里叶级数表示的物理意义类似. 与傅里叶级数表示比较, 可以发现傅里叶积分表示与之有着许多相似之处, 差别仅在于: 在傅里叶级数中, 函数 $\cos n\omega x, \sin n\omega x$ 的参数 n 为自然

数,即为离散的变量,函数 $f(x)$ 表现为对离散变量 n 的无穷求和——无穷级数;在傅里叶积分表示中,函数 $\cos \lambda x, \sin \lambda x$ 的参数 λ 是在区间 $[0, +\infty)$ 上变化的任意实数,即 λ 为连续的变量,因此函数 $f(x)$ 表现为对连续变量 λ 的积分.此外,傅里叶积分 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的构成也与傅里叶系数 a_n 与 b_n 十分类似.

上面仅仅是对傅里叶积分表示作了一些形式上的计算与说明,为得到傅里叶积分表示成立的条件,还需要进一步的严格证明,但是由于其证明超出本课程的范围,下面仅叙述傅里叶积分表示的收敛定理,而略去其证明.

定理 10.2.1 (傅里叶积分表示的收敛定理) 设函数 $f(x)$ 在整个数轴上绝对可积,在任何有限区间上逐段光滑,则对任意实数 $x, f(x)$ 的傅里叶积分表示必收敛于它在该点的左、右极限的平均值,即

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \right] d\lambda = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

特别地,在 $f(x)$ 的连续点 x 上,傅里叶积分表示收敛于 $f(x)$.

例 10.2.1 利用傅里叶积分表示,证明:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}{1-\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

解 令 $f(x)$ 表示所需证明的等式右边的函数,它在整个数轴上绝对可积、处处连续,且在任何有限区间上逐段光滑,因此,它的傅里叶积分表示点点收敛到其自身.下面计算其傅里叶积分表示.由于 $f(x)$ 是偶函数,故 $B(\lambda) = 0$. 直接计算,可得

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos \lambda x dx = \frac{2 \cos \frac{\lambda \pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}.$$

代入傅里叶积分表示,即得所要证明的等式. □

例 10.2.2 求出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

的傅里叶积分表示,并说明其收敛性.

解 由于函数 $f(x)$ 为偶函数(图 10.24),所以, $B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt = 0$. 直接计算,可得

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \lambda t dt = \frac{2 \sin \lambda}{\pi \lambda}.$$

因此, 函数 $f(x)$ 的傅里叶积分表示为 $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda$. 由于除去 $x = \pm 1$ 之外, 函数 $f(x)$ 处处连续; 而在 $x = \pm 1$ 处, 函数 $f(x)$ 的左、右极限的平均值 $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2}$.

综上, 函数 $f(x)$ 的傅里叶积分(图 10.25) 表示为

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = \pm 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad \square$$

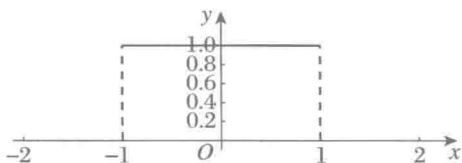


图 10.24 例 10.2.2 中函数的图像

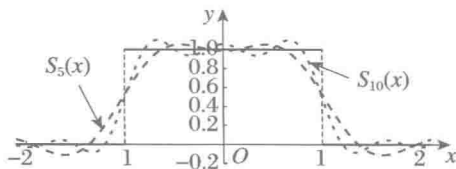


图 10.25 例 10.2.2 中的部分傅里叶积分

在例 10.2.2 的积分表示中, 令 $x = 0$, 那么可得到狄利克雷积分的值, 即 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$. 回顾在上一章中, 利用含参变量积分计算狄利克雷积分, 需要多么精妙的技巧.

注 10.2.1 (1) 利用欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 知 $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, 代入积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(t-x)} dt \right] d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt \right] d\lambda. \end{aligned}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶积分表示化为

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt \right] d\lambda.$$

这是傅里叶积分表示的复数形式,后面主要用这种形式.

(2) 类似于傅里叶级数的部分和,我们定义函数 $f(x)$ 的部分傅里叶积分为

$$S_\nu(x) = \int_0^\nu [A(\lambda)\cos \lambda x + B(\lambda)\sin \lambda x] d\lambda \quad (\nu > 0).$$

在用傅里叶积分表示收敛定理的条件下,有

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} S_\nu(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

在函数 $f(x)$ 的间断点处,部分傅里叶积分也表现出吉布斯现象(图 10.25).

10.2.2 傅里叶变换的定义

在应用傅里叶积分表示解决实际问题时,常把它改写成积分变换的形式.为此,不妨设函数 $f(x)$ 在整个数轴上处处连续,且满足傅里叶积分表示收敛定理的条件.利用傅里叶积分表示的复数形式

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt \right] d\lambda.$$

令函数

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt,$$

以及

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

通常称 $F(\lambda)$ 为函数 $f(x)$ 的傅里叶变换或像函数;而 $g(x)$ 为 $G(\lambda)$ 的傅里叶逆变换或本函数.由像函数重构本函数的公式称为傅里叶变换的反演公式.

例 10.2.3 对 $\beta > 0$, 求指数衰减函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

的傅里叶变换.

解 由于函数 $f(x)$ 在整个数轴上绝对可积,且在任意有限区间上逐段光滑,所以,直接计算,可得其傅里叶变换

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(i\lambda + \beta)t} dt = \frac{\beta - i\lambda}{\beta^2 + \lambda^2}. \quad \square$$

例 10.2.4 求函数 $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$) 的傅里叶变换.

解 由于函数 $f(x)$ (图 10.26) 在整个数轴上绝对可积,处处连续,且在任意有限区间上逐段光滑,所以直接计算,可得其傅里叶变换(图 10.27)

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(i\lambda-a)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(i\lambda+a)t} dt = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}. \quad \square$$

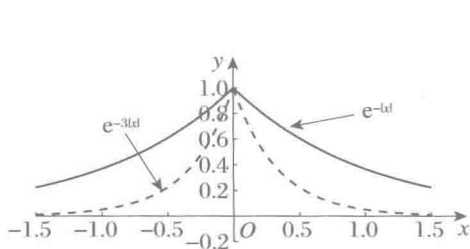


图 10.26 例 10.2.4 中的函数图像

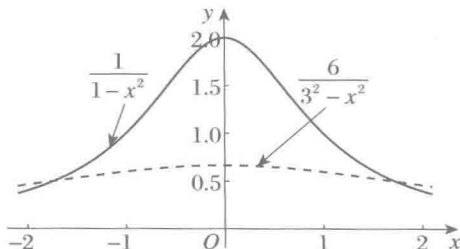


图 10.27 例 10.2.4 中的傅里叶变换图像

类似于傅里叶级数,当函数 $f(x)$ 具有奇偶性时,也可以定义傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换.如果函数 $f(x)$ 是偶函数,则 $f(x)\sin \lambda x$ 为奇函数,于是 $f(x)$ 的傅里叶变换为

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt,$$

称之为 $f(x)$ 的傅里叶余弦变换,记为 $F_c(\lambda)$.此时, $F_c(\lambda)$ 也是偶函数,因此,它的傅里叶逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_c(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

如果函数 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(x)\cos \lambda x$ 为奇函数,于是 $f(x)$ 的傅里叶变换为

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t) dt = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

为避免出现复数因子 i ,定义函数

$$F_s(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt,$$

称之为 $f(x)$ 的傅里叶正弦变换.此时, $F_s(\lambda)$ 也是奇函数,因此,它的傅里叶逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_s(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

在傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换中,仅利用了函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的取值,因此,对于定义在半无限区间 $[0, +\infty)$ 上的函数,可以根据实际问题的需要作它的傅里叶正弦变换或傅里叶余弦变换,即先作奇偶开拓,再作傅里叶变换.

例 10.2.5 求函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) 的傅里叶正弦变换和傅里叶余弦变换.

解 把函数 $f(x)$ 先作奇性开拓, 即当 $x < 0$ 时, 补充定义

$$f(x) = -f(-x) = -\frac{1}{\sqrt{-x}}.$$

再作傅里叶变换, 可得函数 $f(x)$ 的傅里叶正弦变换, 或者直接计算, 可得

$$F_s(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \lambda t dt = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

其中利用了上一章的结果 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

经类似计算, 可得 $f(x)$ 的傅里叶余弦变换(第5题)

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}. \quad \square$$

注 10.2.2 细心的读者可能已经注意到, 例 10.2.5 中的函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 不满足傅里叶积分表示收敛定理中的条件, 但是仍然求出了它的傅里叶变换. 这是因为收敛定理中的条件是充分条件, 不是必要条件. 事实上, 收敛定理的条件可放宽为:

- (a) 函数 $f(x)$ 在任何有限区间上绝对可积;
- (b) 存在 $M > 0$, 当 $|x| \geq M$ 时, $f(x)$ 单调减, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

可以验证, 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 满足以上两个条件.

10.2.3 傅里叶变换的性质

上一小节介绍了傅里叶变换和傅里叶逆变换的定义, 本小节介绍傅里叶变换和傅里叶逆变换的性质. 利用这些性质, 可以计算比较复杂函数的傅里叶变换和傅里叶逆变换. 利用傅里叶变换的反演公式, 傅里叶变换和傅里叶逆变换的性质是相对应的, 即每条傅里叶变换的性质对应着一条傅里叶逆变换的性质. 下面的叙述以傅里叶变换为主, 读者可以尝试着写出傅里叶逆变换的相应性质. 为方便起见, 以 $\mathcal{F}[f] = F(\lambda)$ 表示函数 $f(x)$ 的傅里叶变换; 以 $\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x)$ 表示函数 $F(\lambda)$ 的傅里叶逆变换.

(1) (线性性) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在傅里叶变换, 则对任意常数 α 和 β , 线性组合 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 也存在傅里叶变换, 且有

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g].$$

(2) (频移特性和时移特性) 若函数 $f(x)$ 存在傅里叶变换, 则对任意实数 λ_0 ,

函数 $f(x)e^{i\lambda_0 x}$ 也存在傅里叶变换,且有

$$\mathcal{F}[f(x)e^{-i\lambda_0 x}] = \mathcal{F}[f](\lambda + \lambda_0).$$

由于在物理上,经常称本函数的自变量为时间变量,而像函数的自变量为频率变量,所以,傅里叶变换的这个性质称为**频移特性**.对应地,傅里叶逆变换的类似性质称为**时移特性**,即

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\lambda)e^{i\lambda_0 \lambda}] = f(x + x_0).$$

利用傅里叶变换和傅里叶逆变换的定义,可以直接证明傅里叶变换和傅里叶逆变换的线性性;而利用分部积分法,可以证明下面的本函数微分法和像函数微分法(第6题).

(3) (本函数微分法)若当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限为零,并且其导数 $f'(x)$ 的傅里叶变换存在,则有

$$\mathcal{F}[f'(x)](\lambda) = i\lambda \mathcal{F}[f(x)](\lambda).$$

一般地,若当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 及其前 $k-1$ 阶导数的极限都为零,并且其 k 阶导数 $f^{(k)}(x)$ 的傅里叶变换存在,则有

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F}[f(x)](\lambda).$$

(4) (像函数微分法)若函数 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 的傅里叶变换都存在,则 $f(x)$ 的傅里叶变换是可微的,并且有

$$F'(\lambda) = \mathcal{F}[-ixf(x)](\lambda).$$

为了说明傅里叶变换的另一个重要性质,我们引进卷积的概念.设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在整个数轴上绝对可积,则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积定义为含参变量积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = f * g(x).$$

可以验证(第8题):函数的卷积如同函数的普通乘积那样,满足交换律、结合律以及对加法的分配律,即若函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 在整个数轴上绝对可积,则有

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad (f + g) * h = f * h + g * h.$$

例 10.2.6 设函数 $f(x)$ 为偶函数,并且在整个实数轴上绝对可积,令 $g(x) = \cos ax$, 其中 a 为常数.试证明: $f * g(x) = \mathcal{F}[f](a) \cos ax$.

证明 由卷积的定义知

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos[a(x-t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ax \cos at dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ax \sin at dt. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 为偶函数,乘积 $f(t) \sin at$ 是奇函数,所以, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at dt = 0$, 从而有

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \cos ax \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos at dt = 2 \cos ax \int_0^{+\infty} f(t) \cos at dt \\ &= \cos at \mathcal{F}_c[f](a) = \cos ax \mathcal{F}[f](a). \end{aligned} \quad \square$$

(5) (卷积的傅里叶变换) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在整个实数轴上绝对可积, 则卷积 $f * g$ 也在整个实数轴上绝对可积, 并且有

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

即卷积的傅里叶变换等于各个“因子”的傅里叶变换的乘积.

证明 这里只证后一个论断, 即卷积的傅里叶变换等于各个“因子”的傅里叶变换的乘积. 为此, 将卷积的定义式代入傅里叶变换的定义式, 再交换积分顺序, 可得

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{i\lambda x} dx \right] dt.$$

作变量代换 $x = t + \xi$, 则有

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{i\lambda t} dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]. \quad \square$$

下面计算高斯函数 $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$) 的傅里叶变换. 它在求解热传导问题中起着重要的作用.

例 10.2.7 (高斯函数的傅里叶变换) 计算高斯函数 $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$) 的傅里叶变换.

解 对 $\forall a > 0$, 高斯函数 $f(x) = e^{-ax^2}$ 及其各阶导数在整个实数轴上都是光滑的, 也都是绝对可积的, 并且当 $|x| \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ (图 10.28 中, $a = 1, 3$). 直接验证, 可得 $f(x)$ 满足一阶线性微分方程

$$f'(x) + 2axf(x) = 0.$$

对上式的两边作傅里叶变换, 可得

$$\lambda F(\lambda) + 2aF'(\lambda) = 0.$$

求解此微分方程, 即得

$$F(\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{4a}},$$

其中 C 为常数. 为确定常数 C 的值, 计算

$$C = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

综上所述, 可得

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}. \quad \square$$

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\mathcal{F}[f(x)]}{\mathcal{F}[K(x)]} \right]. \quad \square$$

由上面的例题可以看出,傅里叶变换将一个积分方程转化为一个函数的代数方程,从而简化了计算.当然,在实际操作过程中,需要假设未知函数 φ 具有傅里叶变换,而且最后可以求出傅里叶逆变换,这需要对傅里叶变换作更深入的研究,一方面,拓宽傅里叶变换存在的条件;另一方面,也需要发展计算较复杂函数的傅里叶变换及其逆变换的方法.

例 10.2.9(微分方程的求解) 考虑以下热传导方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

其中初始条件 $\varphi(x)$ 在整个实数轴上可积且平方可积.

解 对未知函数 $u(x, t)$ 和初始条件 $\varphi(x)$ 作关于 x 的傅里叶变换. 记 $\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u(x, t)]$, $\hat{\varphi}(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$, 则由傅里叶变换的性质有

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -a^2 \lambda^2 \hat{u} & (t > 0), \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

这是一个一阶常微分方程的初值问题,解之可得

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

再作傅里叶逆变换,由卷积定理可得

$$u(x, t) = \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2 \lambda^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy. \quad \square$$

由上面的例题可以看出,傅里叶变换将一个偏微分方程转化为一个常微分方程,从而简化了计算.

下面我们利用傅里叶变换的巴塞瓦尔等式,推导出量子力学中的海森伯测不准原理.为此,考虑沿 x 轴运动的电子,设其波函数 $f(x)$ 为平方可积函数,作归一化,不妨设 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, 则函数 $|f(x)|^2$ 为电子的位置概率密度函数.由量子力学知识,令函数 $g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \hat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right)$, 其中 \hbar 为普朗克常数,则电子动量的概率密度函数为 $|g(p)|^2$, 此时有 $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(p)|^2 dp = 1$.

为推导海森伯测不准原理,我们引入在 a 点测定电子位置的不确定度

$$\begin{aligned}\Delta_a f &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx,\end{aligned}$$

以精确描述在点 a 处可以测定该电子位置的不确定性的. 如果电子的位置概率密度 $|f(x)|^2$ 集中在 a 点, 而在远离 a 点处其值非常小, 则对所有 $x \in (-\infty, +\infty)$, 被积函数 $(x-a)^2 |f(x)|^2$ 都非常小, 此时在 a 点测定电子位置的不确定度 $\Delta_a f$ 就非常小; 同理, 如果电子的概率密度 $|f(x)|^2$ 在远离 a 点处非常大, 则在 a 点测定电子位置的不确定度 $\Delta_a f$ 就非常大.

类似地, 定义在点 a 处测定电子动量的不确定度

$$\begin{aligned}\Delta_a g &= \int_{-\infty}^{+\infty} (p-\alpha)^2 |g(p)|^2 dp / \int_{-\infty}^{+\infty} |g(p)|^2 dp \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (p-\alpha)^2 |g(p)|^2 dp,\end{aligned}$$

其中最后一步利用了归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(p)|^2 dp = 1$.

定理 10.2.2 (海森伯测不准原理)* 设沿 x 轴运动的电子波函数 $f(x)$ 不恒为 0, 其位置概率密度为 $|f(x)|^2$, 动量概率密度为 $|g(p)|^2$, 则对 $\forall a$ (在 x 轴上) 和 $\forall \alpha$ (在 p 轴上), 有海森伯不等式

$$\Delta_a f \cdot \Delta_a g \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

即如果电子位置是精确确定的, 则其必然具有很不确定的动量; 反之亦然.

证明 利用平移变换, 不妨设 $a = \alpha = 0$. 注意到函数 g 与 f 的关系, 则有 $\Delta_a g = \hbar^2 \Delta_{\hat{p}} \hat{f}$. 因此, 只需对任意一个在整个实数轴上可积且平方可积的函数 $f(x)$, 证明

$$\Delta_0 f \cdot \Delta_0 \hat{f} \geq \frac{1}{4}.$$

为进一步简化证明, 假设 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x |f(x)|^2 = 0$. 利用分部积分以及 $|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)}$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \overline{f(x)} f'(x) dx = x |f(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} [|f(x)|^2 + x f(x) \overline{f'(x)}] dx,$$

从而得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} [x \overline{f(x)} f'(x) + x f(x) \overline{f'(x)}] dx \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x \overline{f(x)} f'(x)| dx.\end{aligned}$$

利用柯西不等式, 有

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx.$$

由不确定度的定义可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \Delta_0 f \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

为估计 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$, 由巴塞瓦尔等式可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f'](\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

利用上述对 $f(x)$ 的讨论, 类似可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = \Delta_0 \hat{f} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \Delta_0 \hat{f} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

综上, 可得

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^2 \leq 4\Delta_0 f \Delta_0 \hat{f} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^2,$$

由此即得

$$\Delta_0 f \cdot \Delta_0 \hat{f} \geq \frac{1}{4}. \quad \square$$

例 10.2.10 (高斯函数的海森伯不等式) 对高斯函数族 $f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \cdot e^{-x^2/(4\sigma^2)}$ ($\sigma > 0$), 验证海森伯不等式

$$\Delta_0 f \cdot \Delta_0 \hat{f} \geq \frac{1}{4}.$$

解 利用例 10.2.7 的结论, 可得

$$\hat{f} = (8\pi\sigma^2)^{1/4} e^{-\sigma^2\lambda^2}.$$

直接计算, 可得(第 13 题)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = 1,$$

$$\Delta_0 f = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \sigma^2,$$

$$\Delta_0 \hat{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{4\sigma^2}.$$

于是, 有 $\Delta_0 f \cdot \Delta_0 \hat{f} = \frac{1}{4}$, 即高斯函数使得海森伯不等式取到等号. □

图 10.30 和 10.31 分别对不同的 σ 值画出了高斯函数及其傅里叶变换的图像. 由函数的图像可以发现, 当 σ 递减到 0 时, 高斯函数的图像越来越集中于 0 点

附近,而其傅里叶变换的图像则越来越散开;当 σ 的值增加时,高斯函数的图像越来越散开,而其傅里叶变换的图像则越来越集中于0点附近.这说明我们不可能同时精确确定一个函数及其傅里叶变换,这正是海森伯不等式所断言的.

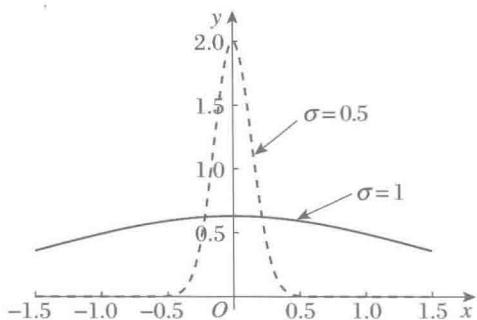


图 10.30 高斯函数的图像($\sigma=0.5,1$)

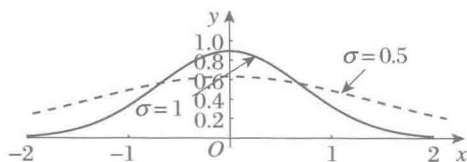


图 10.31 高斯函数的傅里叶变换的图像($\sigma=0.5,1$)

习题 10.2

1. 利用傅里叶积分表示下列函数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ kx, & 0 \leq x < T, \\ 0, & x \geq T; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0);$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = e^{-|x|}.$$

2. 考察部分傅里叶积分

$$S_\nu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\nu \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda \quad (\nu > 0)$$

的收敛性,以及它对应的吉布斯现象.

3. 求下列函数的傅里叶变换:

$$(1) f(x) = xe^{-a|x|} \quad (a > 0);$$

$$(2) f(x) = e^{-a|x|} \cos bx \quad (a > 0);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi/2, \\ 0, & |x| \geq \pi/2; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

4. 按指定要求将函数 $f(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < +\infty)$ 表示成傅里叶积分:

(1) 用偶性开拓;

(2) 用奇性开拓.

5. 计算函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$ 的傅里叶余弦变换.

6. 证明傅里叶变换的本函数微分法和像函数微分法.

7. (傅里叶变换的伸缩性)对 $\forall a \neq 0$, 证明:

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{\lambda}{a}\right).$$

8. 证明: 函数的卷积满足交换律、结合律以及对加法的分配律.

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在整个实数轴上绝对可积. 证明: 卷积 $f * g$ 也在整个实数轴上绝对可积.

10. 考察函数 $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x+t)dt$ 的傅里叶变换, 由此证明巴塞瓦尔等式.

11. 求解下面的热传导方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

12. (波动方程的达朗贝尔公式)(1) 直接验证函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds$$

满足一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

(2) 利用傅里叶变换, 推导波动方程的达朗贝尔公式.

13. 对高斯函数族 $f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/(4\sigma^2)}$ ($\sigma > 0$), 计算:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda, \Delta_0 f, \Delta_0 \hat{f},$$

进而验证海森伯不等式.

复 习

本章主要内容

1. 三角函数的正交性、周期函数的傅里叶级数展开、欧拉-傅里叶公式、傅里叶级数的

收敛性;

2. 奇、偶周期函数, 傅里叶正弦级数与余弦级数, 周期开拓、奇性开拓与偶性开拓;
3. 贝塞尔不等式与巴塞瓦尔等式;
4. 傅里叶级数的应用: 计算数项级数的和, 求解微分方程;
5. 傅里叶积分表示及其收敛性;
6. 傅里叶变换及其性质: 线性性、频移特性、时移特性、本函数微分法、像函数微分法、卷积的傅里叶变换以及巴塞瓦尔等式;
7. 傅里叶变换的应用: 求解微分、积分方程, 验证海森伯测不准原理.

复习思考题

1. 周期函数是否一定具有一个最小正周期? 如果一个连续的周期函数没有最小正周期, 那么它一定是常值函数吗?
2. 是不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

都是某个周期函数的傅里叶级数? 试给出它成为傅里叶级数的一个充分条件.

3. 傅里叶系数的计算公式与线性代数中任意向量按照一组正交基展开的系数计算公式有何关系?
4. 周期函数对应的傅里叶级数是否一定收敛? 如果收敛, 是否一定收敛到函数本身?
5. 傅里叶正弦级数和傅里叶余弦级数与被展开的函数的奇偶性有什么关系?
6. 如何将只定义在有限区间上的函数开拓为一个周期函数? 开拓后的函数的傅里叶级数有何特点?
7. 如何理解贝塞尔不等式和巴塞瓦尔等式?
8. 为什么傅里叶级数逐项积分的条件比一般函数项级数逐项积分的条件弱?
9. 傅里叶级数有哪些应用?
10. 傅里叶积分与傅里叶级数有何联系? 两者之间又有何区别?
11. 傅里叶变换有哪些性质? 傅里叶变换有哪些应用?

复习题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - 1)x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(\pi - x), & 1 < x \leq \pi. \end{cases}$ 试将函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展成傅里

叶正弦级数, 并由此证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = \frac{\pi-1}{2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi \leq x \leq 0, \\ bx, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$ 试将函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上展成傅里叶级

数, 并由此证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ($a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$).

3. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ 的傅里叶变换.

4. 对所有 $x \neq m\pi$ (m 为整数), 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx \neq 0$, 进而说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 发散.

5. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在区间 $\left[0.2, \frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛, 但在此区间上不能逐项微分.

6. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ 在区间 $[0.1, 6]$ 上一致收敛, 但在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处, 该级数不是绝对收敛的.

附录 外微分形式

A.1 外积和外微分形式

场论中我们讨论了梯度、旋度和散度. 从数学上来看, 这三个“度”是怎样产生的? 它们的意义如何? 还有没有其他“度”呢? 此外, 还有联系线积分、面积分和体积分的三个公式, 即格林公式、高斯公式以及斯托克斯公式, 这表面上看来很不相像的三个公式, 它们之间有没有什么联系? 本质是什么? 能不能统一? 在更高维空间是否也有类似的公式?

利用外微分形式就能回答上述问题.

设在微分 dx, dy 及 dz 之间定义一种外积运算, 用记号 \wedge 表示, 它满足下述法则: 两个相同微分的乘积为 0, 两个不同微分的乘积交换顺序时变号, 即

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \quad dz \wedge dx = -dx \wedge dz.$$

因此, 对微分进行外积类似于对向量进行向量积.

由微分的外积与函数组成的线性组合称为外微分形式. 例如, 若 P, Q, R, A, B, C, H 为 x, y, z 的函数, 那么 $Pdx + Qdy + Rdz$ 为一次外微分形式, $A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$ 为二次外微分形式, $H dx \wedge dy \wedge dz$ 为三次外微分形式, 而 P, Q, R, A, B, C, H 称为微分形式的系数, 特别称函数 f 为零次外微分形式.

对任意两个外微分形式 λ, μ 也可以定义外积 $\lambda \wedge \mu$, 只要对相应的各项外微分进行外积就行了.

可以验证外微分形式的外乘积满足分配律和结合律, 即若 λ, μ, ν 是任意三个外微分形式, 则有

$$(\lambda + \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge \nu + \mu \wedge \nu,$$

$$\lambda \wedge (\mu + \nu) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \nu,$$

$$(\lambda \wedge \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge (\mu \wedge \nu).$$

但外微分形式的外积不满足交换律,可以验证若 λ 是 p 次外微分形式, μ 是 q 次外微分形式,则

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{pq} \mu \wedge \lambda.$$

A.2 外微分运算

对外微分形式 ω 可以引进外微分运算,用 d 表示,也称 d 为外微分算子.对于零次外微分形式,即函数 f ,定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

这就是通常的全微分运算.

对于一次外微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$,定义

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz,$$

即对系数 P, Q, R 求外微分后,再分别与 dx, dy, dz 作外积.为计算出它的最终形式,将全微分 dP, dQ, dR 的表达式代入,有

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz. \end{aligned}$$

利用外积的运算法则,计算得

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

对于二次外微分形式 $\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$,定义

$$d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy.$$

将系数 A, B, C 的外微分代入,利用外积的运算法则,计算得

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

对于三次外微分形式 $\omega = H dx \wedge dy \wedge dz$,定义

$$d\omega = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz,$$

在三维空间中,将系数 H 的外微分代入,利用外积的运算法则,计算得

$$d\omega = 0.$$

对于一次、二次、三次外微分形式 ω , 可直接验证外微分运算有如下重要的性质:

命题 A. 2. 1 若 ω 是一外微分形式, 且其系数具有连续的二阶偏微商, 则有

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

设 V 为空间区域. 如果存在一点 $M_0 \in V$, 满足对 $\forall M \in V$, 连接 M_0 和 M 的直线段都包含在 V 中, 则称 V 为星型区域.

定理 A. 2. 1 (庞加莱引理) 设 ω 是定义在星型区域上的一个 p 次外微分形式, 且 $d\omega = 0$, 则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 α , 使得 $\omega = d\alpha$.

注 A. 2. 1 (1) 如果对定义域不作任何限制, 庞加莱引理是不成立的. 反过来说, 如果在某个域或几何体上庞加莱引理不成立, 这恰恰反映了该几何体的某些几何性质. 感兴趣的同学可翻阅代数拓扑学的相关教材.

(2) 为了叙述简洁, 我们假设了区域是星型的. 事实上, 针对不同的 p , 可以有更弱的条件. 例如, $p=1$ 时, 只要 V 是曲面单连通的, $p=2$ 时, 只要 V 是空间单连通的即可.

A. 3 梯度、旋度与散度的数学意义

利用外微分形式这一工具, 我们来回答附录开始时提出的问题.

首先来看看梯度、旋度与散度在外微分形式下的意义.

对于零次外微分形式 $\omega = f$, 它的外微分为

$$d\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

而函数 f 的梯度为

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

因此, 梯度与零次外微分形式的外微分相当.

对于一次外微分形式 $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz$, 它的外微分为

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy, \end{aligned}$$

而向量场 $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 的旋度为

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

因此,旋度与一次外微分形式的外微分相当.

对于二次外微分形式 $\omega_2 = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$, 它的外微分为

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

而向量场 $\mathbf{v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ 的散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

因此,散度与二次外微分形式的外微分相当.

从这个观点来看,还有没有可能产生具有这种性质的其他“度”呢?很明显,在三维空间中这是不可能的.因为在三维空间中,三次外微分形式的外微分为零,所以不可能再有与之相当的“度”.从而从这个观点来看,在三维空间中只能有这三个度:梯度、旋度与散度.

外微分的重要性质 $dd\omega = 0$ 也有场论意义.当 ω 为零次外微分形式,即 $\omega = f$ 时, $ddf = 0$ 就是

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0},$$

即 f 的梯度场必为无旋场.

当 ω 为一次外微分形式,即 $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz$ 时,而向量场 $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, $dd\omega_1 = 0$ 就是

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

即 \mathbf{v} 的旋度场必为无源场.

同样,庞加莱引理也有场论意义.当 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 为一次外微分形式时,若 $d\omega = 0$,则在适当的条件下有 $\omega = df$ (f 是零次外微分形式),即无旋场 $\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 为有势场, f 是无旋场 \mathbf{v} 的势函数.

当 $\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$ 为二次外微分形式时,若 $d\omega = 0$,则在适当的条件下有 $\omega = d\alpha$, $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ 是一次外微分形式,即无源场 $\mathbf{v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ 有向量势, $\mathbf{u} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ 是无源场 \mathbf{v} 的一个向量势.

A. 4 多变量微积分的基本定理(一般的斯托克斯公式)

利用外微分形式这一工具,我们就可以将格林公式、高斯公式和斯托克斯公式统一为一个公式.

先看格林公式

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

如果记 $\omega_1 = Pdx + Qdy$, 则 ω_1 为一次外微分形式,于是它的外微分为 $d\omega_1 =$

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$. 由于曲线积分的曲线 L 是定向的, 所以格林公式可以写成

$$\oint_{\partial D'} \omega_1 = \iint_D d\omega_1.$$

对高斯公式

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx dy dz,$$

如果记 $\omega_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, 则 ω_2 为二次外微分形式, 于是它的外微分为

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

由于曲面积分的曲面 S 是定向的, 所以高斯公式可以写成

$$\iint_{\partial V'} \omega_2 = \iiint_V d\omega_2.$$

对斯托克斯公式

$$\begin{aligned} & \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy, \end{aligned}$$

如果记 $\omega_3 = Pdx + Qdy + Rdz$, 则 ω_3 为一次外微分形式, 于是它的外微分为

$$d\omega_3 = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

由于曲线积分的曲线 L 是定向的, 曲面积分的曲面 S 是定向的, 所以斯托克斯公式可以写成

$$\int_{\partial S'} \omega_3 = \iint_S d\omega_3.$$

从上面可看出, 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式可以统一为一个公式, 即

$$\int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega,$$

这里 ω 为外微分形式, $d\omega$ 为 ω 的外微分运算, Ω 为 $d\omega$ 的积分区域, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, \int 表示重积分, 其重数与区域的维数相等. 称此公式为一般的斯托克斯公式.

从这里可看出, 除了格林公式、高斯公式和斯托克斯公式以外, 联系区域与其边界的积分公式不会再有了, 因为三维空间中三次外微分形式的外微分为零.

公式

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_a^b d\omega$$

当然可以推广到更高维的空间中去.

在一维空间中, Ω 为直线段 $[a, b]$ 时, 它的边界 $\partial\Omega$ 就是端点 a 和 b , $\omega = f$, $d\omega$ 就是 $\frac{df(x)}{dx} dx$, 此时, 上面的公式变为

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a),$$

这就是微积分基本定理——牛顿-莱布尼茨公式, 因此, 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式就是三维空间中的牛顿-莱布尼茨公式.

参 考 答 案

习题 6.1

4. (1) $|x| \leq 1$, 闭区域;

(2) $(2k\pi)^2 \leq x^2 + y^2 \leq [(2k+1)\pi]^2$ ($k \in \mathbb{Z}$), 不是区域;

(3) $(x-1)^2 + y^2 < 1$, 区域;

(4) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, 区域;

(5) $x^2 + y^2 \leq z^2$ 且 $z \neq 0$, 不是区域;

(6) $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2$, 闭区域.

5. $f(x, y) = \frac{(1-y)x^2}{1+y}$.

6.
$$F(t) = \begin{cases} 1, & 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq t \leq (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, \\ 0, & (2k-1)\pi + \frac{\pi}{4} < t < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

7. $(x+y)^{x-y}, x^y + x - y, x + y - x^y$.

8. (1) 0; (2) a ; (3) 0; (4) e ; (5) 0; (6) 0; (7) 0; (8) $\ln 2$;

(9) 2; (10) 不存在; (11) 不存在; (12) 不存在.

9. (1) $k\pi + \frac{\pi}{4} < \varphi < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ($k=0, 1$);

(2) $k\pi + \frac{\pi}{4} < \varphi < k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ($k=0, 1$) 或 $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$).

11. (1) 直线 $x+y=0$ 上的点为不连续点, 其他点为连续点;

(2) x 轴上除去原点外的点为不连续点, 其他点为连续点;

(3) 全平面上点点连续;

(4) 直线 $x+y=0$ 上的点为不连续点, 其他点为连续点.

习题 6.2

2. (1) $\frac{2}{5}$; (2) -2π ; (3) $-\frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$, $-\frac{x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$;
- (4) $\frac{y^2+2y}{\sqrt{1+(y^2+y)^2}}$, $\frac{1+2y}{\sqrt{1+(y^2+y)^2}}$.
3. (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y^3}\right)$;
- (2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}3^{\frac{x}{y}}\ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}3^{\frac{x}{y}}\ln 3$;
- (3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$;
- (4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$;
- (5) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$;
- (6) $\frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$;
- (7) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;
- (8) $\frac{\partial u}{\partial x} = yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \ln xy$;
- (9) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z} \ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z} \ln x \ln y$;
- (10) $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-z} + \frac{1}{x+\ln y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y(x+\ln y)}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -xe^{-z} + 1$.
3. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\sin x^2 y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x^2 y}{y}$.
5. $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0)$ 不存在.
7. $\frac{\pi}{4}$.
8. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$.
9. (1) $dz = -0.2$, $\Delta z \approx -0.20404$;
- (2) $dz = 0.25e$, $\Delta z \approx 0.82481$;
- (3) $dz = 0.04$, $\Delta z \approx 0.04306$.

10. (1) $dz|_{(0,0)} = 0, dz|_{(1,1)} = -4dx - 4dy$;
 (2) $dz|_{(1,0)} = 0, dz|_{(0,1)} = dx$.
11. (1) $\frac{2}{x^2 + y^2}(x dx + y dy)$; (2) $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}(-y dx + x dy)$;
 (3) $\frac{2}{(s-t)^2}(s dt - t ds)$; (4) $\frac{1}{x^2 + y^2}(x dy - y dx)$;
 (5) $(x dy + y dx) \cos xy$; (6) $x^{yz-1}(yz dx + zx \ln x dy + xy \ln x dz)$.
15. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$;
 (2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$;
 (3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 + (x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2}$;
 (4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax + by), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos 2(ax + by),$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax + by)$;
 (5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(\ln y - 1) \ln y}{x^2} e^{\ln x \ln y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} e^{\ln x \ln y},$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2} e^{\ln x \ln y}$;
 (6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{(1 - x^2 y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 - x^2 y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3 y}{(1 - x^2 y^2)^{3/2}}.$
16. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (x^2 y^2 z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = (x^2 y z^3 + 2xz^2)e^{xyz}.$
19. $r.$

习题 6.3

1. (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} \left[e^{x^y} + \frac{2x^y}{1 + (1 + x^{2y})^2} \right], \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x \left[e^{x^y} + \frac{2x^y}{1 + (1 + x^{2y})^2} \right];$
 (2) $\frac{\partial u}{\partial r} = e^{r^{s+2}} r^{s+1} (s+2), \frac{\partial u}{\partial s} = e^{r^{s+2}} r^{s+2} \ln r;$
 (3) $\frac{du}{dx} = e^{ax} \sin x;$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 2(\varphi + \theta \tan \varphi \sec^2 \varphi \theta), \frac{\partial u}{\partial \theta} = 2(\theta + \varphi \tan \varphi \sec^2 \varphi \theta).$$

$$2. (1) \frac{du}{dt} = 3t^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4t \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$(2) \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos t - \frac{\partial f}{\partial y} \sin t + \frac{\partial f}{\partial z} e^t;$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4xyf''_{11} + 2e^{xy}(x^2 - y^2)f''_{12} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}(1 + xy)f''_2;$$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + 2xf'_2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + 4xf''_{12} + 4x^2f''_{22} + 2f''_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + 2(x + y)f''_{12} + 4xyf''_{22};$$

$$(5) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^3}f''_{11} + \frac{1}{yz}f''_{12} - \frac{1}{y^2}f'_1, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{x}{y^2 z^2}f'''_{112} - \frac{1}{z^3}f'''_{122};$$

$$(6) \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, \frac{\partial u}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3, \frac{\partial u}{\partial z} = xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + 2yf''_{12} + 2yzf''_{13} + y^2f''_{22} + 2y^2zf''_{23} + y^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2f''_{22} + 2x^2zf''_{23} + x^2z^2f''_{33}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2y^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'_2 + zf'_3 + xf''_{12} + xzf''_{13} + xyf''_{22} + 2xyzf''_{23} + xyz^2f''_{33}.$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)(y\varphi'_1 + \varphi'_2), \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)(x\varphi'_1 + \varphi'_2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''(t)[xy(\varphi'_1)^2 + (x + y)\varphi'_1\varphi'_2 + (\varphi'_2)^2]$$

$$+ f'(t)[\varphi'_1 + xy\varphi''_{11} + (x + y)\varphi''_{12} + \varphi''_{22}].$$

10. $a = 3.$

12. $z(x, y) = x^2y + y^2 + 1 - 2x^4.$

13. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}.$

14. $u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x, u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x.$

15. (1) $du = f'(t)(dx + dy);$

$$(2) du = \left(yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 \right) dx + \left(xf'_1 - \frac{x}{y^2}f'_2 \right) dy;$$

$$(3) du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3) dt;$$

$$(4) du = 2(xf'_1 + xf'_2 + yf'_3) dx + 2(yf'_1 - yf'_2 + xf'_3) dy.$$

习题 6.4

$$2. (1) \frac{dy}{dx} = \frac{y(2x + e^{xy} - \cos xy)}{x(\cos xy - e^{xy} - x)};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3};$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2[x(\ln y - 1)^2 + 2(x-y)(\ln x - 1)(\ln y - 1) - y(\ln x - 1)^2]}{x^4(\ln y - 1)^3};$$

$$(4) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}, \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2 e^{-xy}[(e^z - 2)^2 + e^z e^{-xy}]}{(e^z - 2)^3};$$

$$(5) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}, \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z(z^2 - 2z + 2)}{x^2(z-1)^3};$$

$$(6) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(x+z)}, \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{z}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3};$$

$$(7) \frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1 + \frac{F'_1 + F'_2}{F'_3}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F'_2}{F'_3}\right);$$

$$(8) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{zF'_1}{xF'_1 + yF'_2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{zF'_2}{xF'_1 + yF'_2}.$$

$$4. (1) dz = -\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x dx + \sin 2y dy);$$

$$(2) dz = -\frac{(1-yz)dx + (1-xz)dy}{1-xy};$$

$$(3) du = -\frac{u^2(dx+dy) - z^2 dz}{u[2(x+y) - u]};$$

$$(4) dz = \frac{(F'_1 - F'_3)dx + (F'_2 - F'_1)dy}{F'_2 - F'_3}.$$

$$8. \frac{dz}{dx} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y}, \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^3}.$$

9. 0.

$$10. (1) \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y};$$

- (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} / \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \frac{dz}{dx} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} / \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$.
11. (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v-x}{u-v}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-u}{u-v}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v-y}{u-v}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-u}{u-v}$;
- (2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{uf'_1(1-2vyg'_2) - g'_1f'_2}{(1-xf'_1)(1-2vyg'_2) - g'_1f'_2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f'_2(1-2vyg'_2) + f'_2g'_2v^2}{(1-xf'_1)(1-2vyg'_2) - g'_1f'_2}$.
12. (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial v} / \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial u} / \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$;
- $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial v} / \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} / \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$;
- (2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$;
- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{ue^u(\sin v - \cos v) + u}$.
13. $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi_3} (2x\varphi'_1 + e^{\sin x} \cos x \cdot \varphi'_2)$.
14. $\frac{dz}{dx} = \frac{F'_2 f(x+y) + xF'_2 f'(x+y) - F'_1 x f'(x+y)}{F'_2 + xF'_3 f'(x+y)}$.
15. $du = \frac{(F'_4 G'_1 - F'_1 G'_4)dx + (F'_4 G'_2 - F'_2 G'_4)dy}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}$;
- $dv = \frac{(F'_1 G'_3 - F'_3 G'_1)dx + (F'_2 G'_3 - F'_3 G'_2)dy}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}$.
16. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)} / \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}$.
17. $y'(0) = 0, y''(0) = 16, z'(0) = 1, z''(0) = 8$.

习题 6.5

1. (1) $\Delta f = 15h^2 - 6hk + k^2 + h^3$;
- (2) $\Delta f = h - 3k + (-h^2 - 2hk + k^2) + (h^2 k + hk^2)$.
2. $f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.
3. (1) $f(x, y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2 y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3$;
- (2) $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + R_2$;
- (3) $f(x, y) = 1 + (x+y) + \dots + \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} + R_n$;

- (4) $f(x, y) = 1 + (x + y) + \frac{1}{2!}(x^2 + y^2 + 2xy) + \dots$
 $\quad + \frac{1}{n!}(x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + y^n) + R_n;$
- (5) $f(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (x^2 + y^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2};$
- (6) $f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$
 $\quad - \frac{1}{4}\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2\right] + R_2;$
- (7) $f(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2.$
4. $z = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + R_2.$
6. (1) 极大值 $f(2, -2) = 8;$
 (2) 极小值 $f(5, 2) = 30;$
 (3) 极小值 $f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2};$
 (4) 无极值.
7. (1) 函数 $y = y(x)$ 在 $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a, \sqrt{\frac{1}{8}}a\right)$ 附近有极大值 $\sqrt{\frac{1}{8}}a$, 在
 $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a, -\sqrt{\frac{1}{8}}a\right)$ 附近有极小值 $-\sqrt{\frac{1}{8}}a;$
 (2) 极大值 $z\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{8}{7}$, 极小值 $z(-2, 0) = 1;$
 (3) 极大值 $z(1, -1) = 6$, 极小值 $z(1, -1) = -2.$
8. (1) 极小值 $u\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$
 (2) 极小值 $u(3, 3, 3) = 9;$
 (3) 极大值 $u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8};$
 (4) 当有两个变量等于 $\frac{1}{\sqrt{6}}$, 第三个变量等于 $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时, 有极小值 $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, 当有两个
 变量等于 $-\frac{1}{\sqrt{6}}$, 第三个变量等于 $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时, 有极大值 $\frac{1}{3\sqrt{6}}.$
9. (1) 最大值 $f(2, 0) = f(-2, 0) = 4$, 最小值 $f(0, 2) = f(0, -2) = -4;$
 (2) 最大值 $f(1, 0) = f(-1, 0) = f(0, -1) = f(0, 1) = 1$, 最小值 $f(0, 0) = 0;$
 (3) 最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 最小值 $0;$

- (4) 最大值 $f(2,1)=4$, 最小值 $f(4,2)=-64$.
10. $(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26})$.
11. 竖坐标为最大值的点为 $(0, -\sqrt{2}, 4)$ 和 $(0, \sqrt{2}, 4)$, 竖坐标为最小值的点为 $(-\sqrt{2}, 0, 2)$ 和 $(\sqrt{2}, 0, 2)$.
14. a^3 .
15. $M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, 最小面积为 ab .
16. $x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $y_0 = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$.
17. $\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$.
18. 最远点 $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, 最近点 $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

习题 6.6

1. $\mathbf{r}'(t) = (a \cos t, a \sin t, 2bt)$, $\mathbf{r}''(t) = (-a \sin t, a \cos t, 2b)$.
5. 简单曲线, 光滑曲线; 切线: $\frac{x-\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{8}$, 法平面: $2x - 8y + 16z = 1$.
6. (1)
$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \\ y = \frac{b}{2}, \end{cases} \quad ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2);$$
- (2)
$$\begin{cases} 6x - 4z = 3\pi - 4, \\ y = 4, \end{cases} \quad 2x + 3z - \pi - 3 = 0.$$
7. (1) $a \sin v_0 x - a \cos v_0 y + u_0 z = au_0 v_0$,

$$\frac{x - u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0};$$
- (2) $bc \sin^2 \theta_0 \cos \varphi_0 (x - a \sin \theta_0 \cos \varphi_0) + ac \sin^2 \theta_0 \sin \varphi_0 (y - b \sin \theta_0 \sin \varphi_0) + ab \sin \theta_0 \cos \theta_0 (z - c \cos \theta_0) = 0$.
8. (1) $17x + 11y + 5z = 60$, $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$;
- (2) $2x - 2y + 4z = \pi$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$;

$$(3) \quad x + 2y - 4 = 0, \begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}, \\ z = 0; \end{cases}$$

$$(4) \quad 5x + 4y + z - 28 = 0, \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}.$$

$$9. \quad x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

$$10. \quad (-3, -1, 3), \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

$$11. \quad x + 2z = 7 \text{ 和 } x + 4y + 6z = 21.$$

$$12. \quad a = -5, b = -2.$$

$$16. \quad (1) \quad x + y - 2 = 0, y = x; \quad (2) \quad x + 2y - 1 = 0, 2x - y - 2 = 0.$$

$$17. \quad (1) \quad \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}, 12x - 4y + 3z - 12 = 0;$$

$$(2) \quad \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}, 27x + 28y + 4z + 2 = 0.$$

第 6 章复习题

1. 当 $x \neq y$, 或 $x = y = 2k\pi$ (k 为整数) 时, $f(x, y)$ 连续, 在其他点间断.

$$3. \quad f'_x + f'_y \varphi'_x + f'_z h'_x + f'_z h'_y \varphi'_x.$$

$$8. \quad (1) \quad \text{极大值 } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$\text{极小值 } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}};$$

$$(2) \quad \text{极大值 } f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2};$$

$$(3) \quad \text{极大值 } u(\sqrt{3}a, \sqrt{3}a, \sqrt{3}a) = \frac{\sqrt{3}}{a},$$

$$\text{极小值 } u(-\sqrt{3}a, -\sqrt{3}a, -\sqrt{3}a) = -\frac{\sqrt{3}}{a};$$

$$9. \quad z_{\max} = z(-3, 4) = 125, z_{\min} = z(3, -4) = -75.$$

$$10. \quad \frac{\pi ab}{c} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

$$11. \quad \frac{7}{4\sqrt{2}}.$$

14. $x + y + z = \frac{a}{3}, V_{\max} = \frac{1}{162}a^3.$

习题 7.1

1. (1) $\int_a^b dx \int_c^{c+x} f(x, y) dy$ 或 $\int_c^{c+a} dy \int_a^b f(x, y) dx + \int_{c+a}^{c+b} dy \int_{y-c}^b f(x, y) dx;$

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ 或 $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(3) $\int_0^2 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ 或 $\int_0^2 dy \int_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx;$

(4) $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy,$
 或 $\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx.$

2. (1) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(2) $\int_0^4 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx;$

(3) $\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy;$

(4) $\int_0^1 dx \int_x^x f(x, y) dy.$

3. (1) $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx;$ (2) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx;$

(3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx;$ (4) $\int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx.$

4. (1) 0; (2) $2\frac{2}{3};$ (3) 0; (4) $\frac{2}{15}.$

5. (1) $\frac{3}{2};$ (2) $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}};$ (3) $(e-1)^2;$ (4) $\frac{\pi}{12};$ (5) -2; (6) $1\frac{11}{21};$

(7) $\frac{2}{3}a^3;$ (8) $a^2(7a-2);$ (9) $1-\sin 1;$ (10) $-\frac{\pi}{16};$ (11) $\frac{9}{4}.$

6. (1) $\frac{2\pi}{3};$ (2) $\frac{\pi}{2}(b^4-a^4);$ (3) $\frac{8}{9}\sqrt{2};$ (4) $\frac{8}{3}ab \arctan \frac{a}{b};$ (5) $\frac{3\pi}{16}.$

7. (1) $\frac{9}{8};$ (2) $\frac{1}{3}(a-b)(m-n);$ (3) $\frac{1}{6}(b^2-a^2)\ln \frac{d}{c};$ (4) $\frac{\pi}{4};$

- (5) $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$.
8. $f(0, 0)$.
9. (1) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) - \ln 2$; (2) $\frac{3}{8} \pi a^2$; (3) $\frac{1}{6} a^2$;
 (4) πa^2 ; (5) $\frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{m - k}{(m + 1)(k + 1)}$.
13. (1) 2π ; (2) 当 $\alpha > 2$ 时, $\frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}$, 当 $\alpha \leq 2$ 时, 发散; (3) $\frac{\pi}{2}$.

习题 7.2

1. (1) $-\frac{9}{8}$; (2) $\frac{1}{364}$; (3) $\frac{19}{18}$; (4) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$; (5) 0; (6) $\frac{1}{8} a^4$.
2. (1) $\frac{8}{9} a^2$; (2) $\frac{4}{15} \pi R^5$; (3) $\frac{\pi}{8}$; (4) $\frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1)$.
3. (1) $\frac{16\pi}{3}$; (2) $\frac{\pi}{6}$; (3) 0; (4) $\frac{1}{48}$; (5) $\frac{13}{4} \pi$; (6) $\frac{\pi}{10}$; (7) 16π ;
 (8) $\frac{\pi^2}{4} abc$; (9) 0.
4. (1) 12; (2) 3π ; (3) πa^3 ; (4) $\frac{2\pi}{3} (2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)$; (5) $\frac{3}{35}$;
 (6) $\frac{2}{3} (2 - \sqrt{2}) \pi abc$; (7) $\frac{\pi}{3} a^3$; (8) $\frac{8\pi}{5} abc$; (9) $\frac{1}{2}$; (10) $\frac{\pi^2}{4} abc$.
5. $\frac{6}{5}$.
6. $4\pi t^2 f(t^2)$.

习题 7.3

1. (1) $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$; (2) 5; (3) $a \ln(1 + \sqrt{2}) = a \ln \left(\tan \frac{3\pi}{8} \right)$; (4) $4a$; (5) $\sqrt{2}z$.
2. (1) $\frac{256}{15} a^3$; (2) $1 + \sqrt{2}$; (3) $\sqrt{5} \ln 2$; (4) $4\pi a \sqrt{a}$; (5) $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a$;
 (6) $\frac{2ka^2 \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$; (7) $\frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3$; (8) $2\sqrt{2}\pi^2 + \frac{3}{2}$; (9) $\frac{1}{3} [(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$;
 (10) $\frac{2\sqrt{2a^3}}{3}$; (11) $2\pi a^{2n+1}$; (12) $\frac{2\pi a^3}{3}$.

3. $\sqrt{3}(1 - e^{-t})$.

4. (1) $\sqrt{2}\pi$; (2) $2a^2$; (3) $\frac{\pi}{6}[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$;

(4) $4\pi R(R - \sqrt{R^2 - \rho^2})$; (5) $8a^2$; (6) $\frac{2}{3}\pi ab[(1 + c^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$;

(7) $\frac{16}{3}\pi a^2$; (8) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; (9) 8π ; (10) $\frac{\pi a^2}{2}$.

5. $\pi\left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}\right)$.

6. $a(\varphi_2 - \varphi_1)[b(\varphi_2 - \varphi_1) + a(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)]$, $4\pi^2 ab$.

7. (1) $\frac{8}{3}\pi R^4$; (2) πa^3 ; (3) 9 ; (4) $\frac{\sqrt{3}}{120}$; (5) $\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$;

(6) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$; (7) $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$; (8) $6\sqrt{61}$; (9) $2\pi \arctan \frac{H}{R}$;

(10) $\sqrt{2}\pi$.

习题 7.4

1. $\frac{2}{15}(1 + 6\sqrt{3})\pi$.

2. $\frac{\pi}{2}ab$.

3. $2\pi r(R - r)$.

4. 取圆盘中心为坐标原点, x 轴正向通过小圆的中心, 则 $x_G = \frac{-6a}{5(3\pi - 2)}$, $y_G = 0$.

5. 重心 $G\left(0, 0, \frac{4}{3\pi}R\right)$.

6. $b = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

7. $2k\pi(R^2 - r^2)$.

8. $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{3}{4}c$.

9. $x_G = y_G = 0$, $z_G = \frac{4}{5}a$.

10. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

11. $\frac{4}{9}MR^2$.

12. (1) $\frac{1}{12} ml^2, \frac{1}{3} ml^2$; (2) $\frac{1}{2} mR^2, \frac{1}{4} mR^2$; (3) $\frac{2}{5} mR^2, \frac{7}{5} mR^2$.

13. $\frac{8}{3} \pi \rho R^4$.

14. $F_x = 0, F_y = \frac{2k\rho m}{a}$.

15. 取圆心为坐标原点, 细棒在 z 轴的正方向上, 则

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -2\pi k\rho l \mu [1 + \sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{R^2 + (a+l)^2}].$$

16. 当质点在球壳内部时, 引力等于零; 当质点在球壳外部时, 则像把球壳质量集中于球心时一样.

习题 7.5

1. $-\frac{14}{15}$.

2. 3.

3. $\frac{4}{3}$.

4. 0.

5. 0.

6. $\frac{1}{2} k(a^2 - b^2)$.

7. 1.

8. $e(\sqrt{e}-1)$.

9. (1) $-2\sqrt{2}\pi$; (2) $-\pi$.

10. (1) -12 ; (2) 0 ; (3) $\frac{1}{2}\pi R^4$; (4) 0 ; (5) $\frac{4}{15}$; (6) $\frac{2}{3}$; (7) $\frac{\pi ma^2}{8}$.

11. (1) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (2) $3\pi a^2$.

习题 7.6

1. (1) $\frac{4}{3}\pi abc$; (2) $\frac{1}{3}R^3 h^2$; (3) $\frac{2}{105}\pi R^7$; (4) $\frac{1}{4}\pi$; (5) $\frac{1}{4}$; (6) 0 ;

(7) $\frac{2}{5}\pi a^5$; (8) $abc \left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c} \right]$.

2. $\frac{1}{3}abc(a^2+3)$.
3. (1) $\frac{12}{5}\pi R^5$; (2) $\frac{1}{8}$; (3) $4\pi abc$; (4) $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$;
 (5) $\frac{1}{2}$; (6) $\frac{\pi}{15}$; (7) $\frac{\pi}{2}a^4$; (8) $\frac{\pi}{2}$.
4. (1) $-4\pi km$; (2) 0; (3) $-2\pi km$.
8. (1) $-\frac{3}{2}$; (2) $-2\pi a(a+h)$; (3) $-\frac{9a^3}{2}$; (4) 0; (5) $\sqrt{3}\pi a^2$;
 (6) -24 .
9. $-\frac{\pi}{8}R^6$.
11. 0.

习题 7.7

1. (1) 0; (2) (3,4), 5, -5.
2. (1) 8; (2) $2x\sin y + 2y\sin xz - xysin z \cos \cos z$.
3. (1) $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$; (2) $4\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}$; (3) $\frac{2}{r}$; (4) 0; (5) $2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}$;
 (6) $3f(r) + f'(r)r$.
4. (1) $2xy^2(3y^2z^2 + 6x^2z^2 + x^2y^2)$; (2) $e^{x+y+z}(3xyz + 2xy + 2zx + 2yz)$.
5. (1) $-2(\boldsymbol{z}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{k})$; (2) $2ze^y\boldsymbol{j} - (1 + xe^y)\boldsymbol{k}$.
6. (1) $2\boldsymbol{\omega}$; (2) $\mathbf{0}$; (3) $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega})$; (4) $\mathbf{0}$.
7. (1) $\text{rot } F \neq 0$, 曲线积分与路径有关, $1, \frac{1}{3}, 0, -1$;
 (2) $\text{rot } F = 0$, 曲线积分与路径无关, 都等于 1.
8. (1) $-4a^2$; (2) $\frac{h^3}{3}$.
9. (1) $\varphi = x^2 \cos y + y^2 \cos x$; (2) $\varphi = x^2 yz + y^2 zx + z^2 xy$; (3) $\frac{1}{4}r^4$.
10. $\alpha = 1, \varphi = \frac{1}{3}x^3 + 5xy + 3xyz - 2y - 2z^2$.
11. (1) $u = x^3 + 3x^2y^2 - y^4 + c$; (2) $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + c$.
12. (1) 0; (2) $\frac{3}{2}$; (3) 9; (4) -49; (5) 2; (6) 0.

$$15. f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{5} x e^{-2x}.$$

$$16. (1) \alpha(x) = (1+x)\sin 2x, \beta(x) = 2\cos 2x; \quad (2) 8.$$

$$17. Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

$$18. (1) \frac{1}{2} x^2 y^2 + 2xy + (\cos x - 2\sin x)y = c;$$

$$(2) \text{积分因子 } \frac{1}{y^2}, \text{通积分为 } x^2 + y^2 = cy.$$

$$19. f(x) = e^x - e^{-x} - x^2, e^x \sin y + (e^x + e^{-x})y = c.$$

$$20. \lambda = -1, u(x, y) = -\arctan \frac{y}{x^2} + c.$$

$$21. (1) f(r)\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}; \quad (2) \mathbf{0};$$

$$(3) [2f(r) + rf'(r)]\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

第 7 章复习题

$$1. (1) \ln \frac{b+1}{a+1}; \quad (2) \ln 2.$$

$$2. 4\sin^4 1.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi x^4} - 1).$$

$$6. 2\pi.$$

$$7. \frac{\pi}{3}.$$

$$8. (1) f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x, g(x) = -\frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x;$$

$$(2) \frac{1}{4}(7e - e^{-1}).$$

$$9. (2) \varphi(x) = -x^2; \quad (3) 0.$$

$$10. \frac{3\sqrt{3}\pi a^2}{2}.$$

$$11. 100h.$$

$$12. 2\pi.$$

习题 8.1

$$2. (1) \text{收敛}, S = \frac{1}{2}; \quad (2) \text{收敛}, S = 1 - \sqrt{2}; \quad (3) \text{收敛}, S = \ln 2;$$

- (4) 收敛, $S=1$.
5. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 发散; (5) 收敛; (6) 发散;
 (7) 发散; (8) 发散; (9) 收敛; (10) 收敛; (11) 发散; (12) 收敛;
 (13) 收敛; (14) 当 $k>1$ 时收敛, 当 $k\leq 1$ 时发散; (15) 收敛;
 (16) 当 $0<a<1$ 时收敛, 当 $a\geq 1$ 时发散.
10. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛.
13. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛.
16. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 收敛.
21. $t_n = \frac{1}{10^{n-2}}, s_n = \frac{1}{10^{n-2}}$.

习题 8.2

2. (1) $I = (-1, 1], f(x) = 0$; (2) $I = (-\infty, +\infty), f(x) = 0$;
 (3) $I = (0, +\infty), f(x) = 0$; (4) $I = (-\infty, +\infty), f(x) = \sin \frac{x}{2}$.
3. (1) $(0, +\infty)$; (2) $(-e, e)$; (3) $[-1, 1]$; (4) $[0, +\infty)$;
 (5) $(0, +\infty)$; (6) $|x| > \frac{1}{2}$; (7) $(0, 6)$; (8) $(-1, 1)$.
4. (1) 一致收敛; (2) 一致收敛; (3) 非一致收敛; (4) 一致收敛;
 (5) 一致收敛; (6) 非一致收敛; (7) 一致收敛; (8) 一致收敛.
10. $-\frac{1}{4}, 1$.
11. $\frac{1}{2}$.

习题 8.3

1. (1) 2; (2) 1; (3) 1; (4) 4; (5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (6) $\max\{a, b\}$.
2. (1) $\arctan x, x \in [-1, 1]$; (2) $\frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1)$;
 (3) $\frac{2}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$; (4) $1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), x \in [-1, 1]$;
 (5) $e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt, x \in (-\infty, +\infty)$.
4. (1) $-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3, x \in (-\infty, +\infty)$;

$$(2) e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n! a^n}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, x \in (0, 2];$$

$$(4) \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$(5) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, x \in (-1, 1);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n, x \in (-6, -2);$$

$$(8) e^{\frac{\ln 3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\ln 3}{2} x\right)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$5. (1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; \quad (2) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad (4) x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)};$$

$$(5) x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots; \quad (6) x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots;$$

$$(7) 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots;$$

$$(8) 1 + tx + \frac{1}{2}(3t^2 - 1)x^2 + \frac{1}{2}(5t^3 - 3t^2)x^3 + \dots.$$

$$6. (1) c + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!n}, x \neq 0;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}, x \in (-\infty, +\infty).$$

习题 8.4

1. $e \approx 2.718282, \pi \approx 3.141593.$

2. 0.156, 0.309.

3. 2.9926.

4. $E = M + \varepsilon \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d}{dM} \sin^2 M + \dots.$

$$5. y = x + \frac{\alpha}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^2 + \dots$$

$$6. \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}$$

$$7. 0.5205.$$

$$8. (1) 3; (2) 8; (3) \ln 2.$$

$$9. y_0 = 0, y_1(x) = \frac{1}{3}x^3, y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7,$$

$$y_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

第 8 章复习题

1. 0.

2. 收敛.

3. 收敛.

4. (1) 发散; (2) 发散.

5. (1) 绝对收敛; (2) 条件收敛; (3) 条件收敛; (4) 条件收敛;

(5) 绝对收敛; (6) 条件收敛;

(7) 当 $|a| > 1$ 时绝对收敛, 当 $|a| = 1$ 时条件收敛, 当 $|a| < 1$ 时发散;

(8) 当 $a > e$ 时绝对收敛, 当 $1 < a \leq e$ 时条件收敛, 当 $0 < a \leq 1$ 时发散.

6. (1) 一致收敛; (2) 一致收敛; (3) 当 $q > p + 1 (p, q > 0)$ 时, 一致收敛.

$$11. (1) \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right); (2) \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; (3) 5e; (4) 1; (5) \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$12. (1) |x| > 1, \frac{x}{(x-1)^2}; (2) (-4, 2), \frac{3(x+4)}{(2-x)^3};$$

$$(3) (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}; (4) (-\infty, 0], \frac{x-1}{2(x+1)} \ln \frac{1+x}{2};$$

$$(5) (0, +\infty), x; (6) (0, +\infty), x^{-1/2};$$

$$(7) (-\infty, +\infty), \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x;$$

$$(8) (-\infty, +\infty), 1 - \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

$$13. (1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, [-1, 1];$$

$$(2) x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, [-1, 1];$$

$$(3) \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1} \frac{1}{2^{4n+2}}, [-2, 2];$$

$$(4) x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 - \frac{34}{945}x^{10} + \dots$$

$$14. (1) c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1};$$

$$(3) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$(4) 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$(6) 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n+1}}{2n+1} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2} \frac{\pi}{2}.$$

习题 9.1

6. (1) 收敛; (2) 发散; (3) 收敛; (4) 收敛; (5) 发散; (6) 发散;
 (7) 收敛; (8) 收敛; (9) 发散; (10) 收敛; (11) 收敛;
 (12) 发散; (13) 收敛; (14) 收敛; (15) 发散;
 (16) 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散; (17) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 收敛;
 (18) 当 $1 < \mu < 2$ 时, 收敛.
7. (1) 绝对收敛; (2) 条件收敛; (3) 条件收敛; (4) 绝对收敛.
8. (1) 0; (2) $(-1)^n n!$; (3) 0; (4) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.

习题 9.2

$$1. (1) 1; (2) \frac{\pi}{4}.$$

$$2. (1) \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx - (\sin \alpha e^{\alpha |\sin \alpha|} + \cos \alpha e^{\alpha |\cos \alpha|});$$

$$(2) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha} \right) \sin[\alpha(b+\alpha)] - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha} \right) \sin[\alpha(a+\alpha)];$$

$$(3) \frac{2}{\alpha} \ln(1+\alpha^2);$$

$$(4) \int_0^a [f'_1(u, v) - f'_2(u, v)] dx + f(2a, 0).$$

习题 9.3

- (1) 处处发散; (2) $u < -1$; (3) $u > 1$; (4) $u < 1$;
 (5) $0 < u < 3$; (6) $1 < u < 3$; (7) $x > 0$; (8) $x, y > 0$.
- (1) 一致收敛; (2) (a) 一致收敛, (b) 非一致收敛; (3) 非一致收敛;
 (4) 非一致收敛; (5) 一致收敛; (6) 一致收敛.
- (1) $\ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$; (2) $\ln(\alpha+1)$; (3) $\sqrt{\pi a}$; (4) $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$;
 (5) 当 $a \geq 0$ 时, $\frac{\pi}{2} \ln(1+a)$, 当 $a < 0$ 时, $-\frac{\pi}{2} \ln(1-a)$;
 (6) $\sqrt{\pi}(b-a)$.

习题 9.4

- (1) a ; (2) $-\sigma^2$; (3) 当 $a > b$ 时, $\frac{\pi}{2}$, 当 $a = b$ 时, $\frac{\pi}{4}$, 当 $a < b$ 时, 0 ;
 (4) $\frac{\pi}{2}$; (5) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$; (6) $\frac{\pi}{4}$.
- $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$.
- $\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \ln t dt$,
 $\frac{\partial B}{\partial y}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \ln(1-t) dt$.
- (1) $\frac{\pi}{8}$; (2) $\frac{a^4}{16}\pi$; (3) $\frac{3}{512}$; (4) $\frac{1}{m} B\left(\frac{n}{m}, q\right)$; (5) $\frac{1}{\sqrt{a}}$;
 (6) $\frac{\pi}{2 \cos \frac{\alpha\pi}{2}}$; (7) $\sqrt{2\pi}$; (8) $(b-a)p \frac{\pi}{\sin p\pi}$.
- $\frac{a^2}{2n} \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$.

第 9 章复习题

- (1) $\frac{1}{2} \arctan \alpha \ln(1+\alpha^2)$; (2) $\frac{\pi}{4}$; (3) $2a \ln 2$;

$$(4) \frac{1}{2} \ln \frac{m^2 + \beta^2}{m^2 + \alpha^2}; \quad (5) \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$9. (1) \frac{\pi}{4}; \quad (2) \frac{n!}{2}; \quad (3) \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2a^{2n-1}}; \quad (4) \frac{\pi^2}{4} \frac{\sin \frac{\pi a}{2}}{\cos^2 \frac{\pi a}{2}};$$

$$(5) 1; \quad (6) 1.$$

$$10. \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

$$11. \frac{a}{m} 2^{\frac{1}{m}-1} \Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{m}\right).$$

习题 10.1

$$1. (1) \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}, \text{处处收敛};$$

$$(2) \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \text{处处收敛};$$

$$(3) \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \text{处处收敛};$$

$$(4) \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} \cos nx, \text{处处收敛};$$

$$(5) \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1 + n^2} \cos nx + \left\{ \frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1 + n^2} + \frac{1}{n} [1 - (-1)^n] \right\} \sin nx \right), \text{在开区间 } (-\pi, \pi) \text{ 内收敛到函数本身, 当 } x = \pm \pi \text{ 时, 收敛到 } \frac{1 + e^{-\pi}}{2}.$$

$$7. (1) 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16n^2 - 1} \cos 2nx + \frac{4n}{16n^2 - 1} \sin 2nx \right), \text{在 } (0, \pi) \text{ 内收敛到函数本身};$$

$$(2) \frac{T}{6} - \frac{T}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{T}, \text{在 } (0, T) \text{ 内收敛到函数本身};$$

$$(3) 2 \sinh al \left[\frac{1}{2al} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2 + a^2 l^2} \left(al \cos \frac{n\pi x}{l} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right], \text{在 } (-l, l) \text{ 内收敛到函数本身};$$

$$(4) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ -1, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & x = \pm 1; \end{cases}$$

$$(5) \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1} \cos \frac{n\pi}{3}}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3}, \text{处处收敛.}$$

$$8. (1) 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

$$\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx \quad (0 \leq x \leq \pi);$$

$$(2) \frac{2}{3} \pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n^3} + (-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \right] \sin nx;$$

$$(3) \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l} \quad \left(0 \leq x < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x \leq l \right),$$

$$\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \left(0 < x < \frac{l}{2}, \frac{l}{2} < x < l \right);$$

$$(4) \frac{h}{\pi} + \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2nh}{n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

$$\frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh - \sin 2nh}{n^2} \sin nx \quad (0 < x \leq \pi).$$

$$11. (1) \frac{\pi^2}{12}; \quad (2) \frac{\pi^4}{90}.$$

$$12. \operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (0 < |x| < \pi); \quad \frac{\pi}{4}.$$

$$13. \frac{H\tau}{T} + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi\tau}{T} \cos \frac{2k\pi x}{T} \quad \left(-\frac{T}{2} \leq x < -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \leq x < \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} < x \leq \frac{T}{2} \right).$$

$$17. \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin na \cos nx; (1) \frac{a(\pi-a)}{2}, (2) \frac{\pi^2 - 3\pi a + 3a^2}{6}.$$

习题 10.2

$$1. (1) \int_0^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = \begin{cases} f(x), & x \neq T, \\ \frac{kT}{2}, & x = T, \end{cases} \text{其中 } A(\lambda) =$$

$$\frac{k}{\pi\lambda^2} (\lambda T \sin \lambda T + \cos \lambda T - 1), B(\lambda) = \frac{k}{\pi\lambda^2} (\sin \lambda T - \lambda T \cos \lambda T);$$

$$(2) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} (1 - \cos \lambda) \sin \lambda x d\lambda;$$

$$(3) \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda;$$

$$(4) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\lambda} - \frac{\cos \frac{\pi\lambda}{2}}{1 - \lambda^2} \cos \lambda x \right] d\lambda;$$

$$(5) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$$

$$3. (1) \frac{4ia\lambda}{(a^2 + \lambda^2)^2}; \quad (2) \frac{a}{(\lambda - b)^2 + a^2} + \frac{a}{(\lambda + b)^2 + a^2};$$

$$(3) \frac{2\cos \frac{\lambda\pi}{2}}{1 - \lambda^2}; \quad (4) \frac{2(1 - \cos \lambda)}{\lambda^2}.$$

$$4. (1) \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi(1 + \lambda^2)} \cos \lambda x d\lambda; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{2\lambda}{\pi(1 + \lambda^2)} \sin \lambda x d\lambda.$$

$$5. \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

$$11. \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2(1+t)/4} e^{-\lambda x} d\lambda.$$

$$13. 1, 1, \sigma^2, \frac{1}{4\sigma^2}.$$

第 10 章复习题

$$3. -\frac{2\sin \lambda\pi}{\lambda^2 - 1}.$$

索 引

- 阿贝尔分部求和公式 203
阿贝尔判别法 204, 220, 258, 271
- 巴塞瓦尔等式 311
保守场 171
贝塞尔不等式 311
被积表达式 73
被积函数 73
本函数 327
本函数微分法 330
比较判别法 194, 254
闭集 2
闭区域 4
边界点 2
波动方程 28
博内公式 257
- 参数方程 57
凑微分法 29
- 达朗贝尔比值判别法 196
单连通区域 136
单射 5
狄利克雷判别法 204, 220, 258, 271
狄利克雷收敛定理 300
- 第二型曲面积分 148
第二型曲线积分 133
第二积分中值定理 257
第一型曲面积分 120
第一型曲线积分 113
多连通区域 136
- 二元函数 5
二重积分 71, 73
二重极限 6
- 反演公式 327
傅里叶变换 327
傅里叶积分 324
傅里叶积分表示 324
傅里叶级数 296
傅里叶逆变换 327
傅里叶系数 296
傅里叶余弦变换 328
傅里叶余弦级数 304
傅里叶正弦变换 328
傅里叶正弦级数 304
- 概率积分 88
孤立点 3

- 光滑曲面 60
- 哈密顿算符 180
- 含参变量常义积分 264
- 含参变量广义积分 264
- 含参变量积分 253
- 函数列 214
- 函数项级数 214, 217
- 黑塞矩阵 43
- 弧长 110
- 弧长微元 58
- 奇性开拓 308
- 积分区间 73
- 吉布斯现象 301
- 极限 4, 6
- 极限函数 214
- 极值点 44
- 交错级数 200
- 聚点 3
- 卷积 330
- 绝对收敛 206
- 绝对值级数 206
- 均方收敛 311
- 开集 2
- 柯西乘积 210
- 柯西点列 4
- 柯西根值判别法 196
- 柯西积分判别法 198
- 柯西收敛准则 202, 254
- 空间单连通 178
- 拉格朗日乘法 51
- 拉格朗日型余项 42
- 拉普拉斯方程 25
- 莱布尼茨判别法 200
- 勒让德加倍公式 286
- 累次极限 11
- 黎曼可积 72
- 连通 4
- 连续 7
- 邻域 1
- 麦克劳林公式 42
- 麦克劳林级数 236
- 麦克劳林展开式 236
- 满射 5
- 面积 73
- 面积元 73
- 内闭一致收敛 232
- 内点 2
- 逆映射 5
- 欧拉-傅里叶公式 297
- 欧拉函数 284
- 欧拉积分 284
- 偶性开拓 310
- 皮卡定理 245
- 皮卡逐次逼近法 244
- 偏导数 13
- 频移特性 330
- 区域 4
- 曲面单连通 175

- 全微分 14
- 三重积分 96
- 三角函数系 296
- 散度 167
- 时移特性 330
- 势函数 172
- 收敛 4,191
- 收敛半径 230
- 收敛点 214
- 收敛区间 230
- 收敛域 214
- 数项级数 190
- 泰勒公式 42
- 泰勒级数 236
- 泰勒展开式 236
- 梯度 164
- 梯度场 172
- 条件极值问题 50
- 条件收敛 206
- 调和函数 25
- 通项 190
- 凸区域 41
- 外点 2
- 微分 12
- 维尔布拉汉姆-吉布斯现象 301
- 魏尔斯特拉斯判别法 203,219
- 无穷积分 92
- 无穷级数 190
- 无源场 177
- 瑕点 91
- 瑕积分 91
- 向径式方程 57
- 向量势 178
- 像函数 327
- 像函数微分法 330
- 旋度 170
- 雅可比矩阵 15
- 一一映射 5
- 一致收敛 215,271
- 隐函数 32
- 隐式曲面 63
- 映射 5
- 有界点列 4
- 有界集 4
- 有界判别法 193,254
- 有势场 172
- 余元公式 287
- 正交性 296
- 正项级数 193
- 逐点收敛 215
- 逐段光滑 301
- 驻点 44
- B 函数 284
- Γ 函数 284



微积分学导论 (下册)

第2版

Introduction to Calculus

选题编辑 孔庆勇

责任编辑 郭红建

封面设计 广大迅风艺术 

定价：45.00 元

ISBN 978-7-312-03869-3



9 787312 038693 >

上架建议：数学类