第六周作业

助教-夏小凡

2024 年 4 月 10 日

题目 1: 习题 4.1

解答:题目的意思是说，一天刚开始的时候先进货，然后卖货 [不妨假设需求量为 Y_n]，因此供应量的改变应该包括这两个部分，注意题目说的是如果你存货不足，顾客就不买货了，我们有

$$X_n = \max X_{n-1} - Y_n, if \quad X_{n-1} \geq s$$

$$X_n = \max X - Y_n, if \quad X_{n-1} < s$$

$$P(Y_n = j) = a_j$$

根据这个式子分类讨论可以得到结论 [分类讨论补不补货和存货够不够，共四种情况]

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = a_{x_{n-1}-x_n}, X_{n-1} \geq s, X_n < X_{n-1}$$

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = a_{S-x_n}, X_{n-1} < s, X_n < S$$

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = \sum_{j > X_{n-1}} a_j, X_{n-1} = X_n \geq s$$

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) = \sum_{j > S} a_j, X_{n-1} < s, X_n = S$$

我没列出来的情况转移概率都是 0

题目 1 的注记:思路并不难，可以对答案看看自己漏没漏情况。当然我觉得这题离散连续没说清，比较怪

题目 2: 习题 4.2

解答:

$$P(X_n = j|X_{n_1} = i_1, \cdots, X_{n_k} = i_k)$$

$$= \sum_{a_1,\cdots,a_s} P(X_n = j, X_{n-1} = a_1, \cdots, X_{n_k+1} = a_s|X_{n_1} = i_1, \cdots, X_{n_k} = i_k)$$

$$= \sum_{a_1,\cdots,a_s} P(X_n = j, X_{n-1} = a_1, \cdots, X_{n_k+1} = a_s|X_{n_k} = i_k)$$

$$= RHS$$

题目 3: 习题 4.3

解答:任取一条路径，不妨记为

$$i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_s \to j$$

若存在 $i_m = i_m + t$

则把 $i_m \sim i_{m+t}$ 这段路径换为 i_m, 也会是一个可行路径，以此类推去掉所有重复的，最后中间的剩余节点自然至多有 n-2 个。[因为中间的状态不能是 i 和 j，也不能重复]

题目 3 的注记:感觉像数据结构的某些最小路算法，遇到环就去掉

题目 4: 习题 4.4

解答:

$$LHS = P(X_{m+n} = j|X_m = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_{m+k} = j, X_{m+p} \neq j, p = 1, \cdots k-1|X_m = i)P(X_{m+n} = j|X_{m+k} = j)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{k} P_{jj}^{n-k}$$

题目 4 的注记:相当于取条件于第 1 次路过 j 的时刻

题目 5: 习题 4.6

解答:考虑 2n 后回到原点的概率，不妨假设这 2n 里面有 2m 次是左右走，2n-2m 次是上下走，那么我们有

$$P_{00}^{2n} = \sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{m} C_{2n-m}^{m} C_{2n-2m}^{n-m} \frac{1}{4^{2n}}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n)!}{m!m!(n-m)!(n-m!)} \frac{1}{4^{2n}}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{n} C_{n}^{m} C_{n}^{m} \frac{1}{4^{2n}}$$

而注意到

$$\sum_{m=0}^{n} C_{n}^{m} C_{n}^{m} = \sum_{m=0}^{n} C_{n}^{m} C_{n}^{n-m}$$

可以表示从 2n 个东西中选出 n 个的组合数。所以他其实就是 C_{2n}^{n}

$$= (C_2 n^n)^2 \frac{1}{4^{2n}} \sim \frac{(2^{2n})^2}{\pi n} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{\pi n}$$

所以级数发散，也就是说常返

题目 5 的注记:n=3 的时候需要一些更精细的组合数估计。结论大概就是喝醉的酒鬼可以走回家，但是喝醉的鸟不能飞回家。

题目 6: 习题 4.7

解答:第一问就是考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n f_{00}^{2n}$$

数院概率论是有讲 f_{00}^{2n}[也就是 2n 次转移到原点，但是过程没碰到原点的概率] 怎么求的，利用随机游走的路径反射。我这里可以简单介绍一下。

考虑这样的一个问题：质点从 (0,0) 出发，终点是 (a+b,a-b), 其中 a-b 是一个大于 0 的数字。他每次是移动一个 (1,1) 或者一个 (1,-1)。这就是一个一维的随机游走问题 [相当于第一个分量表示次数，第二个分量表示位置]，我们希望研究这个质点始终在 x 轴上面的概率。显然，我们可以考虑用满足条件的路径数来除掉所有可能的路径数来计算概率。

总路径数非常好算，因为总共有 a+b 步，其中相当于 a 步是往上走，b 步往下走，所以总共的路径可能就是 C_{a+b}^a, 然后技巧性的一步来了，我们打算计算不满足条件的路径数。如果这个路径第一步是往下走的，那他毫无疑问会经过 x 轴，如果他第一段往上了，且最后穿过了 x 轴，那么你把他从 (0,0) 到第一次抵达 x 轴的位置 (t,0) 这一段折线关于 x 轴做一个反射，会发现他和第一段往下的折线是一一对应的。这也就是说会穿过 x 轴的折线数目，也就是两倍的从 (1,-1) 到 (a+b,a-b) 的折线，总数也就是 $2C_{a+b-1}^a$
总而最后的概率就是

$$\frac{C_{a+b}^a - 2C_{a+b-1}^a}{C_{a+b}^a} = \frac{a-b}{a+b}$$

然后这里的话情况不完全一样，你需要自己做一些调整。其实也就是考虑点从 (0,0) 抵达 (2n-1,1) 的过程中不穿过 x 轴的概率，这个根据我们的结论应该是 $\frac{1}{2n-1}$, 所以有

$$f_{00}^{2n} = P_{00}^{2n} P(not \quad touch \quad xaxis|2n \quad reach(0,0))$$

$$= C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2n-1}$$

所以原式也就是对级数 $\frac{2nC_{2n}^n}{(2n-1)2^{2n}}$ 求和，斯特林公式告诉我们他相当于级数 $\frac{1}{\sqrt{n}}$, 所以求和会是无穷大。也就是说期望时间是无穷
第二问的话，考虑期望的拆分，不妨假设 I_i 表示 i 时刻回到 0 的次数 [显然他是 1 或者 0]，并且我们有

$$P(I_{2i} = 1) = \frac{C_{2i}^i}{2^{2i}}$$

这也就是说

$$E[N_{2n}] = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}^i \frac{1}{2^{2i}}$$

这是个组合数有关的求和，既然题目都给出答案了，那我建议你用数学归纳法，n=1 的结果是显然的，而我们直接计算可以知道

$$E[N_{2k+2}] = E[N_{2k}] + C_{2k+2}^{k+1} \frac{1}{2^{2k+2}}$$

$$= (2k+1)C_{2k}^{k}\frac{1}{2^{2k}} - 1 + C_{2k+2}^{k+1}\frac{1}{2^{2k+2}}$$

$$= (2k+3)C_{2k+2}^{k+1}\frac{1}{2^{2k+2}}$$

第三问就是直接用斯特林公式把右边的组合数丢掉，最后会发现

$$E[N_{2n}] \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

题目 6 的注记:好像正文写的够清楚了，就不写注记了