第八周作业

助教-夏小凡

2024 年 5 月 6 日

题目 1: 习题 4.31

解答:先来分析这个马尔科夫链，常返态是捕猎结束 (二者位于同一个地点)，暂态是捕猎的过程 (蜘蛛和苍蝇一个位于地点 1 一个位于地点 2)

我们不妨假设状态 1 是捕猎结束，2 是初始状态，3 是剩下的那个状态，那么不难算出转移矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.54 & 0.28 & 0.18 \\ 0.54 & 0.18 & 0.28 \end{pmatrix}$$

接下来利用矩阵计算极限概率，要求矩阵的高次方，我们有 [利用矩阵的相似标准型]

$$P^n = [\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}]^n$$

$$= [\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.46^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}]$$

然后只需要求这个矩阵的 22 元，那也就是

$$P_{22}^n = \frac{1}{2}(0.46^n + 0.1^n)$$

至于第二问，其实注意到捕猎是一个几何分布就行：因为其他状态转移到成功的概率都是 0.54，所以期望就是

$$E[T] = \frac{1}{0.54} = \frac{50}{27}$$

题目 2: 习题 4.32

解答:经典的解递归方程的题目，不妨假设从 n 出发，最终被吸收的概率是 P_n, 期望步数是 $E[n]$, 那么我们取条件于第一次往哪走，可以得到方程：

$$P_n = (1-2p)P_n + pP_{n-1} + pP_{n+1}, P_0 = 1, P_N = P_{N-1}$$

最左边的式子显然意味着 P_n 是一个等差数列。也就是说 $P_n - P_{n-1}$ 是一个常数列，他在 N 处的取值是 0，所以有 $P_n = P_{n-1} = \cdots = P_0 = 1$
另一边也有方程

$$E[n] = 1+(1-2p)E[n]+pE[n-1]+pE[n+1], E[0] = 0, E[N] = 1+E[N-1]$$

这个方程第一章的习题教过怎么解，大概就是利用 $E[n] - E[n-1]$ 是一个等差数列，再结合累加法去求解，也就是说

$$E[n+1] - E[n] = E[n] - E[n-1] - 1/p$$

$$E[N] - E[N-1] = 1$$

累加可以得到

$$E[n+1] - E[n] = 1 + \frac{n+1-N}{p}$$

这个式子遍历 n=0 一直到 n=n-1, 在代入 E[0]=0 就可以得到

$$E[n] = \frac{n(2N-n+2p-1)}{2p}$$

题目 3: 习题 4.33

解答:第一问的话，注意到 X_n/μ^n 是一个鞅，并且有 $E[|X_n|/\mu^n] = 1 < \infty$，鞅收敛定理告诉我们在 n 趋于无穷大的时候它会收敛到一个有限的极限。

所以要么 X_n 趋于 0，要么以一个指数速率趋于无穷大。(之前马尔科夫链我就忍了好久不用鞅了，但是现在有点忍不住了。)

第二问可以考虑用数学归纳法，取条件于 n-1 时刻的个体数

$$Var[X_n|X_0=1]=Var[E[X_n|X_{n-1}]|X_0=1]+E[Var[X_n|X_{n-1}]|X_0=1]$$

$$=Var[\mu X_{n-1}|X_0=1]+E[\sigma^2 X_{n-1}|X_0=1]$$

$$=\mu^2 Var[X_{n-1}|X_0=1]+\sigma^2\mu^{n-1}$$

如果 $\mu=1$，那么代入归纳假设我们会有

$$=(n-1)\sigma^2+\sigma_2=n\sigma^2$$

否则代入归纳假设我们会有

$$=\sigma^2\mu^n\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}+\sigma^2\mu^{n-1}$$

$$=\sigma^2\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$$

题目 4: 习题 4.35

解答:对于第一问，我们对分支过程有

$$\pi_0=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_0^k P_k=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_0^k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(\pi_0-1)}$$

由此可以知道

$$\lambda\pi_0 e^{-\lambda\pi_0}=\lambda e^{-\lambda}$$

这也就意味着 $a=\lambda\pi_0$

至于第二问，慢慢算就好

$$P(X=k|Die\quad out\quad sooner\quad or\quad later)$$

$$=\frac{P(X=k)\pi_0^k}{\pi_0}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\pi_0^{k-1}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda}(\pi_0\lambda)^{k-1}}{k!} = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$$

那这自然是一个均值为 a 的泊松随机变量。也就证明完毕了。

题目 5: 习题 4.39

解答:先来计算转移概率，这个取条件于最开始的 i 个个体死掉了多少个来算

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (1-p)^k p^{i-k} I_{j\geq k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{min(i,j)} C_i^k (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda}$$

再来证明时间可逆，这只需要注意到

$$\pi_i P_{ij} = e^{-\frac{\lambda}{p}} (\frac{\lambda}{p})^i \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{min(i,j)} C_i^k (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{min(i,j)} \frac{1}{i!} \frac{\lambda^i}{p^i} \frac{i!}{(i-k)!k!} (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{p}} (\frac{\lambda}{p})^j \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{min(i,j)} C_j^k (1-p)^k p^{j-k} \frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\lambda}$$

$$= P_{ji}\pi_j$$

题目 6: 习题 4.41

解答:首先

$$P_{ij}^* = \frac{P_{ij}\pi_j}{\pi_i}$$

所以我们只需要求极限概率，列出极限方程 [编号后注意处理头部和尾部即可]

$$\pi_1 = \pi_2(1-p) + \pi_n p$$

$$\pi_i = \pi_{i+1}(1-p) + \pi_{i-1} p$$

$$\pi_n = \pi_1(1-p) + \pi_{n-1} p$$

这个方程实在是太对称了，我感觉应该都能看出来解就是

$$\pi_i = 1/n$$

如果你感觉你直觉不太行，可以先解 n=3 或者 n=4 的时候找规律。

所以倒向转移概率就是 [其实就是说 P_{ij} 等于 p(1-p) 的时候 P^*_{ij} 就是 1-p(p)]

$$P^*_{ij} = (1 - P_{ij}) I_{P_{ij} \neq 0}$$

时间可逆等价于 p=1-p 也就是说 $p = 1/2$

题目 7: 习题 4.46

解答:第一问显然是马尔科夫链，因为考虑给定 $Y_{n-1} = j$ 的情况下考虑 Y_n 的分布，这其实就是考虑在链子 X_n 里面，从 j 进入 $[0, N]$ 这个状态集的分布，X_n 的马尔科夫性告诉我们这只和当前状态是 j 有关，和过去别的信息都无关。

第二问也很显然，可以在链子 X_n 中看这个问题，相当于在 1 个时间内处于 j 状态的时间是 π_j, 删去 X 链特有的状态就可以得到 Y 链总时间是 $\sum_{i=0}^{N} \pi_i$, 从而结论就是处于 j 的时间比例是

$$\frac{\pi_j}{\sum_{i=0}^{N} \pi_i}$$

第三问的话，感觉也还蛮直观的，因为我们有

$$\pi_j(N) = \frac{E[\text{两次访问 i 之间访问 j 的次数}]}{E[\text{两次访问 i 之间的时间}]}$$

而我们显然有

$$\frac{1}{E[\text{两次访问 i 之间的时间}]} = \pi_i(N)$$

第四问要证明期望为一，事实上只需要证明在每个状态的平稳概率都是一样的。其实这只需要注意到平稳状态的方程是

$$\pi_0 = \frac{1}{2}(\pi_0 + \pi_1)$$

$$\pi_i = \frac{1}{2}(\pi_{i-1} + \pi_{i+1})$$
$$\pi_N = \frac{1}{2}(\pi_{N-1} + \pi_N)$$

所以所有平稳概率都一样显然是个解。也就证毕了。

第五问的话，X 平稳意味着

$$P_{ij}^X \pi_i = \pi_j P_{ji}^X$$

我们要证明 Y 平稳，其实也就是要证明

$$P_{ij}^Y \pi_i(N) = \pi_j(N) P_{ji}^Y$$

由于等式左右两边分别表示在 Y 链子中从状态 i(j) 进入 j(i) 的速率，我们同时考虑在 X 链子中从状态 i(j) 进入 j(i) 的速率, 可以写出式子, 其中 $P(k, j, N)$ 表示从 k 出发，不经过任何小于等于 N 的状态，最后抵达 j 的概率。

$$P_{ij}^Y \pi_i(N) = P_{ij}^X \pi_i(N) + \pi_i(N) \sum_{k=N+1}^{\infty} P_{ik} P(k, j, N)$$
$$P_{ji}^Y \pi_j(N) = P_{ji}^X \pi_j(N) + \pi_j(N) \sum_{k=N+1}^{\infty} P_{jk} P(k, i, N)$$

这两个式子右边的第一项显然是相等的，这是因为在 Y 中的长程比例和在 X 中的长程比例仅仅差了一个常数倍而已，至于考虑第二项，定理 4.7.2 也告诉我们他们是相等的。因为一个是对所有正向路径的概率求和，一个是对所有逆向路径的概率求和，而正向概率和逆向概率又一样。

题目 8: 习题 5.1

解答:这题根据题意，会出生但没有死亡，所以实际上只需要计算类似于出生率的东西，并且我们显然有 [记 $(m, n) = (N_1(t) = m, N_2(t) = n)$]

$$q((m, n) \to (m+1, n)) = q((m, n) \to (m, n+1))$$

所以只需要算一个就好，这个速率应该是

$$\frac{1}{2} C_m^1 C_n^1 \lambda = \frac{\lambda mn}{2}$$

题目 9: 习题 5.2

解答:类似上一题，记

$$(m,n)=(A=m,B=n)$$

那么我们有

$$q((m,n)\to(m-1,n+1))=m\alpha$$

$$q((m,n)\to(m+2,n-1))=n\beta$$

题目 10: 习题 5.4

解答:不妨假设从第 i 个出生到第 i+1 个出生需要的时间叫做 T_i, 那么 T_i 相互独立的服从 $exp(\lambda_i)$

$$E[T]=E[\sum_{i=0}^{N-1}T_i]=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda_i}$$
$$Var[T]=\sum_{i=0}^{N-1}Var[T_i]=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda_i}$$
$$E[Exp[tT]]=\Pi_{i=0}^{N-1}E[Exp[tT_i]]=\Pi_{i=0}^{N-1}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-t}$$

题目 11: 习题 5.5

解答:和命题 5.3.2 蛮像的

$$P(S_1=s_1,\cdots,S_k=s_k|X(t)=i+k,X(0)=i)$$
$$=\frac{P(T_1=s_1,T_2=s_2-s_1,\cdots,T_k=s_k-s_{k-1},T_{k+1}>t-s_k)}{P(X(t)=i+k,X(0)=i)}$$
$$=\frac{i\lambda e^{-i\lambda s_1}(i+1)\lambda e^{-(i+1)\lambda(s_2-s_1)}\cdots(i+k-1)\lambda e^{-(i+k-1)\lambda(s_k-s_{k-1})}e^{-(i+k)\lambda(t-s_k)}}{P(X(t)=i+k,X(0)=i)}$$
$$=Ce^{-\lambda(t-s_1)}e^{-\lambda(t-s_2)}\cdots e^{-\lambda(t-s_k)}$$

从而类似课本命题 5.3.2 的推理，我们知道这几个出生时刻同分布于来自密度为 f 的 k 个相互独立的随机变量的次序统计量，其中

$$f(x)=\frac{\lambda e^{-\lambda(t-x)}}{1-e^{-\lambda t}}I_{0\le x\le t}$$