第九次作业

助教-夏小凡

2024 年 5 月 13 日

题目 1: 习题 5.12

解答:这题其实还蛮像更新过程的，就是一个速率分别为 λ 和 μ 的开关过程，然后开和关的过程中再穿插着一些泊松事件的发生（可以理解为更新报酬过程之类的东西。）计算的方法其实有很多，我个人认为，在马尔科夫链涉及到极限的东西，你先把极限概率算出来，肯定是最稳的一种办法。

这里首先计算极限概率，根据开关定理的理论，我们有

$$P_0 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

从而

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \text{事件的极限发生速率} = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 (1 - P_0) = \frac{a_0\mu + a_1\lambda}{\lambda + \mu}$$

第二问只需要确认在 t 时间内，分别有多少时间是在状态 0 的，有多少时间是在状态 1 的，因为确认了前者，再用 t 减就可以得到后者，所以不妨只计算 $E[T_0(t)]$, 类似于离散的马尔科夫链或者更新过程，我们有

$$E[T_0(t)] = \int_0^t P_{00}(s)ds$$

代入课本例子 5.4 的 A 我们有

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

从而有

$$E[T_0(t)] = \frac{\mu t}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})$$

最后的答案就是

$$E[N(t) = a_0 E[T_0(t)] + a_1(t - E[T_0(t)])$$

题目 2: 习题 5.13

解答:这题感觉真不需要任何解释吧，你只要知道算状态为 j 的时候，出生先于死亡的概率是 $\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j}$, 然后遍历 j 从 i 到 i+k-1 乘起来就是最后的答案了。

题目 3: 习题 5.14

解答:就像课本最后的答案说的那样，假设现在有 k 个人被感染了，那么如果说感染的人就是出生的人，这就是一个出生率为 $\lambda_k = k(n-k)\lambda$ 的纯生过程，所以会有

$$E[T] = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)\lambda}$$

题目 4: 习题 5.15

解答:这是一个生灭链是毫无疑问的，出生率和死亡率都是恒定的

$$\lambda_n = \lambda + \theta$$

$$\mu_n = \mu$$

一般来说，要求极限的时候，优先考虑极限概率，这里第三问不涉及极限，一般就是用向前方程或者向后方程了。就像当时证明泊松过程两个定义等价的时候一样。我个人是感觉这些方程也不用背，至少我基本就是现推的，考虑这里的向前方程 (因为前面的信息已知，求 t 的信息，就要考虑从 t 的信息往前推)

记 $M(t) = E[X(t)|X(0) = i]$, 那么我们打算研究 $M(t+h)$ 与 $M(t)$ 的关系，我们会有

$$M(t+h) = E[X(t+h)|X(0) = i]$$

$$= E[E[X(t+h)|X(t)=x, X(0)=i]]$$

$$= E[x + (\lambda x + \theta - \mu x)h + o(h)|X(0)=i]$$

$$= M(t) + (\lambda - \mu)M(t)h + \theta h + o(h)$$

这也就是说

$$M'(t) = (\lambda - \mu)M(t) + \theta$$

稍微整理一下就是

$$e^{(\mu-\lambda)t}[M'(t) + (\mu - \lambda)M(t)] = \theta e^{(\mu-\lambda)t}$$

两边积分再代入 M(0)=i 就可以得到

$$M(t) = \frac{\theta}{\lambda - \mu}(e^{-(\lambda-\mu)t} - 1) + ie^{(\mu-\lambda)t}$$

题目 5: 习题 5.19

解答:这道题和之前第一章还是第二章的哪个习题很像：就是行人根据下一辆车还有多久要来来判断自己该不该过马路，要求计算行人等待的期望时间。所以我们干脆就用那里的处理方法。不妨假设第一次会在 0 状态停留的时间叫做 X

$$E[T] = E[T|X <= t]P(X <= t) + E[T|X > t]P(X > t)$$

$$= \sum_{x=0}^{t} E[T|X = x, X <= t]P(X = x|X <= t)P(X <= t) + te^{-v_0 t}$$

$$= \int_0^t E[T|X = x]v_0 e^{-v_0 x}dx + te^{-v_0 t}$$

其中我们有

$$E[T|X = x] = x + E[\text{从这次离开状态 0 到下次进入状态 0 需要的时间}] + E[T]$$

所以其实只用计算上述中右边式子的第二项，这个根据更新过程里面的开关理论，我们把系统呆在 0 的时候视为系统是开的，可以得到

$$P_0 = \frac{E[\text{呆在 0 的时间}]}{E[\text{呆在 0 的时间}] + E[\text{从这次离开状态 0 到下次进入状态 0 需要的时间}]}$$

E[呆在 0 的时间] 显然就是 $\frac{1}{v_0}$, 把这些全部代入整理后，最后解一元一次方程得到

$$E[T] = \frac{te^{-v_0t+[(1-P_0)/(P_0v_0)](1-e^{-v_0t})+\int_0^t xv_0e^{-v_0x}dx}}{e^{-v_0t}}$$
$$= \frac{e^{v_0t}-1}{P_0v_0}$$

题目 6: 习题 5.20

解答:第一问要确认一个生灭链，其实只需要确认这个链子的出生率和死亡率就可以了，我们显然有

$$\lambda_n = n\lambda + \theta, n < N$$

$$\lambda_n = n\lambda, n \geq N$$

$$\mu_n = n\mu, n \geq 1$$

确定移民受限制的时间比例，其实也就是确定极限情况下群体有多少时间是个体数大于等于 N 的，这就需要计算生灭链的极限概率，直接列出极限方程

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_n + \mu_n)P_n = \mu_{n+1}P_{n+1} + \lambda_{n-1}P_{n-1}$$

课本 5.5 一上来就教你怎么解了，我这里直接给出那里的结论

$$P_0 = [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}]^{-1}$$

$$P_0 = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} P_0$$

此处我们直接计算会发现对任意 $n \leq 3$ 有 $\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \frac{1}{2}$,$n > 3$ 有 $\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} = \frac{n}{2(n+1)}$, 所以有 [记 p=$\frac{1}{2}$]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = p + p^2 + p^3 + p^4\frac{3}{4} + p^5\frac{3}{5} + p^6\frac{3}{6} + \cdots$$

我们利用 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式子会有

$$-3ln(1-p) = 3p + \frac{3}{2}p^2 + \frac{3}{3}p^3 + p^4\frac{3}{4} + p^5\frac{3}{5} + p^6\frac{3}{6} + \cdots$$

把最近的两个式子相减可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} - 3ln2 = -2p - \frac{1}{2}p^2$$

也就是说

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = 3ln2 - \frac{9}{8}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 3ln2 - \frac{9}{8}} = \frac{1}{3ln2 - \frac{1}{8}}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}P_0$$

$$P_2 = \frac{1}{4}P_0$$

所以答案就是

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{7}{4}P_0 = \frac{24ln2 - 15}{24ln2 - 1}$$

题目 7: 习题 5.21

解答:这题也一眼可以看出来是一个生灭链，我们先写出来出生率和死亡率

$$\lambda_n = 3, n = 0, 1$$

$$\lambda_n = 0, n \geq 2$$

$$\mu_n = 4, n \geq 1$$

所以在计算 P_0 的时候那个级数本质上是个有限求和, 我们有

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}} = \frac{16}{37}$$

再利用 5.20 我列的那一堆公式不难算出

$$P_1 = \frac{12}{37}, P_2 = \frac{9}{37}$$

所以顾客期望平均数显然就是

$$0P_0 + P_1 + 2P_2 = \frac{30}{37}$$

进入店里的顾客比例其实也就是店不满的时间比例，也显然就是

$$P_0 + P_1 = \frac{28}{37}$$

工作速度提高一倍也就是把上面的 $\mu_n = 4$ 改成 $\mu_n = 8$, 同样的手段可以算出极限概率是

$$P_0' = \frac{64}{97}, P_1' = \frac{24}{97}, P_2' = \frac{9}{97}$$

多做的生意我理解为顾客进入店的速率增加量，这样理解的话，答案就会是

$$\lambda(P_0' + P_1' - P_0 - P_1) \approx 0.45$$

题目 8: 习题 5.22

解答:这也还是个生灭链，先写出出生率和死亡率

$$\lambda_n = \lambda, n \geq 0$$

$$\mu_n = n\mu, 1 \leq n \leq s$$

$$\mu_n = s\mu, n > s$$

要存在极限分布的话，其实只需要计算 P_0 要用到的那个级数是收敛的，这里我们考虑级数的项

$$\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}$$

在 n 毕竟大的时候，这相当于有很多 $\frac{\lambda}{s\mu}$ 乘在一起，很容易看出来级数收敛当且仅当 (验证大于等于 1 的时候级数的项不趋于 0，从而发散，小于 1 的时候相当于等比数列，所以收敛)

$$\frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

至于极限概率我就写一个 P_0 吧，写出 P_0 后别的极限概率也不应该有难度。

$$P_0 = (\sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!}\frac{\lambda^i}{\mu^i} + \frac{s^s}{s!}\frac{\frac{\lambda^s}{s^s\mu^s}}{1-\frac{\lambda}{s\mu}})^{-1}$$