第二周作业

助教-夏小凡

2024 年 3 月 24 日

题目 1: 习题 3.3

解答:

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = E[P(X_{N(t)+1} \geq x)|S_{N(t)}]$$

而只需要注意到

$$P(X_{N(t)+1} \geq x|S_{N(t)} = s) = P(X_{N(t)+1} \geq x|X_{N(t)+1} > t - s)$$

$$= \sum P(N(t) = n)P(X_{n+1} \geq x|X_{n+1} > t-s) = \sum P(N(t) = n)P(X_1 \geq x|X_1 > t-s)$$

$$= P(X_1 \geq x|X_1 > t - s) \geq P(X > x)$$

即可证明题目的式子，如果要精确计算的话，也是同样的对 $S_{N(t)}$ 取条件，
而我们有

$$dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(t - y)dm(y)$$

此时就是一个泊松过程，当然有 $m(y) = \lambda y$，所以

$$= e^{-\lambda(t-y)}\lambda dy$$

于是我们有

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = \int_0^t P(X_{N(t)+1} \geq x|S_{N(t)} = y)e^{-\lambda(t-y)}\lambda dy$$

若 $t \le x$, 那么有原式等于

$$\int_0^t e^{-\lambda(x+y-t)} e^{-\lambda(t-y)} \lambda dy = \lambda t e^{-\lambda x}$$

若 $t \ge x$, 那么有原式等于

$$\int_0^{t-x} e^{-\lambda(t-y)} \lambda dy + \int_{t-x}^t e^{-\lambda(x+y-t)} e^{-\lambda(t-y)} \lambda dy = (\lambda x + 1) e^{-\lambda x} - e^{-\lambda t}$$

题目 1 的注记:对 $S_{N(t)}$ 取条件可以解决大多数涉及到 $X_{N(t)}$ 的问题

题目 2: 习题 3.4

解答:

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \\ &= F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t) \\ &= F(t) + \int_0^t F_n(t-x) dF(x) \\ &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \end{aligned}$$

题目 2 的注记:中间的步骤有个地方我交换了积分号和极限的顺序。这门课经常会用到交换积分和极限顺序或者是二重积分交换 x 和 y 的积分顺序的技巧。老师的意思是大家在这门课可以想交换就交换，毕竟只是实用的随机过程，不需要深究原因。如果你好奇这里为什么可以交换的话，我会告诉你这是考虑实分析的单调收敛定理。

题目 3: 习题 3.8

解答:先看第一问，也就是考虑计算

$$P(X_i \le x_i, i = 1, \cdots, n | N(t) = n)$$

这种比较一般的概率的计算当然要考虑试试用积分，积分的关键是要确认积分区域，也就是用 x_i 表示 $N(t) = n$, 不难发现原式等于

$$P(X_i \le x_i, i = 1, \cdots, n | X_{n+1} \ge t - \sum_{i=1}^n X_i)$$

$$= \frac{P(X_i \le x_i, i=1,\cdots,n, X_{n+1} \ge t - \sum_{i=1}^n X_i)}{P(X_{n+1} \ge t - \sum_{i=1}^n X_i)}$$

分母显然是个常数，直接计算分子就好，他也就是 [这个积分的获得相当于取条件于 $X_i = y_i$]

$$\int_{y_i \le x_i} P(X_{n+1} \ge t - \sum_{i=1}^n y_i) dF(y_i)$$

如果你交换 x_i 和 x_j 的话，被积分的函数显然不会发生变化，唯一发生变化的也就是积分号对 X_i 和 X_j 积分的顺序，但是 fubini 告诉我们交换积分号顺序不改变积分值，这也就说明了 $X_1,\cdots,X_n$ 是可交换的。至于要考虑 X_{n+1} 是否也可以交换的话，可以用完全类似的方法，但注意到取条件于 $X_{n+1} = y_{n+1}$ 的时候，此时不会是有一项 $dF(y_{n+1})$，因为 X_{n+1} 和 X_1 的分布并不相同 [直观来看的话很显然，因为比如 $N(t) = n$ 就相当于告诉你 X_1 不可能比 t 大，但 X_{n+1} 显然可以比 t 大]，他不可能分布函数还是 F，所以此时交换了 x_i 和 x_j 肯定会得到不同的积分值也就是不可交换的。这就相当于考虑积分

$$\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} dF(y_1)dG(y_2)$$

如果 F 和 G 不一样的话，交换了 x_1 和 x_2 后得到的数值也大概率不会一样。

至于第二问，原式显然可以化简成

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i|N(t)=n]$$

根据 a 的可交换性，我们交换 y_1 和 y_i 分布函数不会改变，也就有

$$E[X_i|N(t)=n] = \int y_i dF(y_1,\cdots,y_i,\cdots,y_n)$$

$$= \int y_i dF(y_i,\cdots,y_1,\cdots,y_n) = E[X_1|N(t)=n]$$

代入就可以证明了，最后来看第三问，参考第二问的情况，对 N(t)=n 取条件可以让计算大大的轻松，注意这里我是怎么用条件期望公式的:

$$= \sum_n E[\frac{1}{N(t)}\sum_{i=1}^{N(t)} X_i|N(t)=n]P(N(t)=n|N(t)>0)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i|N(t)=n]P(N(t)=n|N(t)>0)$$

$$= \sum_n E[X_1|N(t)=n]P(N(t)=n|N(t)>0) = E[X_1|N(t)>0]$$

题目 3 的注记:这题改作业来看大部分同学没有把每个等号是为什么弄明白，虽然考试极大概率不考这题，但是弄明白对整个概率的学习肯定是有不少帮助的。

题目 4: 习题 3.9

解答:不妨考虑用服务员的视角看这个问题，从一个人来到下一个人来的间隔时间，其实就等于第一个人完成服务的时间再加上等待第二个人到达的时间，那么我们自然有 [用 μ_G 表示 G 的期望]

$$E[T] = \mu_G + \frac{1}{\lambda}$$

速率实际上就是 E[T] 的倒数，第一问就做完了。

至于第二问的话，已知到银行的顾客速率是 λ, 而第一问又计算了进银行的顾客的速率，二者锁做个比值就是了，答案是

$$\frac{1}{1+\lambda\mu_G}$$

第三问也非常显然，因为两个被服务的人之间的间隔期望时间是 $E[T]$，其中忙碌的时间显然是 μ_G，所以忙期比例也就是

$$\frac{\mu_G}{\mu_G+\frac{1}{\lambda}}$$

题目 4 的注记:考试考到忙期什么的基本也就这难度，所以 feel free

题目 5: 习题 3.10

解答:第一问是考虑

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_1+\cdots+N_m} X_i}{N_1+\cdots+N_m}$$

的极限，m 无限大的时候 $N_1+\cdots+N_m$ 显然趋于无穷大，原式也就会收敛到 $E[X]$

至于第二问，要求你分别计算两个极限。由于 $E[N]<\infty$，所以可以直接用大数定律得出

$$\frac{m}{N_1+\cdots+N_m}=\frac{1}{\frac{N_1+\cdots+N_m}{m}}$$

会趋于 $1/E[N]$，我们要思考的只剩下如何对 S_i 使用大数定律。其实只需要证明他的期望不是无限大的。这里可以使用经典的处理停时的方法:

$$E[S]=E[\sum_{i=1}^{N} X_i]=E[\sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{N\geq i}]=\sum_{i=1}^{\infty} E[X_i I_{N\geq i}]=E[X]\sum_{i=1}^{\infty} E[I_{N\geq i}]<\infty$$

其中有一步我交换了积分与求和的顺序，这个在中文版课本 64 页有讲为什么可以这么干，当然我觉得这个点不去关注也是可以的

题目 5 的注记:这题我感觉我的思路蛮自然的，但好像他直接把 wald 等式证出来了，也许是说明 wald 等式本来就很自然

题目 6: 习题 3.11

解答:显然，选取 X_i 为等概率取 2,4,8 的随机变量用来表示一次尝试花费的天数，然后停止的时刻也就是 X_i 取值为 2 的时候，也就是 $N = argmin_n\{X_n=2\}$，显然总时间等于每次尝试的时间的求和

然后 E[X] 显然就是 $\frac{14}{3}$，至于 $E[N]$，他是一个几何分布的随机变量，此时概率为 1/3，所以期望也就是 3 了，所以 wald 方程告诉我们答案是 $E[X]E[N]=14$

第三问的话，取条件为 $N=n$，也就是告诉你在 n 的时刻逃脱了，前面的 n-1 时刻不会逃脱，也就是等可能得取 4 或者是 8，所以前面每一次的 X_i 期望都是 6, 条件期望也就是 $6(n-1)+2=6n-4$, 第四问就是对 6n-4 再取一次期望，答案是 $6E[N]-4$ 也就是 14

题目 6 的注记:这题应该可以帮助大家找到不少自信

题目 7: 习题 3.15

解答:我们一个个来说。先看 (a):

条件是说在 t 这个时刻恰好有 s 的年龄，也就是说上一个事件发生在 $t-s$ 这个时刻，我们要求 t 这个时刻至少还剩 x 的年龄，也就是要求 $[t-s, t+x]$ 这个区间没有事件发生，条件相当于告诉了你 $[t-s, t]$ 这个区间没有事件发生，所以也就可以看出要求的概率就是

$$P(X > s + x | X > s) = \frac{P(X > x + s)}{P(X > s)}$$

再来看 (b):

条件告诉你在 t+x/2 这个时刻有了 s 的年龄，也就是说上一个事件发生在 $t + x/2 - s$ 这个时刻，你要考虑 t 处的年龄大于 s 的概率。这显然是需要考虑 x/2 和 s 哪个比较大的，因为这决定了上一个事件发生在 t 之前还是 t 之后，才能帮助你确认 t 时刻的剩余年龄，如果是 s 比较大的话，那么上一个事件发生在 t 之前，此时其实和第一问没什么区别，照搬那边的结论可以知道答案是

$$P(X > 2s - x/2 | X \geq s)$$

如果是 x/2 比较大的话，那么上一个事件发生在 t 之后，也就是 t 时刻剩余的年龄至多只有 x/2-s 了，此时概率应该是

$$P(Y(t) > s | Y(t) \leq x/2 - s)$$

化简到这一步倒也差不多了，其实我感觉有可能是印错了，要求 $P(Y(t) > x | A(t + x/2) = s)$ 比较合理，这样的话也是类似分 s 和 x/2 哪个大讨论，沿用第一问的结论。第二问可以选择性忽略。

再来看第三问 (c):

条件也是精确的告诉你 $[t + x - s, t + x]$ 之间是不存在事件发生的，然后你要考虑 t 时刻的剩余年龄咋样，这肯定是要先看看 x 和 s 谁大的。如果 s

比较大的话，相当于条件就已经告诉了你 $[t, x+t]$ 里面没有事件发生，也就是说此时概率为 1，如果 x 比较大的话，相当于已知 $[t+x-s, t+x]$ 没有事件，问你多大的可能 $[t, t+x]$ 没有事件，根据独立增量性，这就等于是 $[t, t+x-s]$ 里面没有事件的概率，自然也就是 $e^{-\lambda(x-s)}$
来看看第四问 (d):
他要求 $[t-y, t+x]$ 没有事件发生，这其实也就是

$$P(S_{N(t)} < t-y, S_{N(t)+1} > t+x)$$

又或者写成

$$P(Y(t-y) > x+y) = P(A(t+x) > x+y)$$

对于一般的过程肯定是算不出具体表达式的，所以这题的用意就很奇怪，主要是没告诉你要化简到什么程度。
最后一问的话，只需要注意到

$$\frac{A(t)}{t} = \frac{t - S_{N(t)}}{t} = 1 - \frac{S_{N(t)}}{t} = 1 - \frac{S_N(t)}{N_(t)} \frac{N_(t)}{t}$$

最后的乘积式子里面第一项用大数定律，第二项参考中文课本的 P62，就可以算出来 ae 的极限了。其实没什么难度
题目 7 的注记:只有 135 问有参考价值，复习的时候建议选择性忽略 24 问，主要是问的不清不楚。看我的解答大家也可以感受出来，$S_N(t), A(t), Y(t)$ 三个是好朋友，考虑一个的时候可以借助另外两个的力量