第十一次作业

助教-夏小凡

2024 年 6 月 5 日

题目 1: 习题 8.4

解答:参考 8.1 的解答，$X(t)$ 是高斯过程是显然的。只需考虑计算有关均值和协方差

$$E[X(t)] = (t+1)E[Z(t/(t+1))] = (t+1)0 = 0$$

不妨 $s < t$，则此时 $s/s+1 < t/t+1$

$$Cov[X(s), X(t)] = (t+1)(s+1)Cov[Z(s/s+1), Z(t/t+1)] = (t+1)(s+1)\frac{s}{s+1}(1-\frac{t}{t+1}) = s$$

所以证完了

题目 2: 习题 8.5

解答:(a) 先假设一个高斯过程是平稳过程，来考虑计算协方差和均值，对于任意 t, 取 $n = 2, a = t, t_1 = 0$, 可以知道 $X(t)$ 和 $X(0)$ 同分布，所以我们有

$$E[X(t)] = E[X(0)]$$

右边自然是个常数，类似的，我们有 $(X(t), X(s))$ 同分布于 $(X(t-s), X(0))$，从而

$$Cov[X(t), X(s)] = Cov[X(t-s), X(0)]$$

右式显然被 t-s 完全确定，所以是 t-s 的函数。再来证另一边，由于高斯随机向量的分布会被协方差矩阵和均值向量完全确认，所以我们只需验证这二者相等，显然有

$$E[X(t_i)] = c = E[X(t_i + a)]$$

$$Cov(X(t_i), X(t_j)) = f(t_i - t_j) = Cov(X(t_i + a), X(t_j + a))$$

这也就验证完了，再看第二问，根据第一问，只需验证均值是常数和协方差矩阵只和 t-s 有关

$$E[V(t)] = e^{-\frac{at}{2}} E[X(ae^{at})] = e^{-\frac{at}{2}} 0 = 0$$

不妨 $s < t$

$$Cov[V(s), V(t)] = e^{-\frac{a(t+s)}{2}} Cov[X(ae^{as}), X(ae^{at})] = e^{-\frac{a(t+s)}{2}} ae^{as} = e^{-\frac{a(t-s)}{2}}$$

也就证完了

题目 3: 习题 8.7

解答:(a) 可以看课本的 8.3.2，分布函数是

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx - 1$$

(b) 的话，我们对 max 是比对 min 熟悉的，所以不妨转换为 max

$$|\min_{0 \le s \le t} X(s)| \sim |-\max_{0 \le s \le t} X(s)| \sim |\max_{0 \le s \le t} X(s)| \sim \max_{0 \le s \le t} X(s)$$

而后者的分布在中文课本的 p227 有被计算，适当的换元后，你会发现这个分布其实和 (a) 是一样的

最后只需要考虑 (c)，不妨记 $M(t) = \max_{0 \le s \le t} X(s)$，那么 M(t) 和 X(t) 的联合分布函数你是知道的，现在要你计算他们的差的分布。我们有

$$P(M(t) > y, X(t) < x) = \int_{2y-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du$$

直接求导可以知道

$$\Rightarrow f_{M(t),X(t)}(y,x)=\frac{2}{t}(2y-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}$$

要计算 $P(M(t)-X(t)\leq a)$，其实也就是在区域 $y-x\leq a$ 上积分，也就是计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x+a}\frac{2}{t}(2y-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}dydx$$

我这里就不写过程了，只能说算出来你会发现是和前两者同分布的

题目 4: 习题 8.9

解答:正如上一题所说，由于联合密度函数我们都知道了，所以在合适的区域积分 (M(t)=X(t),M(t)>a) 就好了。当然这里做一个换元会稍微好处理一点。

不妨记 $V(t)=M(t)-X(t)$，我们来计算 M(t) 和 V(t) 的联合密度函数 f

$$f(y,v)=f_{M(t),X(t)}(y,y-v)=\frac{2}{t}(y+v)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y+v)^2}{2t}}$$

所以有

$$\begin{aligned}P(M(t)>a|M(t)=X(t))&=P(M(t)>a|V(t)=0)\\&=\int_a^{\infty}\frac{f(u,0)}{f_V(0)}du\\&=\int_a^{\infty}\frac{\frac{2}{t}u\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}}{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}}du\\&=\int_a^{\infty}\frac{1}{t}ue^{-\frac{u^2}{2t}}du=e^{-\frac{a^2}{2t}}\end{aligned}$$

题目 5: 习题 8.11

解答:(a):$T_2<s$ 显然等价于 (t,s) 里面有零点，概率也就是 $1-\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{t}{s}}=\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{t}{s}}$

(b): 这等价于 (s,y) 里面没有零点，概率也就自然是 $\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{y}}$

题目 6: 习题 8.11

解答:这里要求布朗运动先击中 1，再击中-1，再击中 2 的概率，我们慢慢来:

$$P(T_1 < T_{-1} < T_2) = P(T_1 < T_{-1})P(T_{-1} < T_2 | T_1 < T_{-1})$$

第一项显然就是 $\frac{1}{2}$，至于第二项，可以理解为质点从 1 出发，要先击中-1，再击中 2，这其实就相当于质点从 0 出发，要先击中-2，再击中 1 的概率。根据我们之前说的布朗运动是鞅，容易构建击中-2 或者 1 作为停时，得到

$$-2P(T_{-2} < T_1) + P(T_1 < T_{-2})$$

来解出原式第二项是 1/3，所以答案也就是 1/6

题目 7: 习题 8.15

解答:对于 f(x), 对其前 h 时刻的漂移结果取期望，我们会有 (Y 表示前 h 的漂移量，或者说就是 X(h)-X(0))

$$f(x) = h + E[f(x+Y)] = h + E[f(x) + Yf'(x) + \cdots] + o(h)$$

$$= h + f(x) + \mu h f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + o(h)$$

$$\Rightarrow 1 + \mu f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) = 0$$

结合边界条件 $f(A) = f(-B) = 0$，我们可以解出最后的结果 (我用软件解了，答案见复习 PPT)