第二周作业

助教-夏小凡

2024 年 4 月 4 日

题目 1: 习题 3.14

解答:(a):$[t-x,t]$

(b):$(t,t+x]$, 当然我觉得区间的开和闭并不是很重要。

(c):$P(A(t+x)>x)$, 这个根据 (a) 和 (b) 的结论不难得到

(d):

$$P(A(t)>x,Y(t)>y)$$

$$=P(Y(t)>y|A(t)>x)P(A(t)>x)$$

而 $P(A(t)>x)=P(N(t)-N(t-x)=0)=e^{-\lambda x}$,

$$P(Y(t)>y|A(t)>x)=P(Y(t)>y)=e^{-\lambda y}$$

所以有

$$P(A(t)>x,Y(t)>y)=e^{-\lambda(x+y)}$$

题目 1 的注记:这道题应该非常简单，我就不做过多的解释了。都是靠画个图或者靠直观就能做出来

题目 2: 习题 3.16

解答:命题 3.4.6 告诉我们答案应该是 $\frac{E[X^2]}{2E[X]}$, 下面我们开始计算

考虑利用结论: 参数为 (n,λ) 的伽马分布相当于 n 个参数为 λ 的指数分布

随机变量的独立和，以及注意到指数随机变量的特征函数是 $(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$，所以我们可以知道伽马函数的特征函数是 $f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-n}$。于是我们有

$$iE[X]=f'(0)=\frac{ni}{\lambda}(1-\frac{i0}{\lambda})^{-n-1}\Rightarrow E[X]=\frac{n}{\lambda}$$

$$i^2E[X^2]=f''(0)=\frac{n(n+1)i^2}{\lambda^2}(1-\frac{i0}{\lambda})^{-n-2}\Rightarrow E[X^2]=\frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

二者做个比值就可以得到我们要的结论。如果要直观看这个结论的话，可以把 $X_{N(t)+1}$ 视为 n 个指数随机变量分布产生的区间的连接，然后这个 t 是随机落在某一个区间的，无记忆性告诉我们，从 t 看前面的区间端点和看后面的区间端点都会是一个指数随机变量的距离，所以实际上总区间长度平均会有 n+1 个指数随机变量的区间长度，然后我们要考虑 t 到右端的距离，由于 t 是均匀分布的，所以他的平均长度就会是 $\frac{n+1}{2\lambda}$

题目 2 的注记:我觉得我最后写的直观也不是那么直观。如果你觉得不是那么直观的话，可以忽略它，只需要会计算即可。

题目 3: 习题 3.18

解答:要研究是否构成更新过程，我们只需要判断是否每次更新间隔都是独立同分布的 [差不多也就是研究平稳增量和独立增量]，这个要脑补是否平稳和是否独立不一定好脑补，所以我们稍微写一下：不妨假设从最开始直到第一个人抵达需要时间 X_1，然后一直等到第一个人被服务完要时间 Y_1，然后再等到第二个人来要时间 X_2，我们第一问要研究的就是：Y_n+X_{n+1} 是否是一个可能带有延迟的 iid 的等待间隔。远的不看看近的，先来考虑 Y_n+X_{n+1} 和 $Y_{n-1}+X_n$

Y_n 当然是和 Y_{n-1},X_n 相互独立的, 因为他的分布就是服从 3.9 所说的分布函数 G, 而至于 X_{n+1}, 他表示的是，一个间隔分布为 F 的更新过程，从 0 开始，第一个超过 Y_n 的到达时刻是多少，这显然是一个只依赖于 Y_n 的量，或者说被 Y_n 完全决定的量 [也就被 G 完全决定]，所以他也和 X_n,Y_{n-1} 相互独立，从这里看就可以发现，无论 F 是怎么分布的，这都是 iid 的，所以此时都是延迟更新过程

至于第二问。要我们考虑的就是 $X_n + Y_n$ 是否 iid，我们根据刚刚的讨论知道一般情况下 X_n 会被 Y_{n-1} 影响，这也就说明独立性会出现问题。但是如果有无记忆性的话，此时 X_n 就不会被 Y_{n-1} 影响，也就成功会成为一个延迟更新过程了。

题目 3 的注记:

题目 4: 习题 3.19

解答:

$$P(S_{N(t)} \le s)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \le s, S_{n+1} > t)$$

[此处注意到 S_1 的分布和 S_n 不太一样。所以对 S_n 取条件的时候，n=1 要特殊处理]

$$= \bar{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(S_n \le s, S_{n+1} > t | S_n = y) dG * F_{n-1}(y)$$

$$= \bar{G}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{s} \bar{F}(t-y) dG * F_{n-1}(y)$$

$$= \bar{G}(t) + \int_0^{s} \bar{F}(t-y) d \sum_{n=1}^{\infty} G * F_{n-1}(y)$$

$$= \bar{G}(t) + \int_0^{s} \bar{F}(t-y) dm_D(y)$$

题目 4 的注记:这一问感觉就是抄书，也没什么难度

题目 5: 习题 3.21

解答:其实赌博问题用鞅研究，设立停时后用鞅停止定理会比较舒服，这里没学鞅的话，我们也是考虑类似的停时方法去做。[对于这种会停止的随机过程，设置停时是非常有效的办法]，假设 N 为表示赌博局数的随机变量，然后 $X_i = 1/-1$ 表示第 i 局的胜利或者是失败，那么我们要求的答案就是

$$E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[N]E[X] = pE[N]$$

$E[N]$ 是一个花样问题 [详见本讲义后两个习题的推导]，他的答案显然为

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{p^n}$$

所以此时的答案就显然是

$$\frac{p^k-1}{p^k-p^{k-1}}$$

至于第二问，要考虑赢的赌资期望数，相比第一问无非就是用 $Y_i=1/-1$ 表示第 i 局的赌资，那么我们要求的答案就是

$$E[\sum_{i=1}^{N}Y_i]=E[N]E[Y]=(2p-1)E[N]=(2p-1)\frac{p^k-1}{p^{k+1}-p^k}$$

题目 5 的注记:赌博或者随机游走什么的总要停止的东西，或者更一般的，你能看出存在一个停时的东西，往往列出停时用 wald 等式或者鞅停止定理就秒了

题目 6: 习题 3.22

解答:前两问用的思路是，书本的例 3.5(A) 告诉我们，期望数 $E[A|A]$(在已经投出一个 A 序列后，投出下一个 A 序列的期望次数) 非常的好求，因为他就等于在 n 时刻出现该序列的概率的倒数的极限值。我们通过找 A 的最长有用子序列 B(比如你要投出一个 1100，现在已经投出了一个 101，那么相当于你可以利用已经有的 1 来加速投掷，这个 1 就叫最长有用子序列，因为他是已经有的所有有用序列里面最长的)，就可以得到式子 $E[A]=E[A|B]+E[B]$，然后把问题化为只用求 $E[B]$, 用在这里就是

$$E[HHTTHH]=E[HHTTHH|HH]+E[HH]$$

$$E[HHTTHH|HH]=E[HHTTHH|HHTTHH]=\frac{1}{ppqqpp}$$

$$E[HH]=E[HH|H]+E[H]=E[HH|HH]+E[H]=\frac{1}{pp}+\frac{1}{p}$$

代入可得答案是 70[对这一问过程看不懂的可以参考书上例 3.5(A) 或者提问我] 同理我们可以计算得到

$$E[HTHTT]=E[HTHTT|HTHTT]=\frac{1}{pqpqq}$$

至于后两问的思路，我们假设 $M = minA, B$, 也就是首次出现两个花样中的某一个的次数，再用 P_A 表示 A 先出现的概率，这类题的通法就是，先求出 $E[A|B]$ 和 $E[B|A]$，然后再利用方程式

$$E[A] = E[M] + E[A|B](1 - P_A)$$

$$E[B] = E[M] + E[B|A]P_A$$

解二元二次方程就可以知道 $E[M]$ 和 P_A

这里最终答案是 $E[M] = 112/5 = 22.4$ 和 $P_A = 8/25 = 0.32$,E[A] 和 E[B] 怎么算我们前两问说了，这里来解释下 $E[A|B]$ 和 $E[B|A]$ 怎么算。

$$E[HHTTHH|HTHTT] = E[HHTTHH] = 70$$

$$E[HTHTT|HHTTHH] = E[HTHTT|H] = E[HTHTT] - E[H] = 32 - 2 = 30$$

可以看到计算都并不难

题目 6 的注记:这题属于是太经典了，这个问题好像学名叫" 花样问题"，书上例题也有详细的推导，我认为记下思路是一件非常快的事情

题目 7: 习题 3.24

解答:首先书后参考答案的方法很多人算出来答案是 86，我们先用参考答案的思路做一遍不妨假设 Q_i 为已经连续抽出 i 张同花色的牌了的事件, 那么根据例 3.5(A)，我们会有

$$E[Q_4|Q_4] = \lim(P(haveanupdateonn))^{-1} = (\frac{4}{4^4})^{-1} = 64$$

另一方面，我们用另一种方法计算 $E[Q_4|Q_4]$: 对下一张抽到的牌取条件，我们会有

$$E[Q_4|Q_4] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(E[Q_4|Q_1] + 1) = 1 + \frac{3}{4}(E[Q_4] - 1)$$

解方程可以得到 $E[Q_4] = 85$

当然，用这类题的一般思路做也是可以的，也就是说注意到 $E[Q_4|Q_4] =$

$64, E[Q_4|Q_4] = E[Q_4|Q_3]$, 我们有

$$E[Q_4] = E[Q_3] + E[Q_4|Q_3] = E[Q_3] + 64$$

同理有

$$E[Q_3] = E[Q_2] + E[Q_3|Q_2] = 16$$

$$E[Q_2] = E[Q_1] + E[Q_2|Q_1] = 1 + 4 = 5$$

不断代入就可以知道答案会是 85

题目 7 的注记:这类题只需要记住一件事情:$E[A|A]$ 是非常好算的 [例 3.5(A)], 我们要考虑如何利用 $E[A|A]$ 来计算出 E[A], 这题一个特殊的需要注意的点就是说 $E[Q_4] \neq E[Q_4|Q_1]$