第二周作业

助教-夏小凡

2024 年 3 月 15 日

题目 1: 习题 2.5

解答:独立增量和平稳增量都是显然的。不妨只验证定义 2.1.1 的第三条

$$
\begin{aligned}
P(N_1(t)+N_2(t)=n) &= \sum_{i=0}^{n} P(N_1(t)=i)P(N_2(t)=n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\lambda_1 t)^i(\lambda_2 t)^{n-i} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n}{n!}
\end{aligned}
$$

从而定义的第三条也满足

首个时间来源于 N_1 的概率是 [假设 X 是 N_1 的到来间隔，Y 是 N_2 的,Z 是 N_1+N_2 的]$P(X_1<Y_1)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$[具体计算过程详见第一次习题课讲义]

至于独立于事件发生的时刻应该是显然的，因为考虑条件 $\{Z_1>t\}$ 和事件 $X_1<Y_1$, 后者在前者取条件的条件概率，根据无记忆性，只是相当于考虑一个从 t 时刻开始的泊松过程，他和从 0 时刻开始并没有什么不同。

题目 1 的注记:这题也就是直接验证定义，泊松过程的两个定义都蛮好直接验证的。平凡

题目 2: 习题 2.8

解答:第一问只需要注意到

$$P(X_i > t) = P(U_i < e^{-\lambda_t}) = e^{-\lambda t}$$

第二问要你用第一问的结论，先把题目的式子转换为

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \le 1 < \sum_{i=1}^{n+1} X_i$$

你会发现不等式左边可以视为：一个速率为 λ 的泊松过程发生前 n 次的总时间，不等式右边就是发生前 n+1 次的总时间，所以有

$$P(N = n) = P(N(1) = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

证明完毕，对比会发现，有时候合理观察就不用大量硬算

题目 2 的注记:第一问平凡，第二问把 U_i 换成 X_i 后应该也不难想

题目 3: 习题 2.10

解答:第一问显然是分别取条件于等到车了和没等到车来算

$$E[T] = E[T|X \le s]P(X \le s) + E[T|X > s]P(X > s)$$

$$E[T] = E[X + R|X \le s](1 - e^{-\lambda s}) + (s + W)e^{-\lambda s}$$

$$E[T] = (E[X|X \le s] + R)(1 - e^{-\lambda s}) + (s + W)e^{-\lambda s}$$

再代入

$$E[X|X \le s] = \int_0^s \lambda s e^{-\lambda s} ds = \frac{1}{\lambda} - \frac{s e^{-\lambda s}}{1 - e^{-\lambda s}}$$

就可以知道原式是

$$(W - \frac{1}{\lambda} - R)e^{-\lambda s} + \frac{1}{\lambda} + R$$

上边这个函数的单调性其实就是指数函数的单调性，显然 $W - \frac{1}{\lambda} - R < 0$ 的时候函数递增，最小值点是 0，否则函数递减，最小值点是无穷远点。第三问要你解释：其实大概就是说，如果你认为等 s 的时间比等 0 的时间好，那么当你等了 s 之后，无记忆性会导致你过去等的时间全部作废，此时你

还是会觉得等 s 的时间比等 0 的时间好，以此类推你就会觉得等无穷久比不等好。所以你的等待结果要么是无穷要么是不等待

题目 3 的注记:第三问不重要，第一问应该是自然的硬算，第二问单调性是高中题

题目 4: 习题 2.11

解答:这题要理解为行人可以利用红绿灯等手段判断下一辆车还要多久来，我们不妨假设这个随机变量叫做 X。

$$E[t] = E[E[t|X]] = \int_0^{+\infty} E[t|X=x]P(X=x)dx$$

注意到 $X > T$ 的时候就直接过马路不等了，所以此时 E[t|X=x]=0, 所以有

$$= \int_0^T E[t|X=x]P(X=x)dx$$

$$= \int_0^T (x+E[t])\lambda e^{-\lambda x}dx$$

解这个一元一次方程就可以知道

$$E[t] = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda T-1}) - T$$

题目 4 的注记:计算倒是不难，列出条件期望的式子后就是个一元一次方程。

题目 5: 习题 2.12

解答:第一问要前 k 个事件都被记录，其实只需要他们不在失效的时候发生就好了。第一个事件当然不会在失效的时候发生，后面每个事件只要均满足到来间隔大于 b，就都不会在失效的时候被记录，所以概率也就是

$$\Pi_{i=1}^{k-1} P(X_i > b) = e^{-\lambda(k-1)b}$$

第二问根据无记忆性，只要去掉失效的时间就行了。[因为你考虑失效的那段时间，他发生了事件也是不记录在案的，你白等的时间也是被无记忆性

丢掉的，所以他完全不影响有几个时间被记录] 所以只需要求

$$P(N(t-(n-1)b) \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda[t-(n-1)b]} \frac{(-\lambda[t-(n-1)b])^k}{k!}$$

题目 5 的注记:感觉每个题都是在套条件期望公式或者玩弄无记忆性，这俩好好理解了一般就知道怎么列式子了。

题目 6: 习题 2.19

解答:这题基本就是对例 2.4(B) 的应用，例 2.4(B) 的结论说是速率为 λ 的泊松过程在该模型下的完成人数均值为 $\lambda \int_0^t G(s)ds$，而这里可以视为很多个速率为 $\lambda\alpha_j$ 的泊松过程叠加，同时速率为 $\alpha_j\lambda$ 的泊松过程又是一次会抵达 j 个人，所以最后均值就是

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j\lambda\alpha_j \int_0^t G(s)ds$$

第二问的话直观来看肯定不是的，因为你随便取点特殊的分布，比如服务时间一定是常数，公交车上的人一定是偶数，那么服务人数就永远是偶数，肯定不是泊松分布。

题目 6 的注记:书上的例子还是有必要好好看的，无论是趣味性还是思路都非常值得学习

题目 7: 习题 2.33

解答:第一问直接显然的计算即可

$$P(X > t) = P(N(\pi t^2) = 0) = e^{-\lambda\pi t^2}$$

第二问的话，其实就是对第一问的东西积分 [换元后用伽玛函数]

$$E[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\pi t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda\pi}}$$

第三问也是直接计算 [画图来看看大概是要求多少面积的地方没事件发生]

$$P(\pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

独立性是显然的，因为 i 和 j 不一样的时候，表示的区域不相交，所以对一个区域里面发生的数目取条件不会影响另一个区域里面发生的事件数目

题目 7 的注记:感觉这题也不太有难度，用到的求期望的公式可以记一记 [未来期中复习我也会强调]

题目 8: 习题 2.37

解答:不妨假设 $P(X_i = a_j) = p_j$, 那么有

$$X(t) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N_j(t)} a_j = \sum_{j=1}^{m} a_j N_j(t)$$

如果能够证明 $N_j(t)$ 是渐进正态分布的，利用正态分布的再生性就可以证明 $N_j(t)$ 的线性组合是渐进正态分布的，从而不失一般性的，我们来证明一个速率为 λ 泊松过程 $N(t)$ 是渐进正态分布的

考虑常规手段 [研究分布函数的收敛性，一般就是硬算特征函数]，我们考虑计算 $\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}$ 这个随机变量的特征函数，如果能证明他在 t 很大的时候趋于标准正态分布的特征函数，那么就证完了 [也就是证明一个泊松分布的特征函数会收敛到标准正态分布，但这个计算过程其实非常的无聊]

先考虑结论: 泊松分布的特征函数是 $e^{\lambda(e^{it}-1)}$，如果 X 的特征函数是 $f(t)$，那么 $(X-a)/b$ 的特征函数是 $e^{-\frac{iat}{b}} f(t/b)$，我们会有

$$f_Y(\mu) = exp[\lambda t e^{i\frac{\mu}{\sqrt{\lambda t}}} - \lambda t - i\mu\sqrt{\lambda t}]$$

把 exp 里面的第一项泰勒展开，你会发现后面两个相减恰好丢掉了前两项，然后第三项就是 $-\mu^2/2$，后面的项在 t 趋于无穷的时候都是无穷小，也因此就是说特征函数会收敛到 $exp[-\mu^2/2]$，也就证完了

题目 8 的注记:这题放在这门课比较不知所云，出于考试目的还是忽略比较好。

题目 9: 习题 2.39

解答:不妨假设 $s \le t$, 我们有

$$Cov(X(s), X(t)) = Cov(X(s), X(t) - X(s)) + Cov(X(s), X(s))$$

注意到 $X(t)-X(s)=\sum_{i=N(s)}^{N(t)}X_i$，而 N(t)-N(s) 和 N(s) 相互独立，所以右边第一项当然是 0，右边第二项就是 X(s) 的方差，也就是

$$Var[X(s)]=Var[E[\sum_{i=1}^{N(s)}X_i|N(s)]]+E[Var[\sum_{i=1}^{N(s)}X_i|N(s)]]$$

$$=Var[N(s)E[X]]+E[N(s)Var[X]]$$

$$=E^2[X]Var[N(s)]+Var[X]E[N(s)]=\lambda sE[X^2]$$

题目 9 的注记:上周作业也有个类似的计算题，基本就是利用独立分量来计算，必要的时候取一取条件期望 [条件方差公式要会用，期中是几乎必考的]

1 补充题

题目 10: [条件概率证明投票问题] 假设在一场投票中，A 最后获得了 n 票，B 最后获得了 m 票,$n>m$，假设票是一票一票投的，证 A 始终领先的概率是 $\frac{n-m}{n+m}$ 和 A 始终不落后的概率是 $1-\frac{m}{n+1}$

解答:使用数学归纳法，对于第一个式子，当 n+m=1 的时候显然成立，不妨假设要求的概率是 $P_{n,m}$，对最后一次选票属于 A 还是属于 B 取条件会有

$$P_{n,m}=\frac{n}{m+n}P_{n-1,m}+\frac{m}{m+n}P_{n,m-1}$$

用归纳假设代入即可得证。对于第二个式子，也是 m+n=1 的时候显然，列出来的递推式子也一模一样，代入归纳证明即可。

题目 10 的注记:不能对第一次票归谁取条件是因为，第一次票如果归 B，A 就不能一直领先或者不落后了，念山居的答案就是在这里犯了个错。

题目 11: [矩母函数一个小应用，涉及某个未来你可能用的到的放缩，顺便这还是我北美某学校的面试题] 假设 n 个 X_i 都服从 $N(0,1)$，不一定独立，证明 $E[maxX_i]\leq\sqrt{2lnn}$

解答:记 $Y = maxX_i$，考虑计算 Y 的矩母函数，我们有 [用到结论标准正态的矩母函数是 $exp[t^2/2]$]

$$E[exp[tY]] \leq \sum_{i=1}^{n} E[exp[tX_i]] = nexp[t^2/2]$$

对左边用 jensen 不等式，我们有

$$Exp[E[tY]] \leq E[exp[tY]] \leq nexp[t^2/2]$$

取对数整理也就是

$$E[Y] \leq \frac{lnn}{t} + \frac{t}{2}$$

对任意 t 都成立，因此对右边用一个可以取等的基本不等式就证完了

题目 12: [非齐次泊松过程的习题, 也就是速率不是常数] 课本的习题 2.32

解答:先证一个关键结论: 定义

$$N^*(t) = N(m^{-1}(t))$$

那么 $N^*(t)$ 是一个速率为 1 的泊松过程，证明非常简单。

$N^*(0) = 0$ 是显然的，独立增量也是显然的。考虑计算

$$P(N^*(t) = n) = P(N(m^{-1}(t)) = n) = e^{-m(m^{-1}(t))} \frac{[m(m^{-1}(t))]^n}{n!}$$

即可证明了，然后这里就用那儿的结论。

不妨假设达到时间为 V_i，$U_i = m(V_i)$

那么我们自然可以知道 U_i 是服从 $[0, m(t)]$ 上的均匀分布的，从而有

$$P(V_i \leq x) = P(m(V_i) \leq m(x)) = \frac{min[m(x), m(t)]}{m(t)}$$

至于第二问，我们注意到一个受伤的工人在 t 依旧受伤的概率是 [取条件于受伤的时间，就是一个积分了]

$$p = \int_0^t \bar{F}(t-s) d\frac{m(s)}{m(t)}$$

那么就可以得到 $X(t)|N(t)$ 是一个服从 $(N(t), p)$ 的二项分布，从而

$$E[X(t)|N(t)] = N(t)p, Var[X(t)|N(t)] = N(t)p(1-p)$$

再利用条件期望公式和条件方差公式不难得出

$$E[X(t)] = E[N(t)p] = pm(t)$$

$$Var[X(t)] = E[Var[X(t)|N(t)]] + Var[E[X(t)]] = pm(t)$$

题目 12 的注记:这道题弄懂基本非齐次泊松过程就不是问题了

题目 13: [复合泊松过程的习题,某年考试题]

2.（总 25 分，每小题 5 分）假设男性顾客和女性顾客分别以速率 λ_1 和 λ_2 独立地进入某个酒店，而每个男顾客和女顾客会购物的概率分别为 p_1 和 p_2，且与其他人相互独立。其中，$p_1 > 0, p_2 > 0$。

（1）设 $N(t)$ 表示到时刻 t 为止会购物顾客的人数，问 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为一个 Poisson 过程吗？若是，则写出其速率；若否，请说明理由。

（2）试求第 1 位会购物的顾客是女性的概率。

（3）试求在第 1 个男顾客进入酒店之前已进入该酒店的女性顾客数的分布律。

（4）试求在第 1 个会购物的男顾客进入酒店之前已进入该酒店的女性顾客数的分布律。

（5）假设 $\lambda_2 = 8, p_2 = \frac{1}{2}$，且会购物的女性顾客以概率 $\frac{1}{4}$ 采购 1 元的商品，以概率 $\frac{3}{4}$ 采购 2 元的商品。以 $S(t)$ 表示时刻 t 之前到达的女性顾客采购的商品总金额，求 $\mathrm{P}(S(1) = 4)$。

解答:第一问根据作业习题的结论容易知道速率是 $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, 第二问约等于作业原题，答案显然是 $\frac{\lambda_2 p_2}{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2}$, 第三问用无记忆性容易知道 $P(girl = n) = \frac{\lambda_1 \lambda_2^{n-1}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$, 第四问其实和第三问也差不多，相当于一个是速率为 $\lambda_1 p$ 的泊松过程，一个是速率为 λ_2 的泊松过程，把前一问的 λ_1 用 $\lambda_1 p$ 替换即可，最后一问就是分拆，只考虑一个速率为 $\lambda_2 p_2$ 的随机过程，分别考虑总共来了 4 个购物女性，3 个购物女性，2 个购物女性的概率再加起来，我就不算了。