第十次作业

助教-夏小凡

2024 年 5 月 17 日

先来说明一个视角相对高的理解：把条件期望理解为一个投影。

我们来看式子 E[X|Y]，我们都知道他是一个关于 Y 的随机变量，可以写为 $E[X|Y] = f(Y)$, 为什么是关于 Y 的随机变量呢，从直观角度理解，E[X|Y] 表示的是, 在已经知道 Y 的情况下, 对 X 的期望进行预测, 既然你手上的工具只有一个 Y，那么得出的函数当然是一个关于 Y 的函数，从这个角度来说，假设关于 Y 的函数组成一个空间 $\{f(Y)\}$, 那么条件期望 $X \to E[X|Y]$ 可以理解为把随机变量打到一个函数的映射，也就是把随机变量空间映射到关于 Y 的函数空间。

我们现在关心的问题是：应该映射到怎样的函数? 线性代数我们学过。如果把向量 x 投影到一个小的空间 W，那么假设投影后的向量是 y，我们应该有等式 $(x - y, w) = 0, \forall w \in W$, 其中圆括号表示的是内积，我们在条件期望的情形，其实也类似于寻找一个投影，那么我们要定义一个内积，最自然的想法就是定义 $(X, Y) = E[XY]$, 那么此时要找到投影 g(Y), 就需要满足等式 $(X - g(Y), f(Y)) = 0, \forall f$, 这也就是条件期望的原式定义了：我们说 g(Y) 是 X 关于 Y 的条件期望，如果对于任何关于 Y 的函数，我们有

$$E[Xf(Y)] = E[g(Y)f(Y)]$$

上述式子可以引出很多我们常用的定理，举例来说，取 f(Y) 为常数 1，可以得到结论: 条件期望的期望等于无条件期望。我这里给出一些我需要用到

的结论：

1. 如果 Y 的信息比 Z 多（也就是说知道了 Y，就肯定搞清楚了 Z），那么 X 关于 Z 的条件期望，等于 X 先关于 Y 取一次条件期望，再关于 Z 取一次条件期望。[直观来看，把一个向量先投影到一个比较大的空间，再投影到一个比较小的空间，是等价于直接把这个向量投影到比较小的空间的。这里 Y 的信息比 Z 多，就意味着 f(Y) 能表示的东西比 f(Z) 要多得多。因为此时 Z 可以直接写成 Y 有关的函数了。]，至于证明的话。不妨假设 g(Z) 是 X 关于 Z 的条件期望。h(Y) 是 X 关于 Y 的条件期望，我们只需要证明 g(Z) 也是 h(Y) 关于 Z 的条件期望就可以了 (这是因为在大部分情况下，条件期望是存在唯一的，具体是什么条件我就不展开说了) 这只需要验证是否有等式

$$E[g(Z)f(Z)] = E[h(Y)f(Z)]$$

而左边的式子根据 g(Z) 的定义就是 E[Xf(Z)], 右边的式子，注意到 f(Z) 也是个关于 Y 的函数，然后根据 h(Y) 的定义，也等于 E[Xf(Z)], 也就证完了

2. 如果 Y 和 X 是独立的。那么 E[X|Y]=E[X], 这个时候考虑验证式子

$$E[E[X|Y]f(Y)] = E[Xf(Y)]$$

独立性告诉我们右边等于 $E[X]E[f(Y)]$，也就显然等于左边了。

3. 如果 Y 会被 Z 决定。那么我们有 $E[f(X)g(Y)|Z] = g(Y)E[f(X)|Z]$ 这个比较直观，我就不写证明了。感兴趣可以自己证证。

题目 1: 习题 6.1

解答:直观：一个公平的赌博，你在已知第 k 局开始有多少钱，那么你在后面的局数结束后获得的钱理论上都是这么多。我们的定义相当于直接给出

了 n=k+1 的证明，下面用归纳法，假设对 n 是对的，证明对 n+1 的情况。[不妨记 $F_k = Z_1, \cdots, Z_k$, 那么显然，从信息量的角度来说，$F_k \in F_{k+1}$]

$$E[Z_{n+1}|F_k] = E[E[Z_{n+1}|F_n]|F_k] = E[Z_n|F_k] = Z_k$$

其中第一个等号是我们在本 pdf 开始提到的第一点，第二个等号是因为公平赌博的定义，第三个等号是因为归纳假设。

题目 2: 习题 6.2

解答:X_i 实际表示的是第 i 局赢的钱，显然如果 X_i 和 X_j 不相关就可以推出题目中的等式，而第 i 局的战果显然和第 j 局的战果无关，因此我们来证明这一点。也就是证明

$$E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = 0$$

显然有

$$E[X_i] = E[Z_i] - E[Z_{i-1}] = E[Z_0] - E[Z_0] = 0$$

所以只需要证明 $E[X_iX_j] = 0$, 不妨假设 $i < j$, 我们有（用的 pdf 开头的第四点）

$$E[X_iX_j] = E[E[X_iX_j|F_i]] = E[X_iE[X_j|F_i]]$$

而我们注意到（用的第一题的结论）

$$E[X_j|F_i] = E[Z_j|F_i] - E[Z_{j-1}|F_i] = Z_i - Z_i = 0$$

也就证毕了。

题目 3: 习题 6.4

解答:假设 X_n 是以 p 取 1，以 q=1-p 取-1 的随机变量，我们有

$$E[Z_{n+1}|F_n] = E[Z_n(\frac{q}{p})^{X_n}|Z_n] = Z_nE[(\frac{q}{p})^{X_n}]$$

$$= Z_n(p * \frac{q}{p} + q * \frac{p}{q}) = Z_n$$

证完了。

题目 4: 习题 6.6

解答:还是考虑计算 $E[Z_{n+1}|F_n]$, 此时相当于计算在给定 $X_n = x$ 的时候。$E[{\pi_0}^{X_{n+1}}]$ 应该是多少。此时总共有 x 个个体, X_{n+1} 表示这 x 个个体的子代之和。根据对称性, 假设第 i 个个体的子代有 Y_i 个, 那么我们有 $E[{\pi_0}^{Y_i}] = E[{\pi_0}^{Y_j}]$ 所以我们只需要计算 $E[\pi_0^Y]^x$, 而 $E[\pi_0^Y] = \sum_j P_i \pi_0^j = \pi_0$, 所以条件期望的结果应该是 $\pi_0^x = {\pi_0}^{X_n}$, 也就是鞅了

题目 4 的注记:本质还是利用我们那一堆直观的定理来计算条件期望。

题目 5: 习题 6.7

解答:

$$E[Z_{n+1}|F_n] = E[Z_n + 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 - \sigma^2 | F_n]$$

$$= Z_n + 2S_n E[X_{n+1}] + E[X_{n+1}^2] - \sigma^2 = Z_n + 0 + \sigma^2 - \sigma^2 = Z_n$$

题目 6: 习题 6.10

解答:对于 (a): 假设有前仆后继的赌徒预测接下来的 7 个序列应该是 HHTTHHT, 赌博是公平的，每天开盘一次，不妨假设第 N 天的时候，出现了一个 7 连中的赌徒。我们来考虑所有来下注过的人的亏损和盈利情况。

前 N-7 个赌徒总有一天赌输了。他们一无所有。一共亏损 N-7 元

第 N-6 个赌徒七连中，赢下所有，赌资从 1 元变成 $\frac{1}{p^4q^3}$, 一共赚了 $\frac{1}{p^4q^3} - 1$

第 N-5 个赌徒在第二次开盘输掉。一无所有。亏损 1 元

第 N-4 个赌徒在第一次开盘输掉。一无所有。亏损 1 元

第 N-3 个赌徒在第一次开盘输掉。一无所有。亏损 1 元

第 N-2 个赌徒三连中，赌资从 1 元变成 $\frac{1}{p^2q}$, 一共赚了 $\frac{1}{p^2q} - 1$

第 N-1 个赌徒在第二次开盘输掉。一无所有。亏损 1 元

第 N 个赌徒在第一次开盘输掉。一无所有。亏损 1 元

综合赌博是公平的，我们有

$$E[N - 7 + 5] = \frac{1}{p^4q^3} - 1 + \frac{1}{p^2q} - 1$$

从而有

$$E[N] = \frac{1}{p^4q^3} + \frac{1}{p^2q}$$

对于 (b) 的话。算法完全类似，答案是

$$E[N] = \frac{1}{p^4q^3} + \frac{1}{p^3q^2} + \frac{1}{p^2q} + \frac{1}{p}$$

题目 7: 习题 6.12

解答:选取 T 为停时，表示 X_n, Y_n, Z_n 第一次有一个为 0 的时刻，此时构造

$$M_n = X_nY_nZ_n + n$$

容易验证 M_n 是鞅差有限的鞅，从而鞅停止定理可以知道

$$E[M_T] = E[X_TY_TZ_T + T]$$

左边等于 $E[M_0] = xyz$, 右边等于 $E[T]$, 也就证明完了。

题目 8: 习题 6.13

解答:假设可以用的话。有

$$E[Z_N] = E[Z_1] = \frac{1}{2} * 2 = 1$$

但事实上 $E[Z_N] = E[0] = 0$

因此不能用鞅停止定理。事实上课本的三个正则条件，前两个可以显然验证无界，而这个鞅的鞅差

$$E[|Z_n - Z_{n-1}||F_{n-1}] = \frac{1}{2}Z_{n-1} + \frac{1}{2}Z_{n-1} = Z_{n-1}$$

是无界的，所以第三个正则条件也不可以用。

题目 9: 习题 6.24

解答:

$$E[Z_{n+1}|F_n] = Z_nE[\frac{P(X_{n+1}|A)}{P(X_{n+1}|B)}]$$

$$= Z_n E[\frac{a^{X_{n+1}}(1-a)^{1-X_{n+1}}}{b^{X_{n+1}}(1-b)^{1-X_{n+1}}}]$$

$$= Z_n(\frac{a}{b}b + \frac{1-a}{1-b}(1-b)) = Z_n$$

第二问只需要注意到这是一个正鞅。所以可以直接用鞅收敛定理。所以极限存在。

第三问的话，注意到

$$Z_{n+1} = Z_n h(X_{n+1})$$

其中 $h(X_{n+1})$ 以 b 的概率是 $\frac{a}{b}$，以 1-b 的概率是 $\frac{1-a}{1-b}$

所以事实上我们有

$$\ln Z_{n+1} = \sum_i \ln h(X_i)$$

大数定律告诉我们

$$\frac{\ln Z_{n+1}}{n+1} \to E[\ln h(X_1)] = b\ln(\frac{a}{b}) + (1-b)\ln(\frac{1-a}{1-b}) = t$$

根据严格凸函数的性质，我们有

$$t < ln(b * \frac{a}{b} + (1-b) * \frac{1-a}{1-b}) = ln1 = 0$$

这意味着

$$\ln Z_n = nt + o(n)$$

从而

$$Z_n = e^{nt+o(n)}$$

两边让 n 趋于无穷大可以知道 $Z_n \to 0ae$ 成立

题目 10: 习题 6.25

解答:毫无疑问 Z_n 是一个鞅，这里相当于研究鞅的极限，注意到这是一个正鞅，所以由鞅收敛定理，Z_n 会收敛到某个有限的极限。也就是说可以定义随机变量

$$Z_\infty(w) = \lim_{n\to\infty} Z_n(w)$$

题目 11: 习题 8.1

解答:首先 $Y(t_i)=t_iX(1/t_i)$ 可以写为 $X(1/t_i)-X(1/t_j)$ 的线性组合，而后者是高斯过程。所以前者也是，我们只需要利用均值向量和协方差矩阵确认这个高斯过程的分布。不妨假设 $s<t$

$$E[Y(t)]=tE[X(1/t)]=t*0=0$$

$$Cov[Y(s),Y(t)]=stCov[X(1/s),X(1/t)]=st*\frac{1}{t}=s$$

所以这是布朗运动。分布也就自然明了了。

第四问的话，要研究布朗运动 X(t) 首次回到原点的时间，让你用第三问的结论，我们慢慢来：

要证明 $P(T=0)=1$，只需要证对于任何 $\varepsilon>0$，有 $P(T>\varepsilon)=0$，而 $T>\varepsilon$ 意味着 $[0,\varepsilon]$ 内 X 没有击中原点，对应的也就是 $[\frac{1}{\varepsilon},\infty]$ 内 Y 没有击中原点，然而我们有 (中文课本 226 页)$P(T_a<\infty)=1$

这是说任意的点 a 都会在有限时间内被布朗运动击中，也就意味着

$$P(\sup_t B_t=+\infty,\inf_t B_t=-\infty)=1$$

从而布朗运动会无限次的击中原点（否则上述两个式子至多成立一个，所以在 $[\frac{1}{\varepsilon},\infty]$ 内 Y 没有击中原点概率显然是 0，也就证明完了）

题目 12: 习题 8.2

解答:类似 8.1 的论述，证明是高斯过程是显然的，期望为 0 也显然，我们不妨假设 $s<t$，那么有

$$Cov[W(s),W(t)]=\frac{1}{a^2}Cov[X(a^2s),X(a^2t)]=\frac{1}{a^2}a^2s=s$$

所以是布朗运动

题目 13: 习题 8.3

解答:注意到 $P(X(t+s)-X(s)=x)=f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

$$P(X(s)=x|X(t_1)=A,X(t_1)=B)=\frac{f_{t_1}(A)f_{s-t_1}(x-A)f_{t_2-s}(B-x)}{f_{t_1}(A)f_{t_2-t_1}(B-A)}$$

$$=C_1\exp(-\frac{(B-x)^2}{2(t_2-s)}-\frac{(x-A)^2}{2(s-t_1)})$$

$$=C_2\exp(-\frac{(t_2-t_1)}{2(t_2-s)(s-t_1)}(x-\frac{At_1+Bs-As-Bt_1}{t_2-t_1})^2)$$

这也就是说其服从分布

$$N(\frac{At_1+Bs-As-Bt_1}{t_2-t_1},\frac{(t_2-s)(s-t_1)}{t_2-t_1})$$