第五周作业

助教-夏小凡

2024 年 4 月 6 日

题目 1: 习题 3.26

解答:

$$E[money \quad in \quad (t,t+a)] = E[\sum_{i=N(t)+1}^{N(t+a)} R_i]$$

$$= E[\sum_{i=1}^{N(t+a)} R_i] - E[\sum_{i=1}^{N(t)} R_i]$$

$$= E[R][m(t+a) - m(t)] \rightarrow E[R]\frac{a}{E[X]}$$

题目 1 的注记:这道题应该非常简单，我就不做过多的解释了, 其中最后一步要用到命题 3.5.1 的第三个结论

题目 2: 习题 3.27

解答:直接对 $S_{N(t)}$ 取条件可以知道

$$E[R_{N(t)+1}] = E[R_{N(t)+1}|S_{N(t)} = 0]\bar{F}(t) + \int_0^t E[R_{N(t)+1}|S_{N(t)} = s]\bar{F}(t-s)dm(s)$$

$$= E[R_1|X_1 > t]\bar{F}(t) + \int_0^t E[R_1|X_1 > t-s]\bar{F}(t-s)dm(s)$$

这个极限用定理 3.4.2d 的关键更新定理可以直接算出来是

$$\int_0^\infty E[R_1|X_1 > t]\bar{F}(t)dt/\mu$$

然后代入条件期望等式 (*),

$$E[R_1|X_1 > t] = \sum_s E[R_1|X_1 = s, X_1 > t]P(X_1 = s|X_1 > t)$$

会有

$$= \int_0^\infty \int_t^\infty E[R_1|X_1 = s]dF(s)dt/\mu$$

利用 fubini 定理交换积分号顺序 (这个去年就考了，务必要自己亲手算算)

$$= \int_0^\infty \int_0^s dtE[R_1|X_1 = s]dF(s)/\mu$$

$$= \int_0^\infty sE[R_1|X_1 = s]dF(s)/\mu = \frac{E[R_1X_1]}{E[X_1]}$$

上述式子用到一个小结论就是说 t 趋于无穷大的时候

$$E[R_1|X_1 > t]\bar{F}(t) \to 0$$

这只需要注意到

$$E[R_1|X_1 > t]\bar{F}(t) = \int_t^\infty E[R_1|X_1 = s]dF(s)$$

而我们有

$$t\int_t^\infty E[R_1|X_1 = s]dF(s) \leq \int_t^\infty E[R_1X_1|X_1 = s]dF(s)$$

$$\leq E[R_1X_1] \Rightarrow \int_t^\infty E[R_1|X_1 = s]dF(s) \leq \frac{E[R_1X_1]}{t} \to 0$$

至于第二问很好验证，只需要注意到取等的时候有 $Var(X) = 0$, 也就是说 $P(X = EX) = 1$.

题目 2 的注记:对 $S_{N(t)}$ 取条件是要铭记于心的思路我就不强调了，取条件后把条件转换为到来间隔的条件也是很常见的。需要注意的是如何对已经取过条件的条件期望再取一次更细致的条件。

题目 3: 习题 3.28

解答:例子 3.6(C) 告诉我们 N^* 策略支付的平均费用是

$$\frac{cN}{2}+\frac{K}{N\mu}-\frac{c}{2}$$

均值不等式告诉我们最小费用应该是

$$\sqrt{2c\lambda K}-\frac{c}{2}$$

我们再考虑 T^* 策略的费用，这显然是要取条件于一个 T 内会来多少车子计算, 假设来 n 辆车的话，显然他们的到来时刻服从 $[0,T]$ 上的顺序统计量

$$E[money|N(T)=n]=E[c(T-U_{(1)})+\cdots+c(T-U_{(n)})]+K$$

$$=E[\sum_{i=1}^{n}c(T-U_i)]+K=nc\frac{T}{2}+K$$

再对 n 取期望即可知道答案是

$$\frac{\lambda cT^2}{2}+K$$

这是一个循环的费用，平均费用还要除个 T, 除完后用基本不等式可知最小费用是

$$\sqrt{2c\lambda K}$$

这也就证明了我们最后要的结论

题目 3 的注记:主要是阅读理解，说起来这门课遇到顺序统计量，一般都是利用求和去掉次序。

题目 4: 习题 3.29

解答:(a): 先来计算一次循环费用的期望，这显然要看旧的小汽车的寿命怎么样

$$E[money]=(C_1+C_2)F(A)+(C_1-R(A))\bar{F}(A)$$

$$E[time]=\int_0^A xdF(x)+A\bar{F}(A)$$

平均费用自然就是他们的比值

(b): 此时考虑用 $R(A)$ 价格卖出去的车的数目，他差不多是一个几何分布 (相差 1), 利用这个我们可以得到

$$E[money] = C_1 + C_2 + (\frac{1}{F(A)} - 1)(C_1 - R(A))$$

$$E[time] = (\frac{1}{F(A)} - 1)A + \int_0^A xd\frac{F(x)}{F(A)}$$

题目 4 的注记:也还是阅读理解，读懂题目再看我这个式子就知道啥意思了

题目 5: 习题 3.31

解答:不妨假设 F_i 的均值是 μ_i,G_i 的均值是 v_i，那么我们有

$$\lim P(i \quad work) = \frac{\mu_i}{\mu_i + v_i}$$

系统工作的概率就等于 12 在工作的概率乘上 34 在工作的概率，不难看出就是

$$(1 - \frac{v_1 v_2}{(\mu_1 + v_1)(\mu_2 + v_2)})(1 - \frac{v_3 v_4}{(\mu_3 + v_3)(\mu_4 + v_4)})$$

题目 6: 习题 3.32

解答:注意题目的条件：这里是来晚的人看到前面的人还在忙就会接着排队，而不会直接走掉。

根据排队论的基本方程 $L = \lambda W$[系统的平均顾客数 = 速率乘一个顾客在系统中消耗的平均时间] 我们有

$$L = \lambda \mu_G$$

根据中文课本 P243 的推论，等式的左边实际上就是 $1 - P_0$, 这也就意味着

$$P_0 = 1 - \lambda \mu_G$$

至于第二问，只需要注意到

$$P_0 = \frac{E[free]}{E[busy] + E[free]}$$

和 $E[free] = 1/\lambda$ 就可以解出来

$$E[busy] = \frac{\mu_G}{1-\lambda\mu_G}$$

第三问的话，显然有

$$E[busy] = E[N]\mu_G$$

从而推出

$$E[N] = \frac{1}{1-\lambda\mu_G}$$

题目 6 的注记:排队论是个有点深奥的东西，就期中来说应该不会考太难，如果你对他感兴趣可以多看看群里的参考书。里面有一章专门讲这个 [当然我更倾向于这玩意期中不考，等学了马尔科夫链什么的才考]，这题反正很怪，我不知道为啥要涉及一个完全没讲的推论。