第七周作业

助教-夏小凡

2024 年 4 月 28 日

题目 1: 习题 4.13

解答:假设 i 和 j 位于同一个互达等价类，那么存在一个 m 使得 $P_{ij}^m > 0$, 我们假设 i 是正常返的，下面我们证明 j 是正常返的。

记 N_k 为第 k 次抵达 i 的时刻，考虑极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\text{前}N_k + m\text{通过 i 访问 j 的次数}}{N_k + m}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\text{前}N_k + m\text{通过 i 访问 j 的次数}}{k} \frac{k}{N_k + m}$$

第一项的话，根据马尔科夫性，他其实就相当于 k 次伯努利实验里面的成功次数，根据大数定律，他会收敛到 P_{ij}^m, 至于第二项，他表示的相当于在一段很长的时间里面，访问 i 的次数与总时间的比值，他会收敛到 $\frac{1}{T_{ii}}$, 其中 T_{ii} 表示相邻两次进入 i 所需要的期望时间。

从而我们会有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\text{前}N_k + m\text{访问 j 的次数}}{N_k + m} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\text{前}N_k + m\text{通过 i 访问 j 的次数}}{N_k + m} = \frac{P_{ij}^{(m)}}{T_{ii}} > 0$$

这个极限是正的也就意味着 j 是正常返的。

如果我们假设 i 是零常返的，那么 j 也得是零常返的，因为如果 j 是正常返的，根据我们刚刚的讨论 i 就不可能是零常返的，这也就完成了这一题的证明。

题目 1 的注记:相当于利用放缩巧妙的求极限

题目 2: 习题 4.14

解答:先证明没有零常返，任取一个状态 i，假设他是零常返的，那么根据 4.13 的结论，i 的一整个可达等价类都会是零常返的。这个状态叫做 C 的话，我们就存在一列递增的正整数 m_n, 使得

$$\sum_{j\in C} P_{ij}^{m_n} = 1$$

等式的含义是，出于 C 是一个常返态组成的的子链，所以从 i 出发的状态，会反复的回到 C 这一个子链。

令 n 趋于无穷大，根据零常返的定义，我们会发现 $P_{ij}^{m_n}$ 的极限是 0(因为他事实上表示从 i 出发的马尔科夫链的状态位于 j 的长程比例，而零常返的长程比例当然是 0.)

所以左式是有限个 0 的求和，他当然也还是 0，不会等于 1，也就造成了矛盾

至于所有状态并非都是暂态就很好理解了，因为每个暂态至多只会被抵达有限次，所以有限多个暂态也最多只会被抵达有限次，这就意味着时间足够长后，所有状态都不可以被抵达了，这显然是不对的。

题目 3: 习题 4.16

解答:首先这个马尔科夫链有很多种定义方法，但是最方便的应该是考虑当前的 location 有几把伞。因为这样是否会淋湿基本只取决于当前 location 是否有伞，比较一统化。此时马尔科夫链的转移概率为

$$P_{0r} = 1, P_{i,r-i} = 1-p, P_{i,r-i+1} = p, i = 1, \cdots, r$$

第二问要计算极限概率，这根据我们的正文，本质就是去求解一个线性方程组，然后我们用 π_j 表示当前 location 极限状态下有 j 把伞的概率，可以列出方程

$$\pi_r = \pi_0 P_{0r} + \pi_1 P_{1,r} = \pi_0 + \pi_1 p$$

$$\pi_j = \pi_{r-j}P_{r-j,j} + \pi_{r-j+1}P_{r-j+1,j} = \pi_{r-j}(1-p) + \pi_{r-j+1}p$$

$$\pi_0 = \pi_r P_{r,0} = \pi_r(1-p)$$

解这个方程肯定要利用

$$\sum_{i=0}^{r} \pi_i = 1$$

我这里演示一下怎么用 [事实上好像基本这一类题都是这么解]：先无妨假设 $\pi_r = x$

那么最后一个方程会告诉我们 $\pi_0 = (1-p)x$, 然后再代入第一个方程会告诉我们 $\pi_1 = x$, 再代入第 r 个方程可以告诉我们 $\pi_2 = x$，以此类推可以知道除了 π_0 的值都是 x, 把它们加起来会是 1，也就是有

$$rx + (1-p)x = 1$$

也就是说 $x = \frac{1}{r+1-p}$, 这就求出了极限概率，至于第三问的话，答案自然就是

$$P(rain)\pi_0 = \frac{p(1-p)}{r+1-p}$$

题目 4: 习题 4.19

解答:(a): 这是从 i 一步转移到 j 的极限概率。

(b): 这是从 A 一步转移到 A^c 的极限概率

(c): 注意到连续的两次进入 A 中间必然进入了一次 A^c, 连续的两次进入 A^c 中间必然进入了一次 A, 就可以知道进入 A 和进入 A^c 的次数只差要么是 1 要么是 0

(d)：左边表示离开 A 的速率，右边表示进入 A 的速率，第三问告诉我们在很长的时间内这个次数最多相差 1，由于时间足够长，所以速率当然是一样的。

题目 5: 习题 4.21

解答:我们注意到：链子正常返当且仅当满足转移方程的极限概率唯一存在，因此我们可以通过考察线性方程组的解来研究是否正常返。首先不妨假设

$q_i = 1 - p_i$，类似之前的题目，我们可以列出极限方程

$$\pi_0 = \pi_1 q_1$$

$$\pi_i = \pi_{i+1} q_{i+1} + \pi_{i-1} p_{i-1}, i = 1, 2, \cdots$$

这个方程你一眼可以看出来

$$\pi_{i+1} q_{i+1} - \pi_i p_i = \pi_i q_{i+1} - \pi_{i-1} p_{i-1}$$

而注意到 $\pi_1 q_1 - \pi_0 p_0 = 0$，我们就可以推出

$$\pi_{i+1} q_{i+1} = \pi_i p_i$$

这也就是说

$$\pi_{i+1} = \frac{p_0 \cdots p_i}{q_1 \cdots q_{i+1}} \pi_0$$

代入 $\sum \pi_i = 1$ 会有

$$\pi_0 = (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_i}{q_1 \cdots q_{i+1}})^{-1}$$

从而正常返当且仅当

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_i}{q_1 \cdots q_{i+1}} < \infty$$

题目 5 的注记: