9.3.2 从微分的角度看隐函数定理

设 $F(x, y, u, v)$ 和 $G(x, y, u, v)$ 是两个可微的函数. 且由两个方程

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0$$

确定了可微的隐函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 将它们代入上面的方程组, 并分别对 x 和 y 求偏导数, 得

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

上面第一个方程两边乘以 $\frac{\partial G}{\partial v}$ 减去第二个方程两边乘以 $\frac{\partial F}{\partial v}$, 得

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

注意到

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

若 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

用同样的方法可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

类似可得到 u, v 对 y 的导数

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

当然, 此种情况下隐函数存在的前提条件之一仍然是

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0.$$

以下考虑更一般的情况. 设 $D\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 是开集. D 中的点写为 (x,y), 这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbb{R}^m$. 设

$$F=(F_1,F_2,\cdots,F_m):\ D\to\mathbb{R}^m,$$

则

$$JF=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}_{m\times(n+m)}$$

记

$$J_xF=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{m\times n},\quad J_yF=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}_{m\times m}$$

则有 $JF=(J_xF,J_yF)$.

定理 1 设 $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 是开集. 映射 $F = (F_1, F_2, \cdots, F_m): D \to \mathbb{R}^m$ 满足

(i) $F \in C^1(D)$;

(ii) $(x_0, y_0) \in D$ 使 $F(x_0, y_0) = 0$. 这里 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$;

(iii) 行列式 $\det J_y F(x_0, y_0) \neq 0$,

则存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 $U \times V$ 使得

1° 对每个 $x \in U$, 方程 $F(x, y) = 0$ 在 V 中有唯一的解 $y = f(x)$;

2° $y_0 = f(x_0)$;

3° $f \in C^1(U)$;

4° 当 $x \in U$ 时, 有

$$Jf(x) = -(J_y F(x, y))^{-1} J_x F(x, y),$$

其中 $y = f(x)$.

例 1 方程组

$$\begin{cases} u^2 - v + x = 0, \\ u + v^2 - y = 0, \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 的邻域中确定 u 和 v 是 x, y 的函数. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 设方程组已确定隐函数组

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y).$$

方程组的两个方程对 x 求导, 得到

$$\begin{cases} 2uu'_x - v'_x + 1 = 0, \\ u'_x + 2vv'_x = 0. \end{cases}$$

于是解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2v}{1+4uv}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+4uv}.$$

9.3.3 逆映射的微商

在一元函数情形. 设 $y = f(x)$ 有连续的导函数, $f'(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f'(x_0) > 0$, 因为导函数连续, 所以在 x_0 的一个领域 (a, b) 内, $f'(x) > 0$.这说明函数在 (a, b) 内严格单调增, 所以反函数 $x = f^{-1}(y)$ 存在, 记 $y_0 = f(x_0)$.

为了计算反函数的微商(即 x 对 y 的导数), 我们从另一个角度考虑.令 $F(x, y) = y - f(x)$, 则函数 $y = f(x)$ 是方程

$$F(x, y) = 0$$

的解. 但是另一方面, 因为 $F'_x(x_0, y_0) = -f'(x_0) \neq 0$, 根据隐函数的理论, 方程中也可解出隐函数 $x = x(y)$, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 而且他的导数是

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = \frac{1}{f'(x)},$$

所以

$$\frac{df^{-1}}{dy}\frac{df}{dx} = 1.$$

为了证明一般的逆映射定理, 先证明一个引理.

引理 1 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $f : D \to \mathbb{R}^m$ 是连续映射. 若 $V \subset \mathbb{R}^m$ 是开集, 则 $f^{-1}(V) = U := \{x \in D \mid f(x) \in V\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

证明 设 $x_0 \in U$. 则 $y_0 := f(x_0) \in V$. 因为 V 是开集, 所以存在 $\varepsilon > 0$ 使 $B(y_0, \varepsilon) \subset V$. 又因为 f 在 x_0 连续, 所以对这个 ε 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B(x_0, \delta)$ 时, 就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即

$$f(x) \in B(y_0, \varepsilon) \subset V.$$

由此得到 $x \in U$. 因而

$$B(x_0, \delta) \subset U.$$

这表明 x_0 是 U 的内点. 所以 U 是开集.

定理 2 (**局部逆映射定理**) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $x_0 \in D$. 如果映射

$$f : D \to \mathbb{R}^n$$

满足

(i) $f \in C^1(D)$;

(ii) $\det Jf(x_0) \neq 0$,

那么存在 x_0 的一个邻域 U 和 $y_0 := f(x_0)$ 的一个邻域 V 使得

1° $f(U) = V$, 且 f 在 U 上是单射;

2° 记 g 是 f 在 U 上的逆映射, 则有 $g \in C^1(V)$;

3° 当 $y \in V$ 时, 有

$$Jg(y) = (Jf(x))^{-1},$$

其中 $x = g(y)$.

证明 设

$$F(x,y)=f(x)-y.$$

则 $F: D\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 且 $F\in C^1(D\times\mathbb{R}^n)$, $F(x_0,y_0)=0$. 又有

$$\det J_xF(x_0,y_0)=\det Jf(x_0)\neq 0.$$

根据隐映射定理, 存在 x_0 的邻域 $H\subset D$ 和 y_0 的邻域 V, 使得对每个 $y\in V$, 方程 $F(x,y)=0$ 在 H 中有唯一的解, 记作 $x=g(y)$, 且 $g\in C^1(V)$,

$$\begin{aligned} Jg(y) &= -(J_xF(x,y))^{-1}J_yF(x,y)\\ &= -(Jf(x))^{-1}(-I_n), \quad I_n \text{ 是 } n\times n \text{ 单位方阵}\\ &= (Jf(x))^{-1}. \end{aligned}$$

令 $U=g(V)$, 则 $f(U)=V$. 因为 U 实际上是 V 关于 f 的原像与 H 的交集, 即, $U=H\cap f^{-1}(V)$. 由引理知 $f^{-1}(V)$ 是开集, 因而 U 是开集.

证毕.

设 U 和 V 都是 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 映射 $f: U \to V$ 可微且可逆, 其逆映射为 g. 图示如下

$$(x_1, \cdots, x_n) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (y_1, \cdots, y_n)$$

$$\det Jf = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}$$

$$\det Jg = \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}$$

因为 $Jg = (Jf)^{-1}$, 所以 $\det Jg = (\det Jf)^{-1}$, 即,

$$\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = 1.$$

定理 3 (整体逆映射定理) 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是开集. 如果映射

$$f : D \to \mathbb{R}^n$$

满足两个条件

(i) $f \in C^1(D)$;

(ii) 对每个 $x \in D$, 有 $\det Jf(x_0) \neq 0$,

则 $G = f(D)$ 为一个开集. 如果还满足

(iii) f 在 D 上是一个单射,

那么存在由 G 到 D 的映射 f^{-1} 使得对一切 $y \in G$ 有

$$f \circ f^{-1}(y) = y,$$

且

$$Jf^{-1}(y) = (Jf(x))^{-1},$$

其中 $x = f^{-1}(y)$.

注意 定理 4 中条件 (i), (ii) 一般不能推出条件 (iii). 因此, 一般情况下, 在每一点的局部逆映射存在还不能保证整体逆映射存在. 例如,

例 2 设 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$f: (x_1, x_2) \in D \to (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

使得

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3}x_1^3 + x_1 x_2^2, \\ y_2 &= x_2. \end{aligned}$$

则有

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = x_1^2 + x_2^2 \neq 0.$$

但整体逆映射不存在.

例 3 求极坐标变换 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ 的反变换的偏导数.

解 由逆映射定理

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$