第二次随堂小测验

Shuo Fang

June 10, 2021

1 已知单位摩尔的实际van der Waals气体的状态方程为$(p+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT$。试求解:

（1）在$p-V$图上画出数条显示趋势的VDW等温曲线;

（2）如果认为气液相变临界点C是温度升高时等温线极大值点和极小值点的重合处，那么$p-V$在C点应该有什么关系？然后由此推导出临界点参数(T_C,V_C,p_C);

（3）证明VDW气体的等容比热c_V仅仅时温度T的函数。

解：（1）如张玉民书208面图6.17所示;

（2）在临界点处，是极值点和拐点的重合处。

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T=0\\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_T=0\end{cases}$$

对于$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}$，我们可以求解出:

$$\begin{cases}-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^2}=0\\ \frac{2RT}{(v-b)^3}-\frac{6a}{v^4}=0\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}v_c=3b\\ T_c=\frac{8a}{27Rb}\end{cases}\quad\Rightarrow p_c=\frac{a}{27b^2};$$

（3）首先，由书上公式（3.2.6）

$$\begin{aligned}dU &= C_V dT+\left(T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p\right)dV\\ \Rightarrow\frac{\partial C_V}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p\right)_V=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{a}{V^2}\right)_V=0\end{aligned}$$

因此，由于$C_V=C_V(p,T)=C_V(p(V,T),T)=f(V,T)$，但是上式告诉我们，热容和体积无关，所以VDW气体的内能仅仅是温度的函数$C_V=f(T)$。

2 在地球内部，压力随着深度的增加而增大。试计算地球表面附近某晶体熔点在2km深处是多少？已知地表处其熔点为900K，该晶体的固液密度比为$\frac{\rho_s}{\rho_l}=1.20$，其相变潜热为115$cal/g$。

解：根据流体静力学方程，对于融化的晶体，我们可以得到：

$$\begin{aligned}(p+dp)S &= pS+mg=pS+\rho_l gSdh \\ \Rightarrow \frac{dp}{dh} &= \rho_l g\end{aligned}$$

而根据Clapeyon方程，我们有

$$\frac{dp}{dT_m}=\frac{L}{T_m(v_l-v_s)}=\frac{L}{T_m(\frac{1}{\rho_l}-\frac{1}{\rho_s})}$$

所以我们可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{dT_m}{dh} &= \frac{dT_m}{dp}\frac{dp}{dh}=\frac{T(\rho_s-\rho_l)}{L\rho_s\rho_l}\rho_l g=\frac{gT_m}{L}(1-\frac{\rho_l}{\rho_s}) \\ &= \frac{9.8T_m(1-\frac{1}{1.20})\times 1000}{115\times 4.186\times 1000}K/km \\ &= 3.39\times 10^{-3}T_m \ \ K/km \\ \Rightarrow T_m(h=2km) &= T_m(0)e^{3.39\times 10^{-3}h(km)}K \\ &= 900\times e^{3.39\times 10^{-3}\times 2(km)}K \\ &= 906.13K\end{aligned}$$