第一章事件与概率

1.5 条件概率

1. 条件概率的定义

一般讲, 条件概率就是在知道了一定的信息下所得到的随机事件的概率. 如两个工厂 A 和 B 生产同一品牌的电视机, 商场中该品牌有个统一的次品率, 比如 0.5%, 如果你从某个途径知道该商场的这批电视机是 A 厂生产的, 则你买到的电视机的次品率不再是 0.5%, 这个概率就是条件概率.

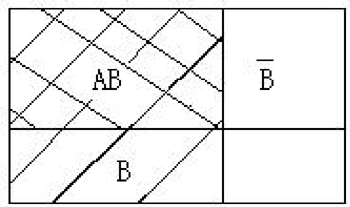
设事件 A 和 B 是随机试验 Ω 中的两个事件，$P(B) > 0$ ，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率.

Definition

注 1. $P(A)$ 和 $P(A|B)$ 是不同的两个概率. 如图, 设矩形 A 的面积为 *1*, 则 *P(A)* 表示 A 的面积, 而 $P(A|B)$ 表示在 B 中, A 所占的比例, 即 AB 这块面积在 B 中所占的比例.



注 2. 可以从概率的统计定义, 即用频率来近似概率这一角度来理解条件概率. 设在 n 次独立试验中, 事件 A 发生了 n_A 次, 事件 B 发生了 n_B 次, 事件 AB 发生了 n_{AB} 次, 事件 B 发生下事件 A 发生的频率为

$$\frac{n_{AB}}{n_B} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

注 3. 事实上, 我们所考虑的概率都是在一定条件下计算的, 因为随机试验就是在一定的条件下进行的, 所以样本空间是相对而言的. 如果把在一定条件下的随机试验看成无条件的, 则在补充条件下进行的随机试验的结果一般而言相对于原有结果要少, 即样本空间改变了. 所以所得随机事件的概率一般是不相同的.

↑Example

有 10 个产品, 内有 3 个次品, 从中一个个地抽取 (不放回) 检验, 问第一次取到次品后第二次再取到次品的概率.

↓Example

解:

2. 乘法定理

由 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$
由归纳法容易推广为 n 个事件同时发生的概率有如下公式:

$$\boxed{P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})}$$

上面公式的右边看似麻烦, 其实在实际中很容易算出. 在没有给出 n 个事件之间相互关系时, 这是计算 n 个事件同时发生的一个重要公式.

↑Example

某人忘了某饭店电话号码的最后一个数字, 因而随意拨号, 问他三次之内拨通电话的概率.

↓Example

解:

↑Example

将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接, 试求恰好连成 n 个圈的概率.

↓Example

解:

1.5.1 全概率公式和 Bayes 公式

1. 全概率公式

设 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 是样本空间 Ω 中的两两不相容的一组事件，即 $B_iB_j = \phi$，$i \neq j$，且满足 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割. Definition

全概率公式:

设 $\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$ 是样本空间 Ω 的一个分割, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, \cdots, n)$, A 为 Ω 中的一个事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

↑Example

设某厂产品的一个零部件是由三家上游厂商供货的. 已知有一半是 B_1 厂提供的, B_2 厂商和 B_3 分别提供 25% . 已知厂商 B_1 和 B_2 的次品率都是 2%, B_3 的次品率为 4%, 从该厂产品中任取一个产品, 问该产品的这个零部件是次品的概率.

↓Example

解:

↑Example

将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接, 求恰好连成 n 个圈的概率.

↓Example

解:

↑Example

(Polya 罐子模型) 罐中放有 a 个白球和 b 个黑球, 每次从罐中随机抽取一个球, 并连同 c 个同色球一起放回罐中, 如此反复进行. 试证明: 在第 n 次取球时取出白球的概率为 $\frac{a}{a+b}$.

↓Example

证:

↑Example

一罐内有 a 个黑球和 b 个白球，从中任意取一球，如果是白球则将它放回去，如果是黑球，则从另一罐内取一白球替换它放回去。在重复 n 次这样的做法后，求第 n+1 次取出的是白球的概率。

↓Example

解:

2. Bayes 公式

设 $\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$ 是样本空间的一个分割, A 为 Ω 中的一个事件, $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

什么情况下用 Bayes 公式? 由公式知, 分母就是事件 A 的概率, 而分子和等式左边的条件概率中的条件正好反过来. 所以我们知道在因果关系互换时必须用 Bayes 公式.

↑Example

一种诊断某癌症的试剂, 经临床试验有如下记录: 有癌症病人阳性的概率为 95%, 无癌症病人阴性的概率为 95%. 现用这种试剂在某社区进行癌症普查, 设该社区癌症发病率为 0.5%, 问某人反应为阳性时该人患癌症的概率.

↓Example

解:

1.5.2 事件的独立性

为了计算两个事件同时发生的概率, 可以运用乘法定理, $P(AB) = P(A|B)P(B)$. 什么情况下 $P(AB) = P(A)P(B)$? 或者等价地, $P(A|B) = P(A)$?

即 AB 同时发生的概率等于两个事件单独发生概率的乘积? 为此我们有如下的定义:

设 A, B 是随机试验中的两个事件, 若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 和 B 相互独立.

Definition

关于独立的概念, 应该是从实际出发, 如果能够判断事件 B 的发生与否对事件 A 的发生与否不产生影响, 则事件 A, B 即为独立. 如把一个硬币掷两次, 观测正反面出现的情况, A ={第一次出现正面}, B ={第二次出现正面}, AB ={两次都出现正面}, 样本空间 Ω 有 4

个基本事件, $\#(AB) = 1, \#(A) = 2, \#(B) = 2$, 故

$$P(AB) = 1/4,\ P(A)P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

即事件 A, B 相互独立. 事实上, 我们容易判断第一次是否出现正面与第二次是否出现正面没有任何影响, 即独立的. 设 $\tilde{A}$ 表示事件 A 发生和不发生之一, $\tilde{B}$ 表示事件 B 发生和不发生之一. 由独立性的定义可以推知 $P(\tilde{A}\tilde{B}) = P(\tilde{A})P(\tilde{B})$, (这儿一共 4 个等式) .

独立性的定义可以推广到 n 个事件.

设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是随机试验中的 n 个事件，以 $\tilde{A}_i$ 表示 A_i 或 $\bar{A}_i$ 之一. 若满足

Definition

$$P(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\cdots\tilde{A}_n) = P(\tilde{A}_1)P(\tilde{A}_2)\cdots P(\tilde{A}_n),$$

则称事件列 $A_1, A_2, \cdots A_n$ **相互独立**. (上面有 2^n 个等式)

注意: 上面等式等价于对 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 中的任意 k 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, $k = 2, \cdots n$, 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

若 $A_1, \cdots, A_n$ 中任意两个事件相互独立, 则称为**两两独立**.

注意: 独立和不相容是不同的两个概念.

↑Example

(两两独立而不相互独立的反例) 有四个同样的小球, 分别在其上写上“1”, “2”, “3” 和 “1,2,3”。引进三个事件: A_i={随机取一球, 球上有数字 i}, $i = 1, 2, 3$. 试讨论事件 A_1, A_2, A_3 是否相互独立.

↓Example

解:

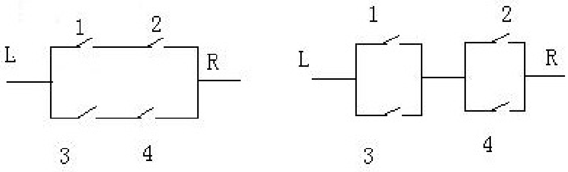
A,B,C 三人独立地破译密码, 每人能破译密码的概率分别为 $1/3, 1/4, 1/5$. 问密码能被破译的概率有多大?

↑Example
↓Example

解:

↑Example

在元件可靠性研究中, 我们考虑如下两种电路:



其中 1-4 表示 4 个继电器, 它们是否开通是相互独立的, 设继电器导通的概率为 $p, (0 < p < 1)$, 求两种电路从 L 到 R 为通路的概率.

↓Example

解:

↑Example

假设某个人独立向同一目标射击 n 次, 每次命中目标的概率为 $p(p < 0.05)$, 求他在 n 次射击中至少有一次命中目标的概率.

↓Example

解:

小概率原理

一个事件如果发生的概率很小的话，那么它在一次试验中是几乎不可能发生的，但在多次重复试验中几乎是必然发生的，数学上称之**小概率原理**。

↑Example

某停车场有 16 个并排的车位, 有天发现有 12 个车位停了车, 4 个相连的车位还空着. 由此能得出什么结论?

↓Example

- 购买彩票
- 乘坐飞机
- ...

↑Example

如果我们提出这样一个问题:“你考试作弊过吗?”恐怕我们得不到正确的回答。对此，我们的另一种做法是列出如下两个问题（其中一个是无关紧要的）:

S: 你考试作弊过吗?

T: 你的电话号码末尾是偶数吗?

要求被提问者在无人旁观情况下投掷一个硬币，出现正面时正确回答 S，反面时正确回答 T。提问者并不知道被提问者回答的是哪个问题。在一次对 120 名学生的调查中，有 40 个回答“是”。试计算考试作弊的概率。

↓Example

解: