Parseval 等式的推论

设 $L^2[-\pi,\pi]$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积的函数全体 (即, 对于 $f \in L^2[-\pi,\pi]$, 若 $f(x)$ 有界, 则 $f \in \mathrm{R}[-\pi,\pi]$. 若 $f(x)$ 无界, 则 f 和 f^2 都广义可积), 则有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

这称为 Bessel 不等式, 其中 a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

进一步有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

这称为 Parseval 等式.

推论 1 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积函数, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数, 则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

一般地, 有

引理 1 (Riemann-Lebesgue) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上可积且绝对可积函数(即, 若 f 有界, 则 f Riemann 可积; 若 f 无界, 则 f, $|f|$ 都广义可积, b 也可以为 $+\infty$), 则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\cos \lambda x\, dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)\sin \lambda x\, dx = 0. \tag{12.1}$$

证明 我们只证明 $[a,b]$ 为有限区间且 f 为 Riemann 可积的情况. 此时存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任意 $x\in[a,b]$ 成立. 记 $n=[\sqrt{\lambda}]$ 是 $\sqrt{\lambda}$ 的整数部分. 则当 $\lambda\to+\infty$ 时, 有 $n\to+\infty$. 现在把区间 $[a,b]$ 分成 n 等份, 分点为

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\ (i=0,1,\cdots,n).$$

记 ω_i 为 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0, \tag{12.2}$$

这里 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 注意到

$$|\cos\lambda x|\leqslant 1,\quad \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\right|dx=\frac{1}{\lambda}|\sin\lambda x_{i-1}-\sin\lambda x_i|\leqslant\frac{2}{\lambda}.$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

以及

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(x)-f(x_{i-1})\big)\cos\lambda x\,dx + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx,$$

利用 (12.2) 可得

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2n}{\lambda}M$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}M \to 0\ (\lambda\to+\infty).$$

于是 (12.1) 中第一个式子成立. 类似地, 可证 (12.1) 中第二个式子成立.

推论 2 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且 $f(x)$ 与三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

中每个函数都正交, 则 $f(x)\equiv 0$.

证明 由条件知 $f(x)$ 的 Fourier 系数都为 0, 因而由 Parseval 等式知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=0.$$

由于 $f(x)$ 是连续函数, 上式蕴含 $f(x)\equiv 0$.

推论 3 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且他们有相同的 Fourier 系数, 则 $f(x)\equiv g(x)$.

推论 4 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积函数, a_n, b_n 和 α_n, β_n 分别是 f 和 g 的 Fourier 系数, 则有

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx.$$

证明 易知 $f+g$ 的 Fourier 系数为 $a_n+\alpha_n, b_n+\beta_n$. 而 $f-g$ 的 Fourier 系数为 $a_n-\alpha_n, b_n-\beta_n$. 因此根据 Parseval 等式, 有

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\,dx$$

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,dx.$$

将此二式相减再除以 4, 即得所证.

推论 5 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积函数, a_n, b_n 是 f 的 Fourier 系数, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

则对 $[-\pi,\pi]$ 中任意子区间 $[a,b]$ 有

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) dx.$$

证明 设 g 是任一 $[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积函数, 其 Fourier 系数为 α_n, β_n. 根据推论 4, 有

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\alpha_n + b_n\beta_n\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

将

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$$

代入上式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\big(a_n\cos nx + b_n\sin nx\big)\,dx\\ &\quad = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

令

$$g(x) = \begin{cases}1, & x\in[a,b]\\ 0, & x\in[-\pi,\pi]\setminus[a,b]\end{cases}$$

即得所证.

例 1 我们已有 Fourier 展开

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

将此式的两边在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{8} &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2k-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}.
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x<1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\right)\sin n\pi x\right].$$

将此式在 $(0,1)$ 上积分, 得

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n\pi^2}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1+\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\right)\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1\right].$$

即,

$$\frac{1}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^3}\right)\cdot\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

由此并利用 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi\end{cases}$ 求证:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\ (|x|\leqslant\pi)$$

并求

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

证明 将 $f(x)$ 奇延拓到 $(-\pi,0]$, 再以 2π 为周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$, 则有

$$a_n=0,$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx \\
&= \frac{\pi-1}{\pi}\left(-\frac{\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n^2}\right) + \left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_1^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_1^{\pi} \\
&= \frac{\pi-1}{\pi}\left(\frac{\sin n}{n^2}-\frac{\cos n}{n}\right) + \frac{\cos n-(-1)^n}{n} + \frac{\pi(-1)^n-\cos n}{n\pi} + \frac{\sin n}{n^2\pi} \\
&= \frac{\sin n}{n^2}.
\end{aligned}
$$

因为 $f(x)$ 是分段线性且连续的, 所以

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\ \ (|x|\leqslant\pi)
$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

令 $x = 1$, 可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

利用逐项求导, 可得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n \cos nx}{n},\ x \in (-1, 1).$$

令 $x = 0$, 得到

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n} = f'(0) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

对 $f(x)$ 的 Fourier 级数用 Parseval 等式, 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{(\pi - 1)^2}{6}.$$