乘法：设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$，则 $z_1 z_2 = r_2 r_1 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

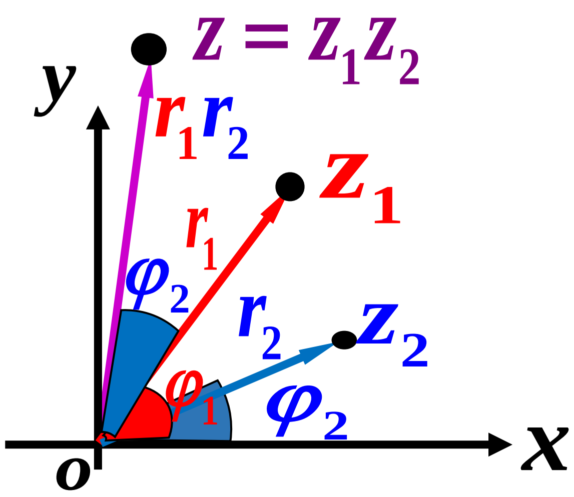
两复数相乘就是把它们的模相乘，辐角相加.

乘法几何含义：记z_1, z_2对应向量分别为$\vec{z}_1, \vec{z}_2$，

乘积$z_1 z_2$：先把向量$\vec{z}_1$ 按逆时针方向旋转一个角度φ_2，

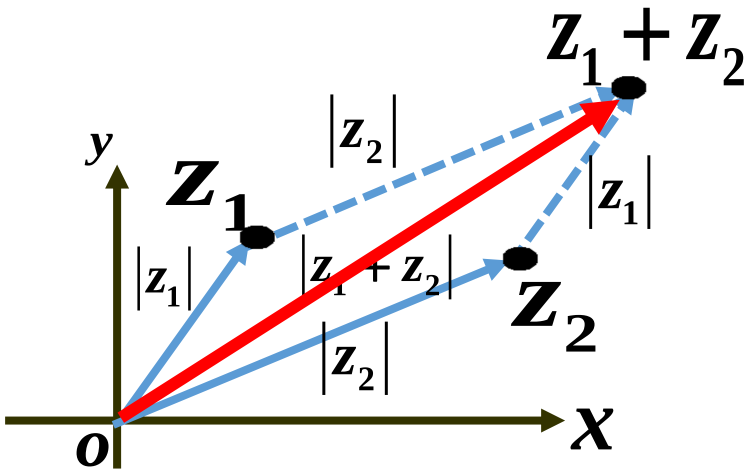
再把它的长度伸缩到原来的r_2倍，

所得向量 $\vec{z}$ 就表示乘积 $z_1 z_2$对应向量.

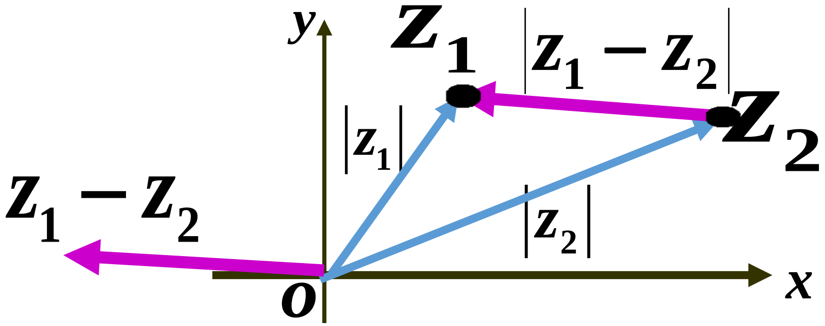


复数相乘 $\longleftrightarrow$ 旋转 + 伸缩

复数的和差运算的几何意义（与向量和差运算的几何意义一致）



和：$z_1+z_2=x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2)$,
$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2).$$



差：$z_1-z_2=x_1-x_2+\mathrm{i}(y_1-y_2)$,
$$(x_1,y_1)-(x_2,y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2).$$

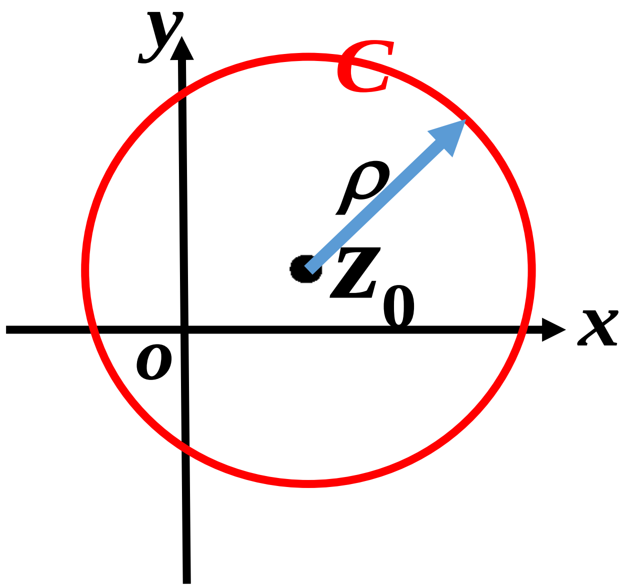
z_1-z_2 表示 z_2(起点) 指向 z_1(终点) 的向量(从减数指向被减数).

$|z_1-z_2|$ 表示 z_1和z_2 之间的距离. ★★★

$|z_1 - z_2|$ 表示 z_1和z_2 之间的距离.

特殊图形的复数表示

$C: |z - z_0| = \rho$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆周.



$z=x+\mathrm{i}\,y,$ $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}},$ $\boxed{x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z}.}$

$\boxed{\text{背熟}}$

平面曲线$F(x,y)=0$可表示为复数形式$F\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2},\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)=0.$

例 写出$x^2+2x+y^2+4y=1$ 的复数形式. (类似于P19习题第20题)

解 记$z=x+\mathrm{i}\,y$, 则

$$1=x^2+2x+y^2+4y=z\bar{z}+\cancel{2}\cdot\frac{z+\bar{z}}{\cancel{2}}+\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{z-\bar{z}}{\cancel{2}\mathrm{i}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}}$$

$$=z\bar{z}+(1-2\mathrm{i})z+(1+2\mathrm{i})\bar{z}$$

$$=\{\bar{z}+(1-2\mathrm{i})\}\{z+(1+2\mathrm{i})\}-(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$$

$$=|z+(1+2\mathrm{i})|^2-5.\quad \text{解得}|z+(1+2\mathrm{i})|=\sqrt{6}.$$

它表示以$-(1+2\mathrm{i})$为中心、$\sqrt{6}$为半径的圆周. #

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}.$$

复数的乘方

设 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 0$，则

$$z^n = (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = r^n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi).$$

特别是$r=1$时，$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$ 德•莫弗公式

$$z^{-n} \triangleq \frac{1}{z^n} = \frac{1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}}{r^n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}} = r^{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi} = r^{-n}\{\cos(-n\varphi) + \mathrm{i}\sin(-n\varphi)\}.$$

$(r>0)$

复数的开方(乘方的逆运算)

设$z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$已知, 则称$w^n=z$ 的所有解w为z 的n 次方根, 记作 $\sqrt[n]{z}$.

令$w=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\rho>0$, 代入$w^n=z$得 $\rho^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 故

$$\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\quad 故$$

$\rho=\left(\sqrt[n]{r}\right)>0,\ \theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$, $\left(\sqrt[n]{r}\right)$表示r 的n 次非负实方根.

故 $w=\sqrt[n]{z}=\left(\sqrt[n]{r}\right)\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,2,\cdots,n-1.$

$\boxed{背熟}$

(因为cos, sin都是以2π为周期, 故$\sqrt[n]{z}$ 有且只有n个不同的值.)

$z = r e^{i\varphi}$, $\boxed{\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r})\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,\cdots,n-1.}$ 背熟

例. 求 (1). $\sqrt{-1-(\sqrt{3})i}$; (2). $\sqrt[3]{-\{1+(\sqrt{3})\}i}$.

解 (1). $\left|-1-(\sqrt{3})i\right| = (\sqrt{1+3}) = 2$,

$\arg(-1-(\sqrt{3})i) = -\pi + \arctan(\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$, 故 $-1-(\sqrt{3})i = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\sqrt{-1-(\sqrt{3})i} = (\sqrt{2})\left\{\cos\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right\},\quad k = 0,1.$$

$$\text{故}\sqrt{-1-(\sqrt{3})i} = \begin{cases} (\sqrt{2})\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{(\sqrt{2})}{2} - i\frac{(\sqrt{6})}{2}, & k = 0, \\ (\sqrt{2})\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\} = -\frac{(\sqrt{2})}{2} + i\frac{(\sqrt{6})}{2}, & k = 1. \end{cases}$$

$z=re^{i\varphi}$， $\boxed{\sqrt[n]{z}=(\sqrt[n]{r})\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\cdots,n-1.}$ 背熟

例．求 (1). $\sqrt{-1-(\sqrt{3})i}$; (2). $\sqrt[3]{-\{1+(\sqrt{3})\}i}$.

解 (2). $\left|-\{1+(\sqrt{3})\}i\right|=1+(\sqrt{3})$, $\quad \arg\{-\{1+(\sqrt{3})\}i\}=-\frac{\pi}{2}$,

故 $-\{1+(\sqrt{3})\}i=\{1+(\sqrt{3})\}e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

则 $$\sqrt[3]{-\{1+(\sqrt{3})\}i}=\left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)\left\{\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right\},\quad k=0,1,2.$$

故 $$\sqrt[3]{-\{1+(\sqrt{3})\}i}=\begin{cases}\left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)\left\{\frac{(\sqrt{3})}{2}-\frac{1}{2}i\right\}, & k=0,\\ \left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)i, & k=1,\\ \left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\left(\sqrt[3]{1+(\sqrt{3})}\right)\left\{-\frac{(\sqrt{3})}{2}-\frac{1}{2}i\right\}, & k=2.\ \#\end{cases}$$

1.1.5 复数列极限、无穷远点

定义1(P11-12)：设$z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$是一个有序复数列，$z_0$是一个给定的复数，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-z_0|=0$，则称 z_0 是复数列$\{z_n\}$的极限，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=z_0$.

定义 ⇒ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-z_0|=0.}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{使得当}n>N\text{时},\ |z_n-z_0|<\varepsilon.}$

$\Updownarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,使得当$n>N$时，

z_n全都落在以z_0为中心，ε为半径的圆内.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \overset{\text{定义}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} |z_n - z_0| = 0.$$

定理1(P12) 设$z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0, z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$, $(x_0, y_0, x_n, y_n$是实数$), n \in \mathbb{Z}^+$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{和} \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0 \text{同时成立}.$$

证明：1)."$\Rightarrow$"(必要性).

利用$|x_n - x_0| \le |z_n - z_0|$, $|y_n - y_0| \le |z_n - z_0|$.

2"$\Leftarrow$"(充分性). 利用$|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$. #

由定理1， $\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{Re}\, z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{Im}\, z_n)$.

定理1(P12) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$和$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0$同时成立.

例 复数列 $1,\ \mathrm{i},\ -1,\ -\mathrm{i},\ 1,\ \mathrm{i},\ -1,\ -\mathrm{i},\ 1, \ldots$ 是否收敛?

$$\left.\begin{array}{r} \text{实部数列}\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots\} \\ \text{或 虚部数列}\{0,1,0,-1,\ 0,1,0,-1\ \ldots\} \end{array}\right\} \quad \text{不收敛,}$$

故原复数列不收敛，无极限. #

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \overset{\text{定义}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} |z_n - z_0| = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \overset{\text{定义}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

例 $1, \frac{\mathrm{i}}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{\mathrm{i}}{6}, \frac{1}{8}, \frac{\mathrm{i}}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{\mathrm{i}}{14}, \ldots,$

此复数列的模收敛于0，故此复数列收敛到0. #

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} |z_n - z_0| = 0.}$$

定理2 设 $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0,\ z_n = r_n e^{i\varphi_n},\ n = 1, 2, \cdots$ 则

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r_0$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0$ 都成立.

定理2 的证明参见教材P12.

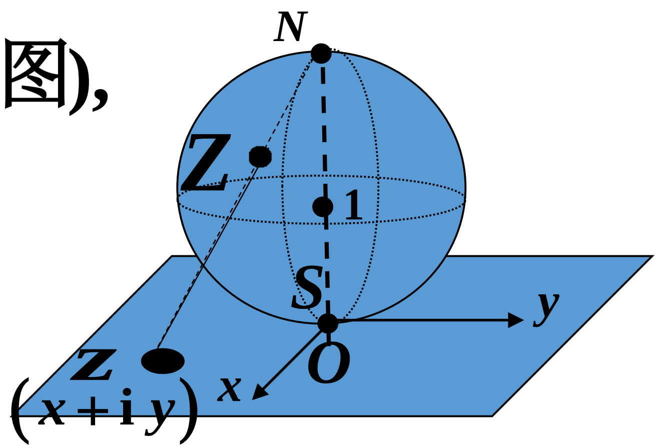
注：$\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0$ 指：对于 z_0 的任一辐角值 $\arg z_0$,

存在 $\{z_n\}$ 的一列复角值 $\{\arg z_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg z_n = \arg z_0$.

扩充复平面与复球面

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的单位球面(半径为1),

球面上一点 S 与原点重合(如图),



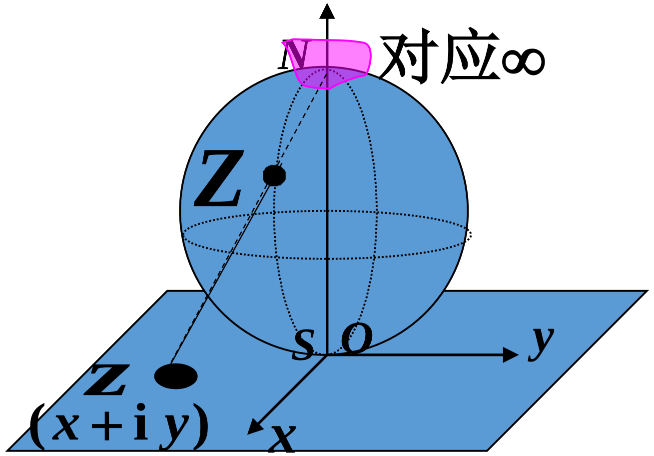
通过 S 作垂直于复平面的

直线与球面相交于另一点 N,

称 N 为北极, S 为南极.

复平面任一点$z=x+\mathrm{i}\,y$与N的连线与球面交于一点,

记为Z.　z与Z一一对应.



球面上的北极 N 不能对应复平面上的定点，

但球面上的点离北极 N 越近，

它所表示的复数的模越大.

约定: 在复平面引进一个理想点，称为“无穷远点”，使它

与球面上的北极N相对应,记作 ∞ .

扩充复平面： 增加了无穷远点 ∞ 的复平面.

扩充复平面也可称为 闭复平面.

不含无穷远点∞ 的复平面称为开复平面，简称复平面.

与扩充复平面对应的整个球面称为复数球面或黎曼球面 .

关于无穷远点 ∞，约定(P14) 背熟

1. ∞的实部、虚部及辐角都无意义，$|\infty| = +\infty$；

2. 若$a \neq 0$，则$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$，$\dfrac{a}{0} = \infty$；

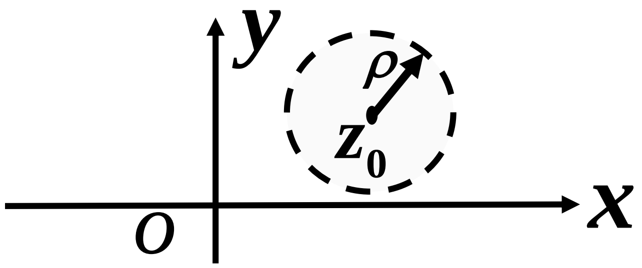
3. 若$a \neq \infty$，则$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$，$\dfrac{a}{\infty} = 0$，$\dfrac{\infty}{a} = \infty$；

4. $\forall R > 0$，称$\{z \,|\, |z| > R\}$为无穷远点∞的邻域.

1.2 平面点集

1.2.1 基本概念

(1) 邻域 称$\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$为 z_0 的ρ邻域.

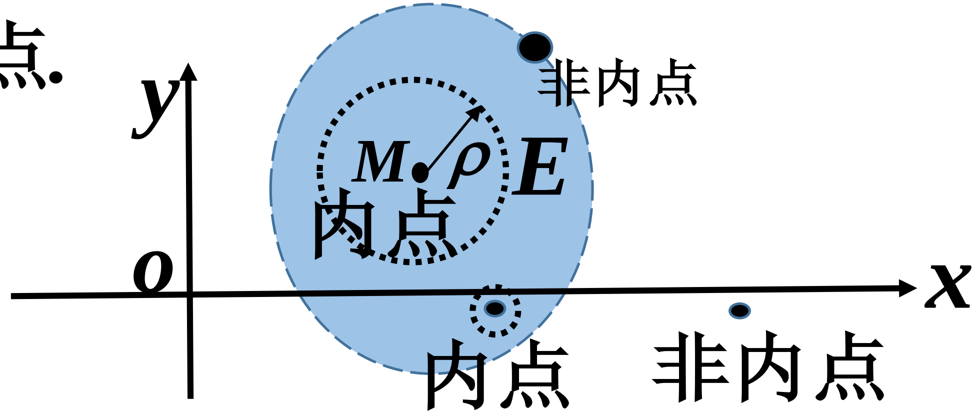


(2) 内点

设 E为复平面上的某个点集, M为 复平面上一点.

如果存在M的一个ρ邻域$\{z \mid |z-M|<\rho\}$完全属于E,

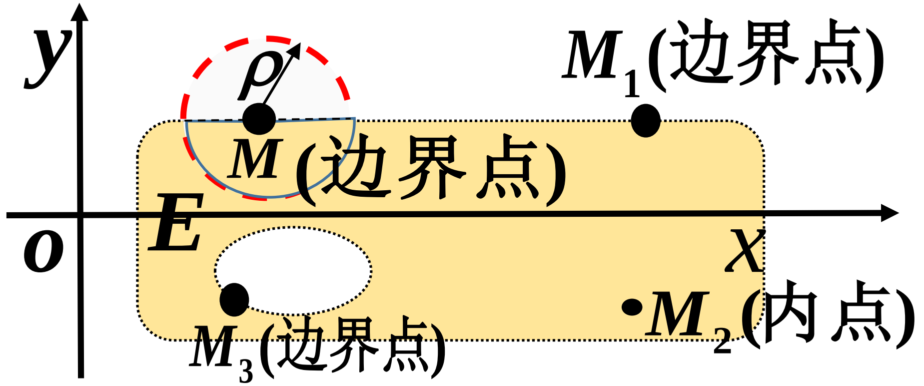
则称M为 E 的内点.



设 E 为复平面上的某个点集, M 为 复平面上一点.

(3) 边界点

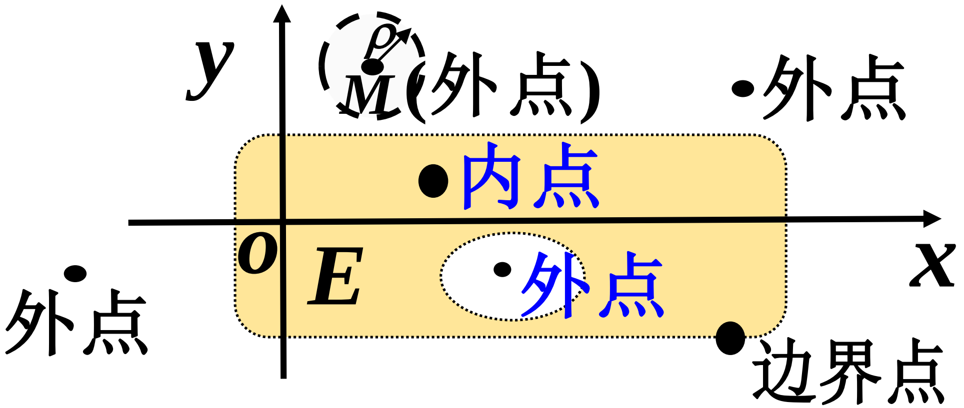
如果 M 的任一 ρ 邻域内既有集 E 的点, 也有非 E 的点, 则称 M 为 E 的边界点.



(4) 外点

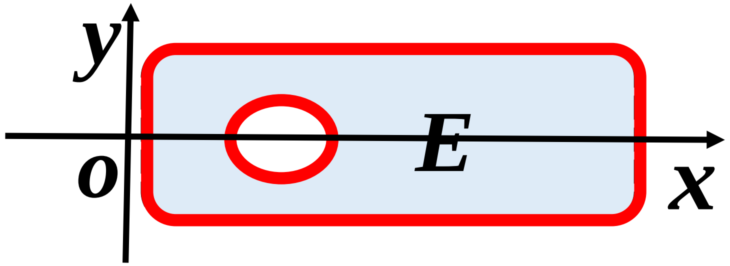
如果 M 有一个 ρ 邻域完全不属于集 E,

则称 M 为 E 的外点.



(6) 边界

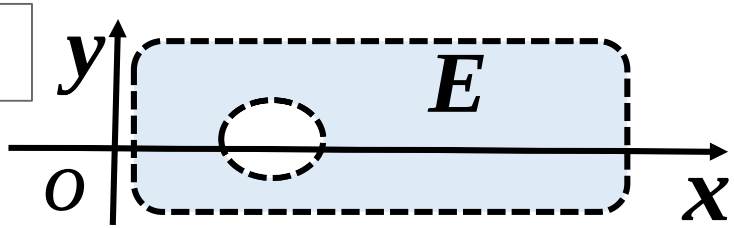
E的全部边界点组成的集合，称为E的边界.



(5) 开集

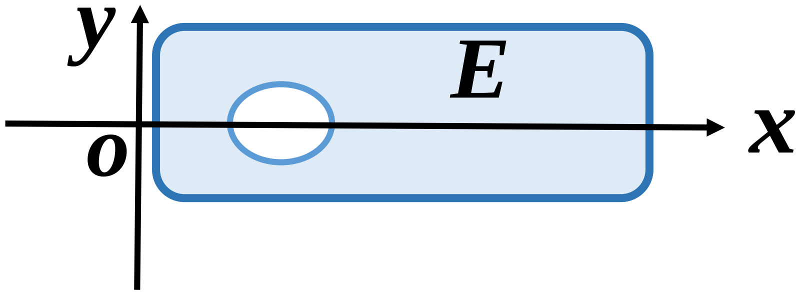
如果集E 的点全部是E的内点, 则称E 为开集.

开集E的所有边界点都不属于E.



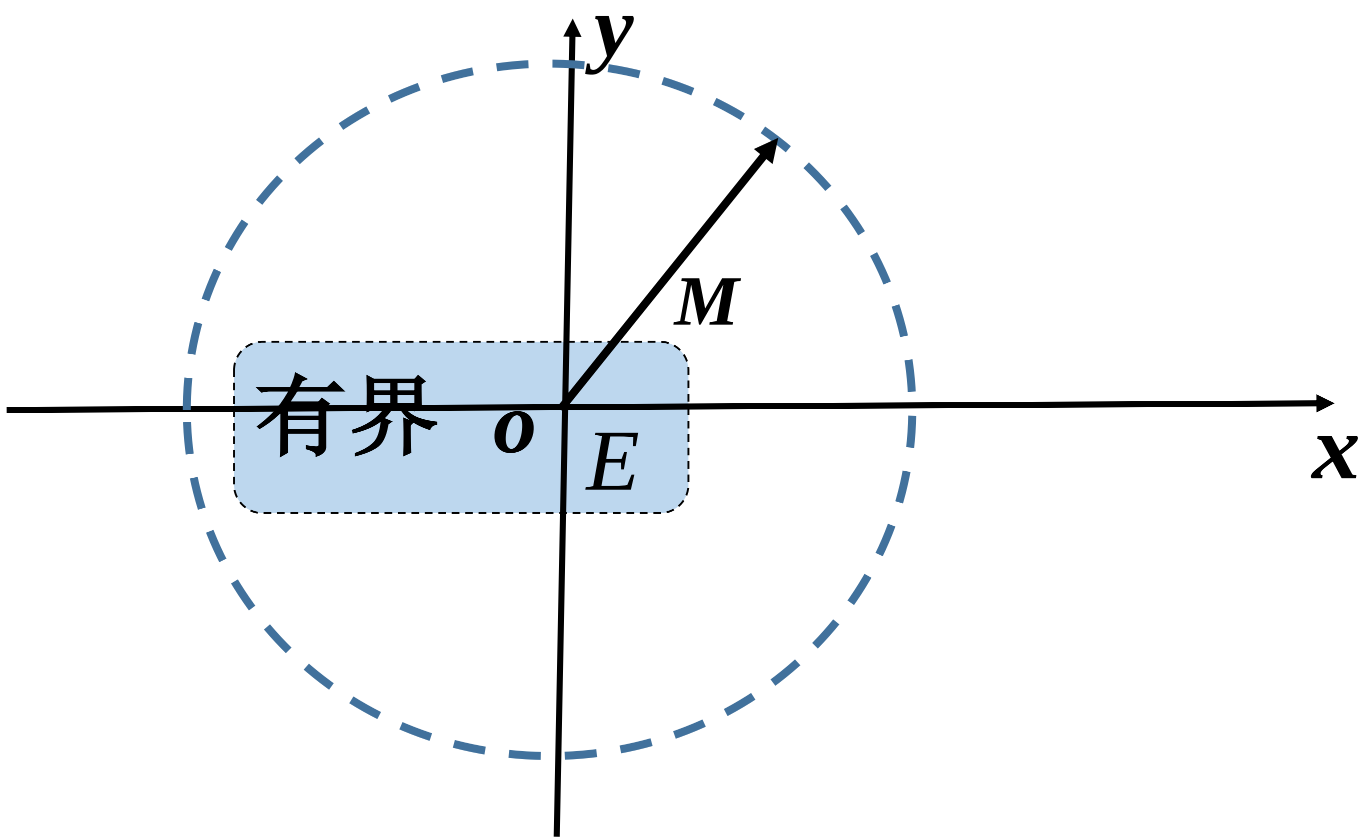
(6) 闭集

如果E的边界全部属于E, 则称E为闭集.



(7) 有界集和无界集

如果集 E 可以被包含在原点的某个领域内，即存在 $M>0$，使得$E \subseteq \{z \mid |z| < M\}$，则称$E$为有界集，否则称$E$为无界集.



1.3.2 区域和曲线

背熟 连通的非空开集D称为区域. 区域D满足:

1) D是一个非空开集;

D的所有边界点都不属于E.

2) D具有连通性,

即D 中任两点可用一条完全属于D中的折线连结起来.

例，圆域$\{z \mid |z+2|<1\}$，圆环域$\{z \mid \frac{1}{2}<|z+2|<1\}$, 都是区域.

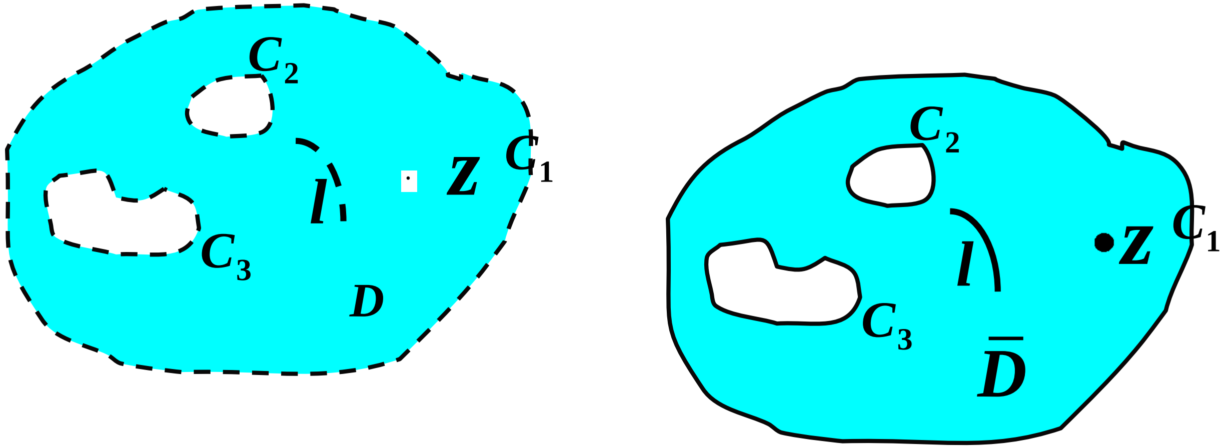
但是，不相交的两个圆的并集

$\{z \mid |z+2|<1\} \cup \{z \mid |z-100|<1\}$, 不是区域, 因为它不联通.

注意：区域的边界可能是：

由一条或几条曲线、一些割痕、孤立的点所组成的.

- 区域D加上它的边界C一起称为**闭域**，记为$\bar{D}=D+C$.



(1) 连续曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是定义在区间$[\alpha,\beta]$上的连续实值函数,

则由$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 决定的点集 l,

称为复平面上的一条连续曲线.

l 也可记成 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$

例 求$z(t) = t + t^2 \mathrm{i}, \quad -\infty < t < \infty$所给出的曲线.

(P19习题之19题)

解 $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ 消去t, 得$y = x^2$,

它是(x, y)平面一条抛物线. #

chóng

(2) 约当曲线，即简单曲线(无重点)

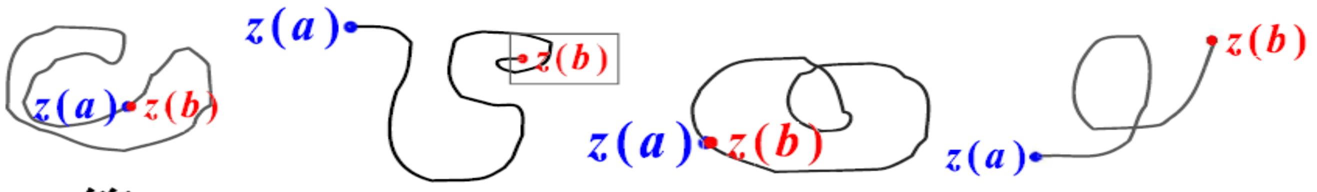
- 设$l: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t)(\alpha\le t\le\beta)$ 为一条连续曲线,

若$\forall t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, 若$t_1\neq t_2$, 且$t_1,t_2$不同时是$[\alpha,\beta]$的端点,

满足 $z(t_1)\neq z(t_2)$, 则称l为约当曲线, 或简单曲线.

- 设$l: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t)(\alpha\le t\le\beta)$ 为一条约当曲线,

如果 $z(\alpha)=z(\beta)$, 则称l为约当闭曲线, 或简单闭曲线.



简单闭 | 简单不闭 | 不简单闭 | 不简单不闭

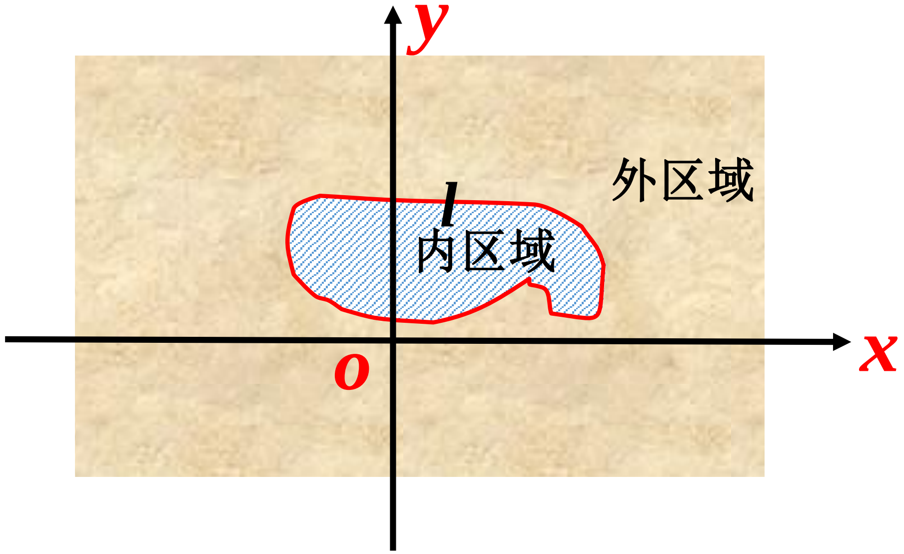
约当曲线的性质

任意一条简单闭曲线 l 将整个复平面唯一地分成两个没有公共点的区域，

其中一个有界，称为l的内区域，

另一个无界，称为l的外区域.

内区域和外区域的边界都是l.

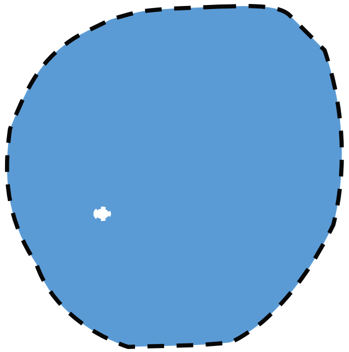


(3) 单连通区域与多连通区域

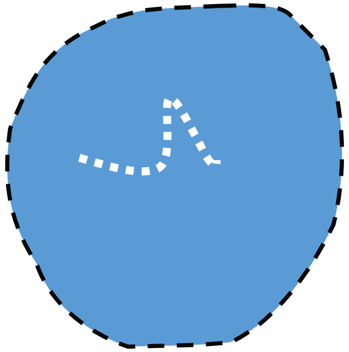
复平面上的一个区域D，如果在D中任作一条简单闭曲线l，l的内区域中每一点都属于D，

就称D为单连通区域.

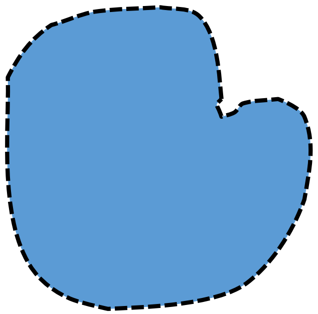
- 一个区域如果不是单连通区域，就称为多连通区域.



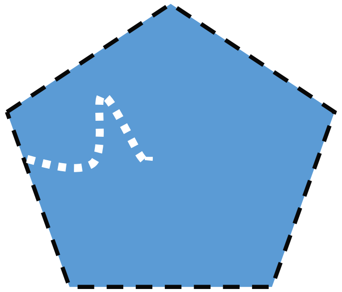
多连通区域



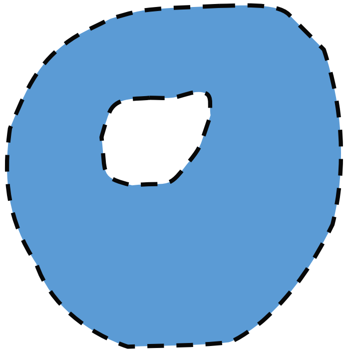
多连通区域



单连通区域



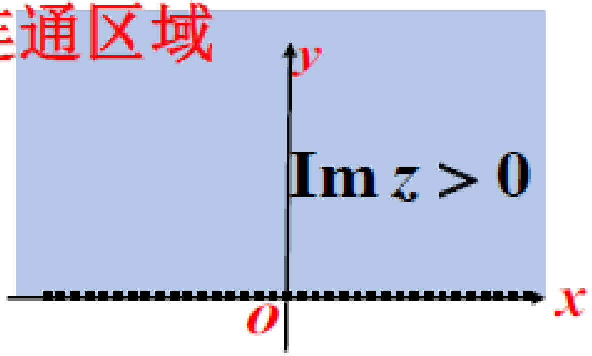
单连通区域



多连通区域

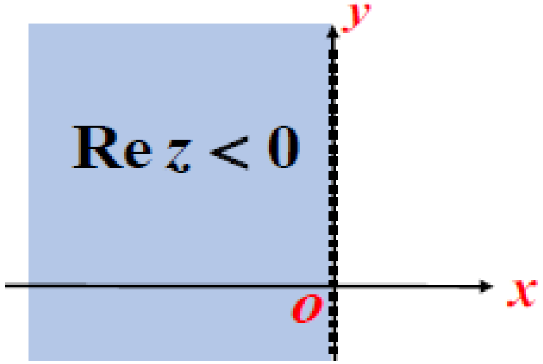
- 任意一条约当闭曲线的内区域是单连通区域.

单连通区域



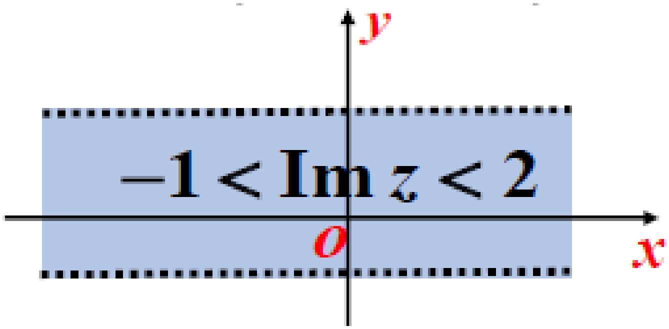
单连通，无界区域

边界：$\{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$



单连通，无界区域

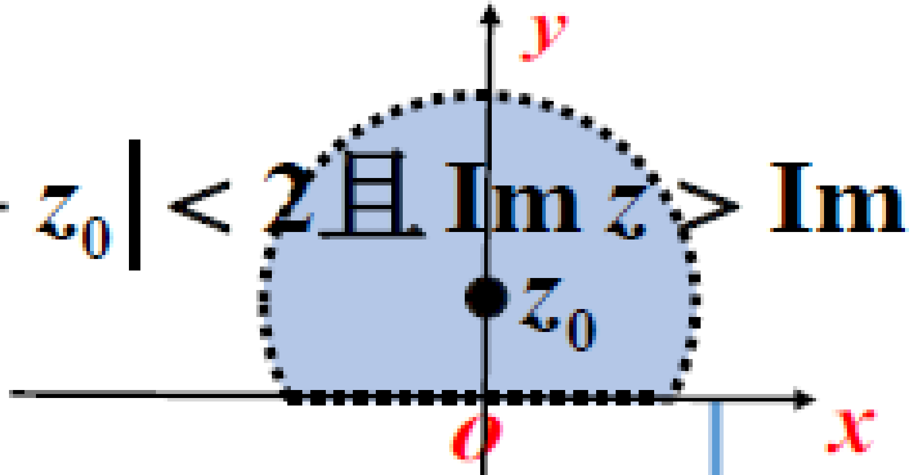
边界：$\{z \mid \operatorname{Re} z = 0\}$



单连通，无界区域

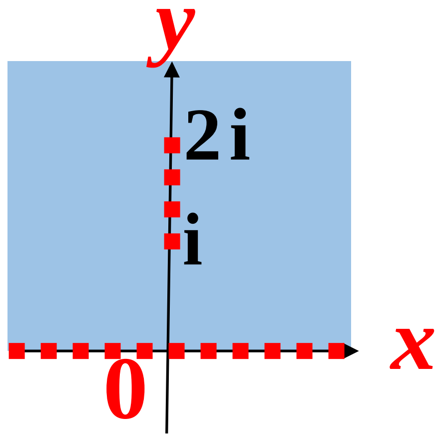
边界：$\{z \mid \operatorname{Im} z = -1\} \cup \{z \mid \operatorname{Im} z = 2\}$

$$|z-z_0|<2 \text{且} \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} z_0 - 1$$



单连通，有界区域

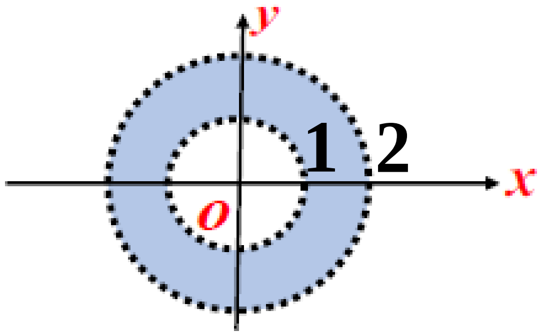
$$\text{边界:}\{z\,\big|\,|z-z_0|=2 \text{且} \operatorname{Im} z \ge \operatorname{Im} z_0 - 1\} \cup \{z\,\big|\,\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0 - 1 \text{且} |z-z_0|<2\}$$



$$\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid \operatorname{Re} z = 0, 1 \le \operatorname{Im} z \le 2\}$$

边界:$\{z \mid \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{z \mid \operatorname{Re} z = 0, 1 \le \operatorname{Im} z \le 2\}$

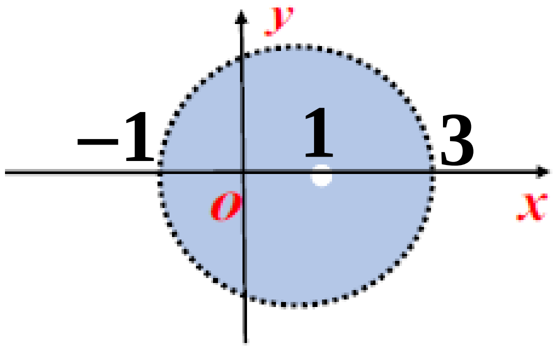
多连通区域



$$1 < |z| < 2$$

多连通区域

边界:$\{z \mid |z| = 1\} \cup \{z \mid |z| = 2\}$



$$0 < |z - 1| < 2$$

多连通区域

边界:$\{1\} \cup \{z \mid |z - 1| = 2\}$

与数学分析课里的实值函数一样，在复变函数里，我们要学习复变函数及其极限、连续、微分、积分、级数展开等.

第二章 复变函数

2.1 复变函数的概念

- 复变函数的定义:

设 E 是复平面上的点集,

若$\forall z = x + \mathrm{i}\, y \in E$, $(x, y \in \mathbb{R})$, 按一定规律,

z与唯一的一个复数 $w = u + \mathrm{i}v$ 对应, $(u, v \in \mathbb{R})$,

则称在E上定义了一个复变单值函数,

$$f:\ z = x + \mathrm{i}\, y \longrightarrow w = u + \mathrm{i}v, \quad z \in E,$$

记作 $w = f(z)$, $z \in E$; 称z为自变量.

如果自变量的一个值z对应两个或以上的复数 w,

则称在E上定义了一个复变多值函数,

也记作 $w = f(z)$, $z \in E$.

单值函数 (每个自变量z与唯一的一个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 对应)

如$w=\bar{z}$, $w=z+2\mathrm{i}$, $w=z^3$, $w=\dfrac{z}{2z+1}$, $\left(z\neq-\frac{1}{2}\right)$, $w=|z|$,…

多值函数 (一个自变量值z对应两个或以上的复数 w)

如$w=\sqrt[n]{z}$, $n\geq2$, (n个不同值), $w=\operatorname{Arg}z$(无穷多值),⋯

$\boxed{\text{今后未作特殊说明的函数，指单值函数.}}$

- **复变函数与自变量之间的关系**

例如，函数 $w=z^2$，设$z=x+\mathrm{i}\,y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$\underline{w=u+\mathrm{i}v}=(x+\mathrm{i}\,y)^2\ \underline{=x^2-y^2+2xy\,\mathrm{i}},\quad \text{故}$$

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy,$$

即 $w=z^2$相当于两个实二元函数: $u=x^2-y^2$，$v=2xy$.

设 $z = x + \mathrm{i}\, y$,

任一复函数 $w = u + \mathrm{i}v = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$,

相当于两个关系式: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$,

即确定了两个以x, y为自变量的二元实变数函数:

$$u(x, y),\quad v(x, y).$$

若z用指数形式: $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$$w = u + \mathrm{i}v = f(z) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = u(r, \varphi) + \mathrm{i}v(r, \varphi),$$

即确定了两个以r, φ为自变量的二元实变数函数:

$$u(r, \varphi),\quad v(r, \varphi).$$

- 复变函数的几何意义

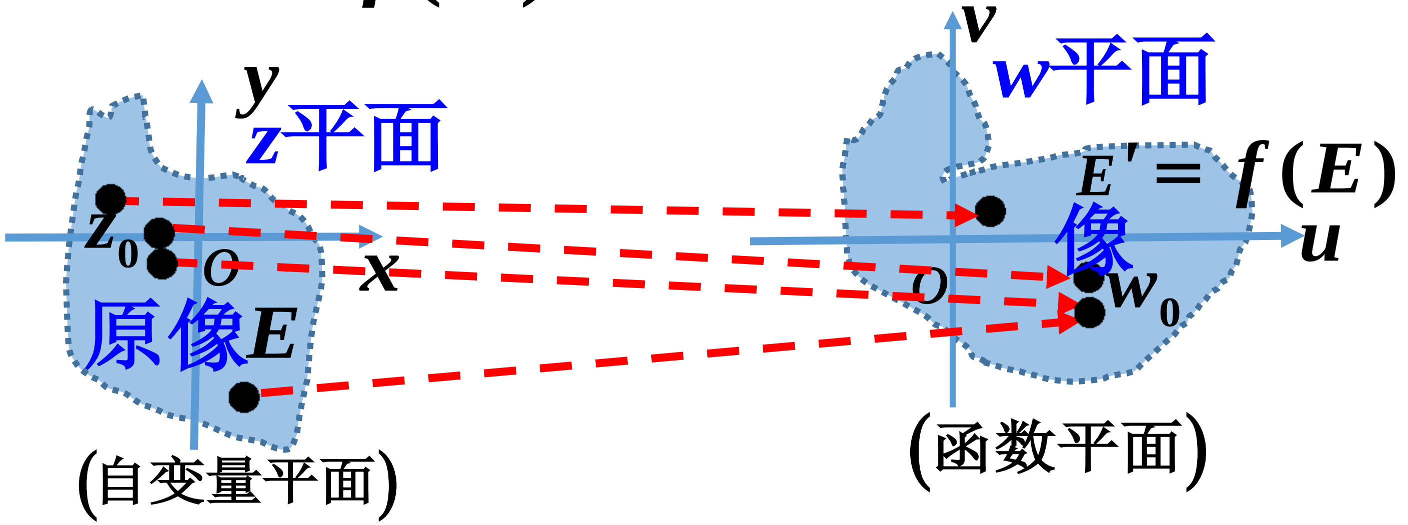
取两个复平面： z 平面　和　w 平面,

分别表示自变量 z 的值和函数 w 的值,

则 $w = f(z)$ 可看作：

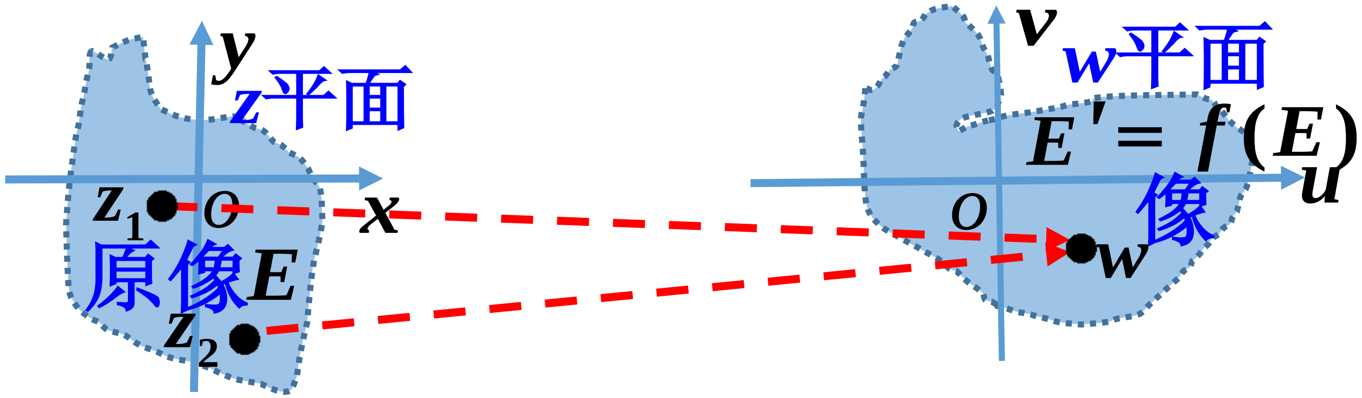
把 z 平面上的点集E 变换成 w 平面上的一个点集 E' .

记作 $E' = f(E)$. 称E'为E 的像，称E为E'的原像.



若$w_0 = f(z_0)$, 则称w_0为z_0的像，称z_0为w_0的原像.

单值函数$w = f(z)$：一个原像点z只对应一个像点$w = f(z)$，但是每一个像点w可能是由一个以上的原像点z对应.

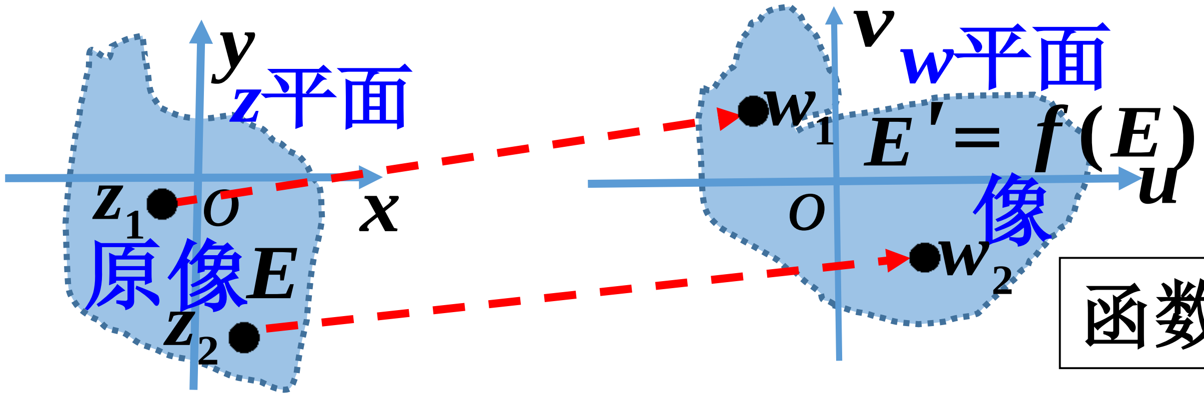


- 一一映照(即双方单值映照)

设$w = f(z)$是E上的单值函数,

如果$\forall z_1, z_2 \in E$, $z_1 \neq z_2$, 有$f(z_1) \neq f(z_2)$,

则称$w = f(z)$是E中的一一映照(或双方单值映照).



函数与映照不加区别

例1 函数 $w=az$,其中$a\neq 0,\infty$,是已知的复常数,

每个z,只对应一个w(单值), 且$z_1\neq z_2$时, $az_1\neq az_2$(一一).

它是z平面到w平面的一一映照.

因$a\cdot\infty=\infty$, 故它也是整个闭z平面到整个闭w平面的一一映照.

设$a=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $r>0$,则$w=az=r\{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z\}$,

是由$\omega=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$和$w=r\omega$复合而成.

把z,ω,w画在同一个平面上，则

$\omega=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$是旋转映照 (将原向量$z$逆时针旋转$\theta$角),

$w=r\omega$是相似映照 (模放缩为原ω模 的r 倍).

$w=az$是由旋转映照和相似映照的复合而成.

作业

P17-19

2

14,15(1)(按定义1证明)， 16

17(1)(2)(3)(7)(8)(9)，

18(将$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$，代入直角坐标系下的直线方程),

19， 20

小结

复数的加减宜用 $z = x+\mathrm{i}y$ 形式，

复数的乘除、乘方、开方宜用指数形式 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\boxed{\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r})\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,\cdots,n-1.}$

例. 求$\sqrt[4]{16}$.

解 $16 = 16\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$, $(\sqrt[4]{16}) = 2$,

$$\sqrt[4]{16} = 2\left\{\cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)\right\},\quad k = 0,1,2,3,$$

$$\text{故}\ \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 2, & k = 0, \\ 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i}, & k = 1, \\ 2(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2, & k = 2, \\ 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2\mathrm{i}, & k = 3. \end{cases}$$

由定理1，$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\operatorname{Re} z_n) + \mathrm{i}\lim\limits_{n\to+\infty}(\operatorname{Im} z_n)$.

例：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left\{2+\frac{1}{n}+\mathrm{i}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)+\mathrm{i}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\mathrm{i}e.\ \#$$

定理2 设 $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0,\ z_n = r_n e^{i\varphi_n},\ n = 1, 2, \cdots,$ 则

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r_0$和 $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0$都成立.

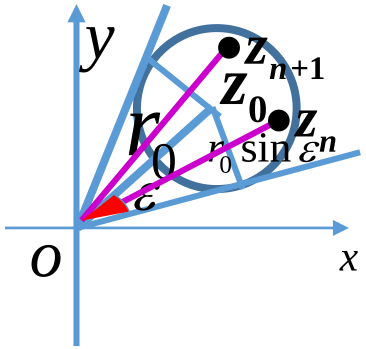
证明: 1). "$\Rightarrow$". 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - z_0| = 0.$

模: 因$|r_n - r_0| = \big||z_n| - |z_0|\big| \leq |z_n - z_0|$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r_0$.

辐角: 首先由 $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - z_0| = 0$ 知, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$, 使得当$n > N$时,

z_n落在以z_0 为中心, $\alpha(\varepsilon) \triangleq r_0 \sin\varepsilon$为半径的圆内,

从原点引此圆的两条切线, 此两条切线的夹角为2ε.



故对z_0任一辐角$\arg z_0$, $\exists\{\operatorname{Arg} z_n\}$的一列值$\{\arg z_n\}$,

使得$n > N$时, $|\arg z_n - \arg z_0| \leq \varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} \varphi_n = \operatorname{Arg} \varphi_0$.

定理2 设 $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \neq 0,\ z_n = r_n e^{i\varphi_n},\ n = 1, 2, \cdots,$ 则

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} r_n = r_0 \text{和} \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0 \text{都成立}.$$

证明：2). "$\Leftarrow$". 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r_0$和 $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} z_0$都成立，则

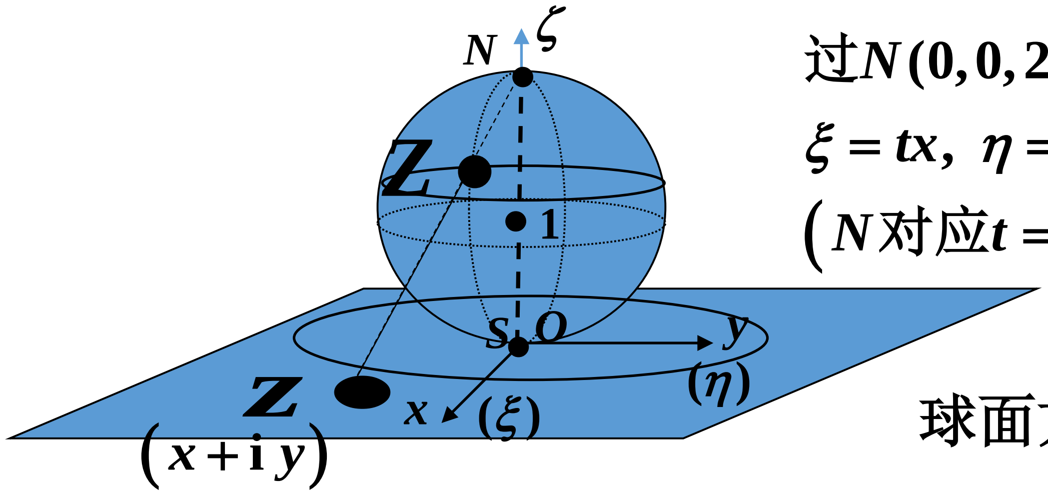
因$x_n = r_n \cos(\operatorname{Arg} z_n),\ y_n = r_n \sin(\operatorname{Arg} z_n)$，故

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right)\cos\left(\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arg} z_n\right) = r_0 \cos(\operatorname{Arg} z_0).$$

同理 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = r_0 \sin(\operatorname{Arg} z_0)$.　故由定理1知，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = r_0 \cos(\operatorname{Arg} z_0) + i\, r_0 \sin(\operatorname{Arg} z_0) = z_0.$$

#



过$N(0,0,2)$, $z(x,y,0)$的直线方程

$\xi = tx,\ \eta = ty,\ \zeta = 2(1-t), t\in\mathbb{R}.$

$\left(N\text{对应}t=0, z\text{对应}t=1.\right)$ $\left(t=\dfrac{2-\zeta}{2}\right)$

球面方程$\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1.$

联立消t得Z

复平面圆周$x^2+y^2=R^2$对应的维圈:

将$\xi^2+\eta^2=t^2x^2+t^2y^2=\dfrac{(2-\zeta)^2}{4}R^2$ 与球面方程$\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1$ 联立得

$\dfrac{(2-\zeta)^2}{4}R^2=1-(1-\zeta)^2$. 由此可解得两个根:$\zeta_1=\dfrac{2R^2}{R^2+4}$, $\zeta_2=2.$

故圆周对应维圈的方程为

$$\begin{cases}\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1,\\ \zeta=\dfrac{2R^2}{R^2+4}.\end{cases}$$

因 $\zeta=1$与$R=2$对应,

故复平面圆周$|z|=2$

与球面赤道圆周$\begin{cases}\xi^2+\eta^2=1,\\ \zeta=1\end{cases}$对应。