第四周作业答案

罗曾宇 PB20071421

题目 1. 一个半径为 R 的电介质球，极化强度为 $\boldsymbol{P}=K\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$，电容率为 ϵ.

(1) 计算束缚电荷的体密度和面密度;

(2) 计算自由电荷体密度；

(3) 计算球外和球内的电势；

(4) 求该带电介质球产生的静电场总能量.

解答. (1) 束缚电荷体密度

$$\rho_p=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-K\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2})=-K(\frac{1}{r^2}\nabla\cdot\boldsymbol{r}+\nabla(\frac{1}{r^2})\cdot\boldsymbol{r})=-\frac{K}{r^2},$$

束缚电荷面密度

$$\sigma_p=\boldsymbol{P}_{外}|_{r=R}\cdot(-\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}})+\boldsymbol{P}_{内}|_{r=R}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}=\frac{K}{R}.$$

(2) 电位移

$$\boldsymbol{D}=\frac{\epsilon}{\epsilon-\epsilon_0}\boldsymbol{P}=\frac{K\epsilon}{\epsilon-\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2},$$

所以自由电荷体密度为

$$\rho_f=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\epsilon}{\epsilon-\epsilon_0}\frac{K}{r^2}.$$

(3) 球内电场强度

$$\boldsymbol{E}_{内}=\frac{\boldsymbol{D}}{\epsilon}=\frac{K}{\epsilon-\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}(0<r\leq R),$$

球外电场强度

$$\boldsymbol{E}_{外} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\int_0^R \rho_f 4\pi r^2 dr}{r^2}\boldsymbol{e_r} = \frac{K\epsilon}{\epsilon_0(\epsilon-\epsilon_0)}\frac{R}{r^2}\boldsymbol{e_r}(r \geq R),$$

则球外电势分布

$$\varphi_{外} = -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{E}_{外}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{K\epsilon}{\epsilon_0(\epsilon-\epsilon_0)}\frac{R}{r}(r \geq R),$$

球内电势分布

$$\varphi_{内} = \varphi_{外}|_{r=R} - \int_R^r \boldsymbol{E}_{内}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{K}{\epsilon-\epsilon_0}(\ln\frac{R}{r} + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}).$$

(4) 带电体的总静电能

$$W = \frac{1}{2}\epsilon\int_0^R E_{内}^2 dV + \frac{1}{2}\epsilon_0\int_0^R E_{外}^2 dV = 2\pi\epsilon R(1+\frac{\epsilon}{\epsilon_0})(\frac{K}{\epsilon-\epsilon_0})^2.$$

题目 2. 在均匀外电场中置入半径为 R_0 的导体球，试用分离变量法求出下列两种情况的电势：

(1) 导体球上接有电池，使球与地保持电势差 Φ_0;

(2) 导体球上带总电荷 Q.

解答. 以球心为坐标原点，不妨令外电场为 $\boldsymbol{E_0} = E_0\boldsymbol{e_z}$，设未放入导体球时球心处电势为 φ_0.

(1) 当导体球对地电势为 Φ_0 时，球外电势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi = 0, (r > R_0)$$

$$r = R_0, \varphi = \Phi_0,$$

$$r \to \infty, \varphi \to \varphi_0 - E_0 r\cos\theta,$$

注: 这里对无穷远处的电势作一些解释. 导体球放入后仅改变局部电场，对无穷远处的电场分布没有影响，由叠加原理可知，无穷远处的电势为导体球

贡献加上匀强电场的贡献，而导体球上的感应电荷仅分布在有限区域，对无穷远处没有贡献，所以无穷远处电势仍然是未放入导体球时的值，没有变化 (可以想象，在一个无电荷的空间中，处处电势为零，此时无穷远处电势为零，在某处放入一个点电荷后，无穷远处电势仍然为零，有些同学可能会有疑问：电场线自电荷伸向无穷远处，不是有电势降吗，为何无穷远处电势不变？这是因为当放入点电荷或者导体球后，该区域的电势也会变化，即整体升高或降低，就像地表的" 隆起" 或" 凹陷"，所以从电势降的角度思考是片面的). 或者，我们也可以将 φ_0 设为离球心有一段距离的电势，此处电场线没有发生弯曲. 在这里，φ_0 只是一个常数项，对结果没有影响.

由于这里的 z 轴对称性，可知电势与 ϕ 方向无关，拉普拉斯方程的通解为

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty}(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}})P_l(\cos\theta),$$

由于 $r \to \infty, \varphi \to \varphi_0 - E_0 r\cos\theta$，所以

$$\varphi|_{r\to\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_n r^n P_l(\cos\theta) = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta,$$

对比可知，$A_n = 0(n \geq 2)$，$A_0 = \varphi_0$，$A_1 = -E_0$.

由于 $r = R_0, \varphi = \Phi_0$，所以

$$\varphi|_{r=R_0} = \varphi_0 - E_0 R_0\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_n}{R_0^{n+1}}P_l(\cos\theta) = \Phi_0,$$

对比可知，$B_n = 0(n \geq 2)$，且

$$\varphi_0 - E_0 R_0\cos\theta + \frac{B_0}{R_0} + \frac{B_1}{R_0^2}\cos\theta = \Phi_0,$$

解得 $B_0 = R_0(\Phi_0 - \varphi_0)$，$B_1 = E_0 R_0^3$.

综上，

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{R_0(\Phi_0 - \varphi_0)}{r} + \frac{E_0 R_0^3\cos\theta}{r^2}(r \geq R_0),$$

而球内是等势的. 可以看出，第一项是选择坐标原点电势而引入的常数项，它不会影响电势分布，第二项是匀强电场引发的电势降，第三项是由于导体球接有电池而使球面均匀带电所产生的球对称项，将最后一项与位于坐标原点的电偶极子 $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e_z}$ 所产生的电势比较，即

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}=\frac{E_0R_0^3\cos\theta}{r^2},$$

所以 $p=4\pi\epsilon_0E_0R_0^3$，实际上，第四项来源于外场使导体球面出现感应电荷，这部分电荷所引发的电势降，通过上面的比较我们可以发现，这些感应电荷的总体作用相当于一个放在坐标原点的电偶极子 $\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e_z}$.

球面的自由电荷面密度

$$\sigma_f=\boldsymbol{e_n}\cdot\boldsymbol{D}|_{r=R_0}=-\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=R_0}=\frac{\epsilon_0(\Phi_0-\varphi_0)}{R_0}+3\epsilon_0E_0\cos\theta,$$

注：$\boldsymbol{e_n}\cdot\boldsymbol{D}=-\epsilon_0\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\varphi=-\epsilon_0\hat{\boldsymbol{r}}\cdot(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi})=-\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}$，复习一下.

第一项为外接电池所带来的均匀分布面电荷，第二项为感应电荷，可以发现分布并不均匀，球面上与外场夹角为零处，感应电荷密度最大，夹角为 90° 时，无感应电荷.

(2) 当导体球上带总电荷 Q 时，球外点势的全部定解条件为

$$\nabla^2\varphi=0,(r>R_0)$$

$$r=R_0,\varphi=\Phi_0(\text{未知常数}),-\epsilon_0\oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=R_0}dS=Q,$$

$$r\to\infty,\varphi\to\varphi_0-E_0r\cos\theta,$$

解的过程与 (1) 完全相同，不过这里 Φ_0 为未知常数，我们还需要利用另外一个条件，

$$\oint_S\sigma_f\cdot dS=\frac{\epsilon_0(\Phi_0-\varphi_0)}{R_0}\cdot(4\pi R_0^2)+3\epsilon_0E_0\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi\epsilon_0R_0(\Phi_0-\varphi_0)+0,$$

即

$$\Phi_0 = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0},$$

注：第二项为感应电荷面密度，积分之后为零，也很合理.

综上，

$$\varphi = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{E_0 R_0^3\cos\theta}{r^2}(r \geq R_0),$$

球内是等势的.

通过这两问，我们可以看出，对于匀强电场中的导体球问题，分析球外电场时，我们完全可以把这个导体球等效为一个位于球心且电量为导体球净电荷量的点电荷和一个位于球心的电偶极子，看似复杂的“导体球”可以扔掉了.

题目 3. 均匀介质球的中心置一点电荷 Q_f，球的电容率为 ϵ，球外为真空，试用分离变量法求空间电势，把结果与使用高斯定理所得结果比较.

解答. 点电荷会将均匀介质球极化，设介质球的半径为 R_0，球内球外两区域的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{Q_f}{\epsilon}\delta(\boldsymbol{x}), (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_1 \to \infty, (\text{球心处有点电荷})$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to 0,$$

$$r = R_0, \varphi_1 = \varphi_2, \epsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \epsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}, (\text{无自由电荷，电位移边界连续})$$

注：第二次习题课的补充题提过，并不是所有情况下都有电势连续的条件，对于体电荷和面电荷分布，确实连续，但对于线电荷和点电荷，电势在边界不连续.

容易看出，$r < R_0$ 时，方程的一个特解为 $\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_f}{r}$，设 $\varphi_1 = \varphi_q + \varphi_3$，可以将球内外两区域的定解条件改写为

$$\nabla^2\varphi_3 = 0, (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_3\text{有限},$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to 0,$$

$$r = R_0, \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_f}{R_0} + \varphi_3 = \varphi_2, \epsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial r} - \epsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{Q_f}{4\pi R_0^2},$$

所以，可设 $\varphi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$，$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$，并且有

$$\begin{cases} \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R_0} + A_0 = \frac{B_0}{R_0}, \\ \epsilon_0\frac{B_0}{R_0^2} = \frac{Q_f}{4\pi R_0^2}, \\ A_n R_0^n = \frac{B_n}{R_0^{n+1}}, (n \geq 1) \\ \epsilon A_n n R_0^{n-1} + \epsilon_0(n+1)\frac{B_n}{R_0^{n+2}} = 0, (n \geq 1) \end{cases}$$

解得 $A_0 = \frac{Q_f(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0}$，$B_0 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0}$，第三个和第四个方程联立可得 $n\epsilon + (n+1)\epsilon_0 = 0$，无解，即 $A_n, B_n = 0 (n \geq 1)$.

综上所述，由分离变量法所得到的解为

$$\varphi_1 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q_f(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0}, (r < R_0)$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r}. (r > R_0)$$

由介质中的高斯定理，可以得到球内外的电场

$$\boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{D_1}}{\epsilon} = \frac{Q_f\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon r^3}, (r < R_0)$$

$$\boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{D_2}}{\epsilon_0} = \frac{Q_f\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, (r > R_0)$$

所以两区域的电势分布为

$$\varphi_2 = \int_r^{\infty} \boldsymbol{E_2} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 r}, (r > R_0)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2|_{r=R_0} + \int_r^{R_0} \boldsymbol{E_1} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q_f(\epsilon - \epsilon_0)}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0}.(r < R_0)$$

二者的结果是一样的.

题目 4. 均匀介质球 (电容率为 ϵ_1) 的中心置一自由电偶极子 $\boldsymbol{p_f}$，球外充满了另一种介质 (电容率为 ϵ_2)，求空间各点的电势和极化电荷分布.

解答. 与上题类似，$\boldsymbol{p_f}$ 会将均匀介质球极化，设介质球的半径为 R_0，球内球外两区域的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{\epsilon_1}(\boldsymbol{p_f} \cdot \nabla)\delta(\boldsymbol{x}), (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_1 \to \infty, (\text{球心处有电偶极子})$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to 0,$$

$$r = R_0, \varphi_1 = \varphi_2, \epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}, (\text{无自由电荷，电位移边界连续})$$

注: 点电荷的分布可以用狄拉克函数描述，那么电偶极子又该如何处理？事实上，按电偶极子的定义，这个泊松方程应该写为

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{1}{\epsilon_1}[q\delta(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{l}}{2}) - q\delta(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{l}}{2})],$$

对这两项分别泰勒展开，两者的零阶项相互抵消，保留一阶项，

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{q}{\epsilon_1}\frac{\partial\delta(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{l}} \cdot (-\boldsymbol{l}) = \frac{\boldsymbol{p_f}}{\epsilon_1} \cdot \nabla\delta(\boldsymbol{x}).$$

容易看出，$r<R_0$ 时，方程的一个特解为 $\varphi_p=\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\frac{p_f\cos\theta}{r^2}$，设 $\varphi_1=\varphi_p+\varphi_3$，可以将球内外两区域的定解条件改写为

$$\nabla^2\varphi_3=0,(r<R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2=0,(r>R_0)$$

$$r=0,\varphi_3\text{有限},$$

$$r\to\infty,\varphi_2\to 0,$$

$$r=R_0,\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\frac{p_f\cos\theta}{R_0^2}+\varphi_3=\varphi_2,\epsilon_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}-\epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}=\frac{2p_f\cos\theta}{4\pi R_0^3},$$

所以，可设 $\varphi_3=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta)$，$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$，并且有

$$\begin{cases}A_0=\frac{B_0}{R_0},\\ \frac{p_f}{4\pi\epsilon_1R_0^2}+A_1R_0=\frac{B_1}{R_0^2},\\ \epsilon_2\frac{B_0}{R_0^2}=0,\\ \epsilon_1A_1+\frac{2\epsilon_2B_1}{R_0^3}=\frac{2p_f}{4\pi R_0^3},\\ A_nR_0^n=\frac{B_n}{R_0^{n+1}},(n\geq 2)\\ \epsilon A_nnR_0^{n-1}+\epsilon_0(n+1)\frac{B_n}{R_0^{n+2}}=0,(n\geq 2)\end{cases}$$

解得 $A_0=B_0=0$，$A_1=\frac{p_f(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1+2\epsilon_2)R_0^3}$，$B_1=\frac{3p_f}{4\pi(\epsilon_1+2\epsilon_2)}$，第五个和第六个方程联立可得 $n\epsilon+(n+1)\epsilon_0=0$，无解，即 $A_n,B_n=0(n\geq 2)$.

综上所述，球内外两区域的电势为

$$\varphi_1=\frac{p_f\cos\theta}{4\pi\epsilon_1r^2}+\frac{p_f(\epsilon_1-\epsilon_2)}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1+2\epsilon_2)R_0^3}r\cos\theta,(r<R_0)$$

$$\varphi_2=\frac{3p_f}{4\pi(\epsilon_1+2\epsilon_2)}\frac{\cos\theta}{r^2}.(r>R_0)$$

极化体电荷分布

$$\rho_{p_1} = -\nabla\cdot\boldsymbol{P_1} = -\nabla[-(\epsilon_1-\epsilon_0)\nabla\varphi_1] = (\epsilon_1-\epsilon_0)\nabla^2\varphi_1 = \frac{\epsilon_1-\epsilon_0}{\epsilon_1}(\boldsymbol{p_f}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x}), (r < R_0),$$

$$\rho_{p_2} = (\epsilon_2-\epsilon_0)\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$r = R_0$ 处，极化面电荷分布

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \boldsymbol{P_1}\cdot\boldsymbol{e_r}|_{r=R_0} + \boldsymbol{P_2}\cdot(-\boldsymbol{e_r})|_{r=R_0} \\ &= -(\epsilon_1-\epsilon_0)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}|_{r=R_0} + (\epsilon_2-\epsilon_0)\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}|_{r=R_0} \\ &= \frac{3\epsilon_0(\epsilon_1-\epsilon_2)p_f\cos\theta}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1+2\epsilon_2)R_0^3}.\end{aligned}$$

题目 5. 空间导体球壳的内外半径为 R_1 和 R_2，球中心置一偶极子 $\boldsymbol{p}$，球壳上带电 Q，求空间各点电势和电荷分布.

解答. 设导体球壳的电势为 φ_0，球壳内外两区域的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1 = \frac{1}{\epsilon_0}(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{x}), (r < R_1)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_2)$$

$$r = 0, \varphi_1 \to \infty, (\text{球心处有电偶极子})$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to 0,$$

$$r = R_1, \varphi_1 = \varphi_0, \epsilon_0\int_S \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}dS = 0,$$

$$r = R_2, \varphi_2 = \varphi_0, -\epsilon_0\int_S \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}dS = Q,$$

注: 导体球的内壳是有自由电荷的 (感应电荷)，切勿想当然.

容易看出，$r < R_1$ 时，方程的一个特解为 $\varphi_p = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$，设 $\varphi_1 = \varphi_p + \varphi_3$，可以将球内外两区域的定解条件改写为

$$\nabla^2\varphi_3 = 0, (r < R_1)$$

$$\nabla^2\varphi_2=0,(r>R_2)$$

$$r=0,\varphi_3\text{有限},$$

$$r\to\infty,\varphi_2\to 0,$$

$$r=R_1,\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}+\varphi_3=\varphi_0,$$

$$r=R_2,\varphi_2=\varphi_0,-\epsilon_0\int_S\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}dS=Q,$$

由题目 3，题目 4 的先例，这里我们直接设 $\varphi_3=A_0+A_1r\cos\theta,\varphi_2=\frac{B_0}{r}+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta$, 原因不再赘述. 由边界条件可知，

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{B_0}{R_2},\\ \dfrac{p_f}{4\pi\epsilon_1R_1^2}+A_1R_1=\dfrac{B_1}{R_0^2},\\ B_1=0,\\ 4\pi\epsilon_0B_0=Q,\end{cases}$$

解得

$$A_0=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0R_2},A_1=-\frac{p}{4\pi\epsilon_1R_1^3},B_0=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0},B_1=0,$$

综上所述，

$$\varphi_1=\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0r^2}+\frac{Q}{4\pi\epsilon_0R_1}-\frac{pr\cos\theta}{4\pi\epsilon_0R_1^3},(r<R_1)$$

$$\varphi_2=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0r},(r>R_2),$$

面电荷分布，

$$r=R_1\text{时，}\sigma_1=-\epsilon_0\boldsymbol{E_1}|_{r=R_1}=\epsilon_0\nabla\varphi_1|_{r=R_1}=-\frac{3p\cos\theta}{4\pi R_1^3},$$

$$r=R_2\text{时，}\sigma_2=\epsilon_0\boldsymbol{E_2}|_{r=R_2}=-\epsilon_0\nabla\varphi_2|_{r=R_2}=\frac{Q}{4\pi R_2^2}.$$

题目 6. 在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中置入一带均匀自由电荷 ρ_f 的绝缘介质球 (电容率 ϵ)，求空间各点的电势.

解答. 自由电荷的电场和外场 $\boldsymbol{E_0}$ 将使介质球极化，设介质球半径为 R_0，未放入介质球前球心的电势为 φ_0，以球心为坐标原点，且令 $\boldsymbol{E_0} = E_0\boldsymbol{e_z}$，介质球内外的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{\rho_f}{\epsilon}, (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_1\text{有限},$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to \varphi_0 - E_0 r\cos\theta,$$

$$r = R_0, \varphi_1 = \varphi_2, \epsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \epsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}, (\text{表面无自由电荷，电位移边界连续})$$

注：这里的自由电荷是体分布，介质球表面是没有自由电荷的.

容易看出，$r < R_0$ 时，方程的一个特解为 $\varphi_q = -\frac{\rho_f}{6\epsilon}r^2$，设 $\varphi_1 = \varphi_q + \varphi_3$，可以将球内外两区域的定解条件改写为

$$\nabla^2\varphi_3 = 0, (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_3\text{有限},$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to \varphi_0 - E_0 r\cos\theta,$$

$$r = R_0, -\frac{\rho_f}{6\epsilon}R_0^2 + \varphi_3 = \varphi_2, \epsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial r} - \epsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = \frac{\rho_f R_0}{3}$$

设 $\varphi_3 = A_0 + A_1 r\cos\theta, \varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \dfrac{B_0}{r} + \dfrac{B_1}{r^2}\cos\theta$, 由边界条件可知，

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho_f}{6\epsilon}R_0^2 + A_0 = \varphi_0 + \dfrac{B_0}{R_0}, \\ A_1 R_0 = -E_0 R_0 + \dfrac{B_1}{R_0^2}, \\ \dfrac{\epsilon_0 B_0}{R_0^2} = \dfrac{\rho_f R_0}{3}, \\ \epsilon A_1 + \epsilon_0 E_0 + \dfrac{2\epsilon_0 B_1}{R_0^3} = 0, \end{cases}$$

解得 $A_0 = \varphi_0 + \dfrac{(2\epsilon+\epsilon_0)\rho_f R_0^2}{6\epsilon_0\epsilon}, A_1 = -\dfrac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0, B_0 = \dfrac{\rho_f}{3\epsilon_0}R_0^3, B_1 = \dfrac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0 R_0^3$,

综上所述，

$$\varphi_1 = -\frac{\rho_f}{6\epsilon}r^2 + \frac{(2\epsilon+\epsilon_0)\rho_f R_0^2}{6\epsilon_0\epsilon} + \varphi_0 - \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0 r\cos\theta, (r < R_0)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{\rho_f}{3\epsilon_0}\frac{R_0^3}{r} + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}\frac{E_0 R_0^3}{r^2}\cos\theta.(r > R_0)$$

题目 7. 在一很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体，使其中流着均匀的电流 $\boldsymbol{J}_{f0}$. 今在液体中置入一个电导率为 σ_1 的小球，求稳恒时电流分布和面电荷分布，讨论 $\sigma_1 \gg \sigma_2$ 及 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 两种情况的电流分布的特点.

解答. 由欧姆定律微观形式可知，$\boldsymbol{J}_{f0} = \sigma\boldsymbol{E}$，即电场也是稳恒的. 并且由电流的连续性方程可知，在稳恒情况下，$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0$，所以有 $\nabla^2\varphi = 0$.

设未放入小球时球心处的电势为 φ_0，小球的半径为 R_0，令导电液体中原电流密度 $\boldsymbol{J}_{f0} = \sigma_2\boldsymbol{E}_0 = \sigma_2 E_0\boldsymbol{e_z}$. 介质球内外的定解条件为

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, (r < R_0)$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, (r > R_0)$$

$$r = 0, \varphi_1\text{有限},$$

$$r \to \infty, \varphi_2 \to \varphi_0 - \frac{J_{f0}}{\sigma_2}r\cos\theta,$$

$$r=R_0,\varphi_1=\varphi_2,\boldsymbol{J}_1=\boldsymbol{J}_2,\text{即}\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r},$$

设 $\varphi_1=A_0+A_1r\cos\theta,\varphi_2=\varphi_0-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}r\cos\theta+\frac{B_0}{r}+\frac{B_1}{r^2}\cos\theta$, 由边界条件可知，

$$\begin{cases}A_0=\varphi_0+\frac{B_0}{R_0},\\ A_1R_0=-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}R_0+\frac{B_1}{R_0^2},\\ \frac{\sigma_2B_0}{R_0^2}=0,\\ \sigma_1A_1+J_{f0}+\frac{2\sigma_2B_1}{R_0^3}=0,\end{cases}$$

解得 $A_0=\varphi_0,A_1=-\frac{3J_{f0}}{\sigma_1+2\sigma_2},B_0=0,B_1=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_2(\sigma_1+2\sigma_2)}J_{f0}R_0^3$,

综上所述，

$$\varphi_1=\varphi_0-\frac{3J_{f0}}{\sigma_1+2\sigma_2}r\cos\theta,(r<R_0)$$

$$\varphi_2=\varphi_0-\frac{J_{f0}}{\sigma_2}r\cos\theta+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_2(\sigma_1+2\sigma_2)r^2}J_{f0}R_0^3\cos\theta.(r>R_0)$$

$r=R_0$ 处，面电荷分布

$$\begin{aligned}\sigma&=\epsilon_0\boldsymbol{E_2}\cdot\boldsymbol{e_r}|_{r=R_0}+\epsilon_0\boldsymbol{E_1}\cdot(-\boldsymbol{e_r})|_{r=R_0}\\&=-\epsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}|_{r=R_0}+\epsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}|_{r=R_0}\\&=\frac{3(\sigma_1-\sigma_2)\epsilon_0}{\sigma_2(\sigma_1+2\sigma_2)}J_{f0}\cos\theta.\end{aligned}$$

电流分布

$$\boldsymbol{J}_1=\sigma_1\boldsymbol{E}_1=-\sigma_1\nabla\varphi_1=\frac{3\sigma_1\boldsymbol{J_{f0}}}{\sigma_1+2\sigma_2},$$

$$\boldsymbol{J}_2=\sigma_2\boldsymbol{E}_2=-\sigma_2\nabla\varphi_2=\boldsymbol{J}_{f0}+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)R_0^3}{\sigma_1+2\sigma_2}[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{r^3}],$$

当 $\sigma_1\gg\sigma_2$ 时，

$$\boldsymbol{J}_1=3\boldsymbol{J}_{f0},\boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{J}_{f0}+R_0^3[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{r^3}],$$

当 $\sigma_2\gg\sigma_1$ 时，

$$\boldsymbol{J}_1=0,\boldsymbol{J}_2=\boldsymbol{J}_{f0}-\frac{1}{2}R_0^3[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{r^3}],$$

题目 8. 在直角坐标下推导拉普拉斯方程解的形式 (二维).

解答. 二维情况下，直角坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0,$$

设 $\varphi(x, y)=X(x) Y(y)$，代入得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0,$$

设 $\frac{X''(x)}{X(x)}=m^2, \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-m^2$，当 $m=0$ 时，

$$X(x)=A x+B, Y(y)=C y+D,$$

当 $m \neq 0$ 时，

$$X(x)=A' e^{m x}+B' e^{-m x}, Y(y)=C' \cos (m y)+D' \sin (m y),$$

这里的 $m^2,-m^2$ 称为对应问题的本征值，$X(x), Y(y)$ 称为对应问题的本征函数.分离变量法的核心思想是通过解出本征值问题的本征函数，再利用本征函数构建函数空间的一组正交基，最后用这些正交基来对待求函数来进行傅里叶展开.

因为这道题并没有给我们相应的边界条件，我们只能得到本征函数的形式. 假如在三维情况下讨论，就要复杂一些，需要分多种情况来判断三个本征值的正负.

下面列举了一些在一维热传导问题中，不同边界条件对应的本征函数族，感兴趣的同学可以挑几个验证一下.

表 7.1　方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 的本征值与本征函数 ($L=1,\ n=1,2,3,\cdots$)

$u\vert_{x=0}=0,\quad \left[u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_n=\mu_n^2,\quad X_n=\sin\mu_n x$ $\tan\mu_n=-\mu_n$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\vert_{x=0}=0,\quad \left[u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_n=\mu_n^2,\quad X_n=\cos\mu_n x$ $\cot\mu_n=\mu_n$
$u\vert_{x=0}=0,\quad \left[u-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_0=-\mu_0^2,\quad \lambda_n=\mu_n^2;\quad X_0=\sinh\mu_0 x,\quad X_n=\sin\mu_n x$ $\tanh\mu_0=\mu_0/2,\quad \tan\mu_n=\mu_n/2$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\vert_{x=0}=0,\quad \left[u-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_0=-\mu_0^2,\quad \lambda_n=\mu_n^2;\quad X_0=\cosh\mu_0 x,\quad X_n=\cos\mu_n x$ $\coth\mu_0=\mu_0/2,\quad \cot\mu_n=-\mu_n/2$
$\left[u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}=0,\quad \left[u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_0=-1,\quad \lambda_n=(n\pi)^2$ $X_0=e^{-x},\quad X_n=n\pi\cos n\pi x-\sin n\pi x$
$\left[u-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}=0,\quad \left[u-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_0=-1,\quad \lambda_n=(n\pi)^2$ $X_0=e^{x},\quad X_n=n\pi\cos n\pi x+\sin n\pi x$
$\left[u-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}=0,\quad \left[u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_n=\mu_n^2,\quad X_n=\mu_n\cos\mu_n x+\sin\mu_n x$ $\tan\mu_n=\dfrac{2\mu_n}{\mu_n^2-1}$
$\left[u+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}=0,\quad \left[u-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=1}=0:$	$\lambda_0=-\mu_0^2,\ \lambda_n=\mu_n^2$ $X_0=\mu_0\cosh\mu_0 x-\sinh\mu_0 x,\quad X_n=\mu_n\cos\mu_n x-\sin\mu_n x$ $\tanh\mu_0=\dfrac{2\mu_0}{\mu_0^2+1},\quad \tan\mu_n=-\dfrac{2\mu_n}{\mu_n^2-1}$

图 1: 各种边界条件所对应的本征函数族