

尹华锐

电容元件和电感元件

电容元件和电感元件

◎ 元件特点

- 本类元件具备**储存能量**的能力，电压电流关系必须使用**微分方程**或者**积分方程**表达，具有**动态特性**
 - 电阻是**非储能元件**，使用**线性代数方程**就可以进行表达

◎ 教学内容

- 储能元件的元件方程、能量计算和等效变换等
- 元件的电压电流关系及其对应的物理意义

电容元件

◎ 构成原理

- 2块用介质绝缘的金属板组成

◎ 电特性

- $q = CU$
 - q电量（库仑） C电容（法拉） U电压（伏特）
- $C = \epsilon A / D$
 - ϵ 介电常数 A面积 D距离

电容元件的电压、电流和储能关系

电压电流关系：

$$q = CU$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

电流和电压满足微分关系

$$i = C \frac{du}{dt}, u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$$

积分关系

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi$$

电容元件

- 电容的瞬时功率

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}$$

- 电容的储能

$$w_e(t) = \frac{1}{2}Cu^2 \Big|_{-\infty}^t, w_e(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

$w_e(t) = \frac{q^2(t)}{2C}$ 默认 $t = -\infty$ 时，电容没有电荷

电容的并联和串联

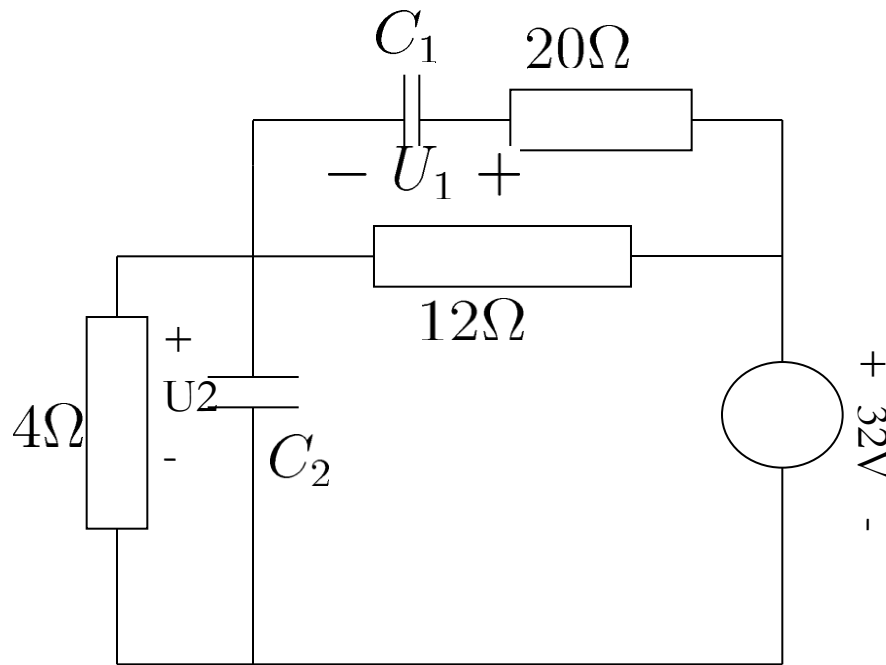
◎ 电容串联

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{C_k}$$

◎ 电容并联

$$C_{eq} = \sum_{k=0}^{N-1} C_k$$

电容元件举例



$$C_1 = 0.5F, C_2 = 0.25F$$

电源为直流工作状态计算
电容储存的能量

$$\text{Step 1: } U_1 + U_2 = 32V$$

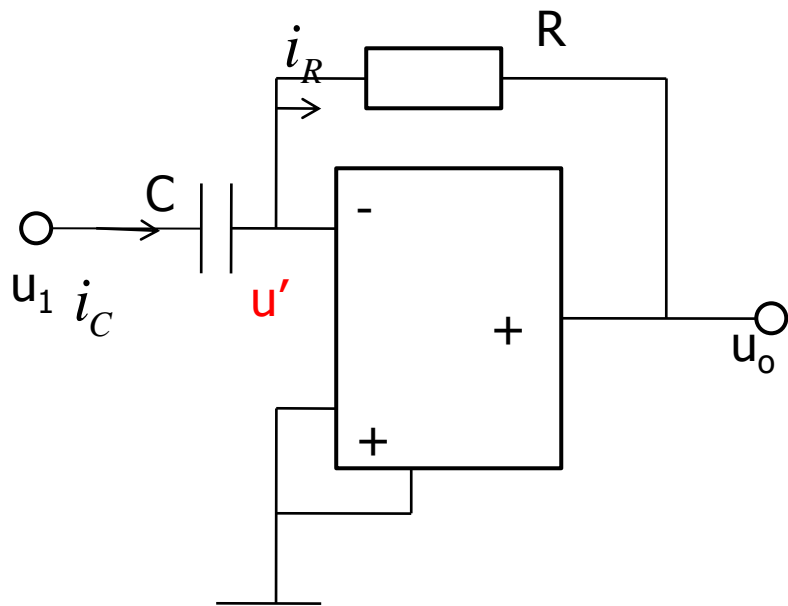
$$\frac{U_1}{U_2} = 3 : 1$$

$$U_1 = 24V, U_2 = 8V$$

$$\text{Step 2: } W_1 = 0.5C_1U_1^2 = 144J$$

$$W_2 = 0.5C_2U_2^2 = 8J$$

电容分析举例



$$\text{KCL: } i_C = i_R$$

$$i_C = C \frac{d(u_i - u')}{dt} = C \frac{du_i}{dt}$$

$$i_R = \frac{u' - u_o}{R}$$

求输出电压 u_o 和 u_i 的关系

$$\Rightarrow C \frac{du_i}{dt} = -\frac{u_o}{R}$$

电感元件

◎ 工作原理

- 线圈在电流通过时激发磁场(Magnetic Field), 进而形成磁通——右手定则

◎ 磁特性

$$\Phi = Li$$

- Φ 磁通 (韦伯Wb) L 电感(亨利, H) i 电流 (安培, A)

电感的磁通、电流和储能

◎ 电磁感应定律

$$e = \frac{d\psi}{dt}$$

- 关联参考方向时 $u = e$

$$u = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

- 磁链、电流与电压的关系

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = \psi(t_0) + \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi$$

电感的功率和储能

电感功率

$$p = ui = L \frac{di}{dt}$$

电感储能

$$w_m = \frac{1}{2} L i^2 \Big|_{i(-\infty)}^{i(t)} \quad \text{默认 } t = -\infty \text{ 时, 电感的磁通为 } 0$$

电感串联

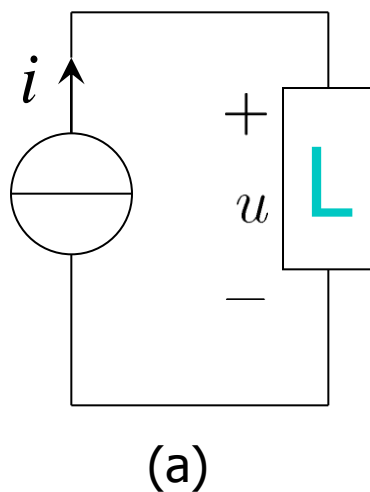
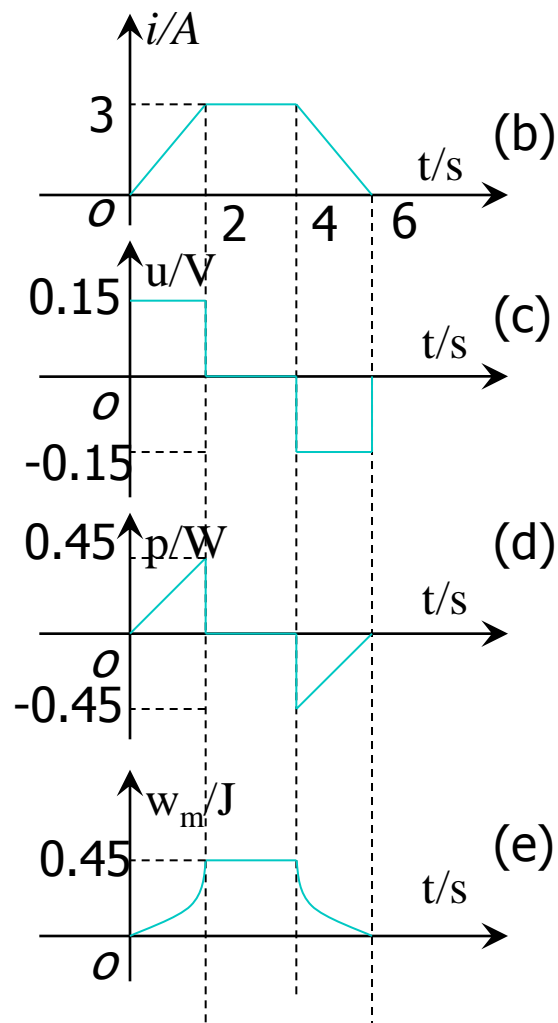
$$L_{eq} = \sum_{k=0}^{N-1} L_k$$

电感并联

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{L_k}$$

电感储能举例

电路如图a所示, 0.1H电感通过如果图b所示线圈. 求 $t > 0$ 时的电感电压、吸收功率以及储存能量的变化功率



$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$p = ui$$

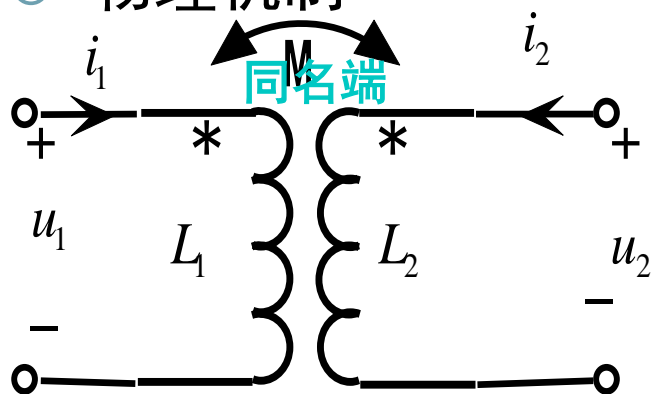
$$w = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

耦合电感

◎ 耦合电感物理机制

- 多个电感之间存在磁耦合，形成多端口网络
 - 本课程仅仅研究二端口电感

◎ 物理机制



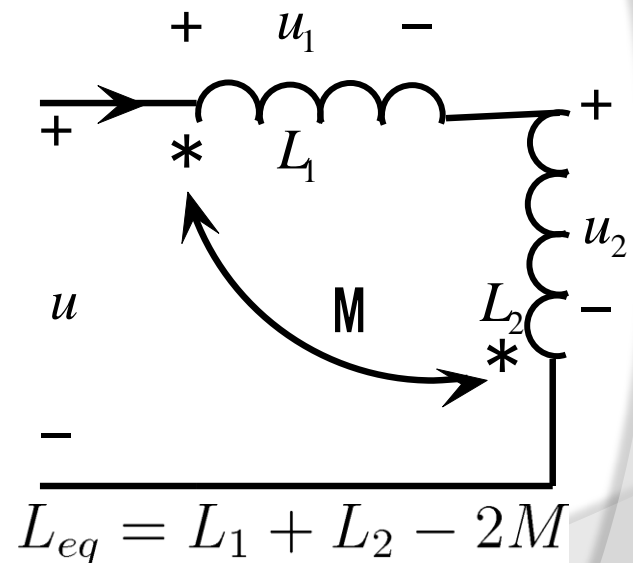
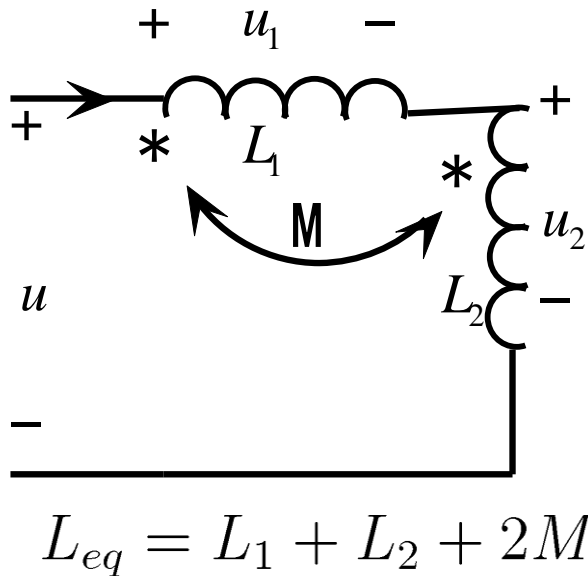
$$\begin{aligned}\psi_1 &= L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \psi_2 &= \pm M i_1 + L_2 i_2\end{aligned}$$

当流入的同名端的电流方向相同，则互感M的符号为“+”，
电流方向不同的时候互感M的符号为“-”

互感元件

● 耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

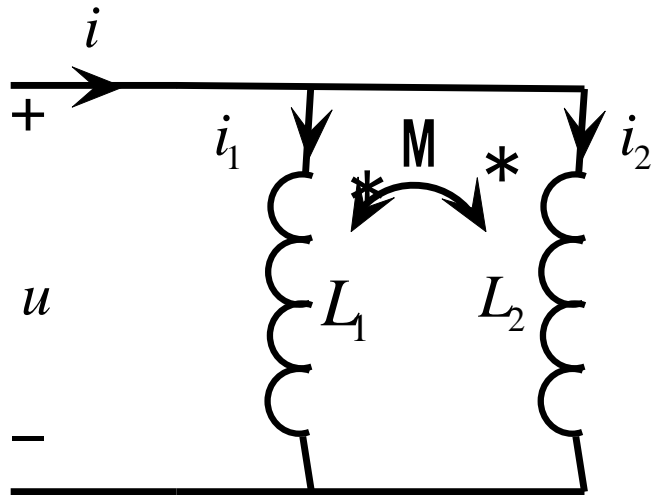
● 互感线圈的串联等效



$$u = u_1 + u_2 = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right) + \left(\pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt}$$

互感元件

互感线圈的并联



$$\begin{aligned} u &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ i &= i_1 + i_2 \end{aligned}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

理想变压器

◎ 理想变压器

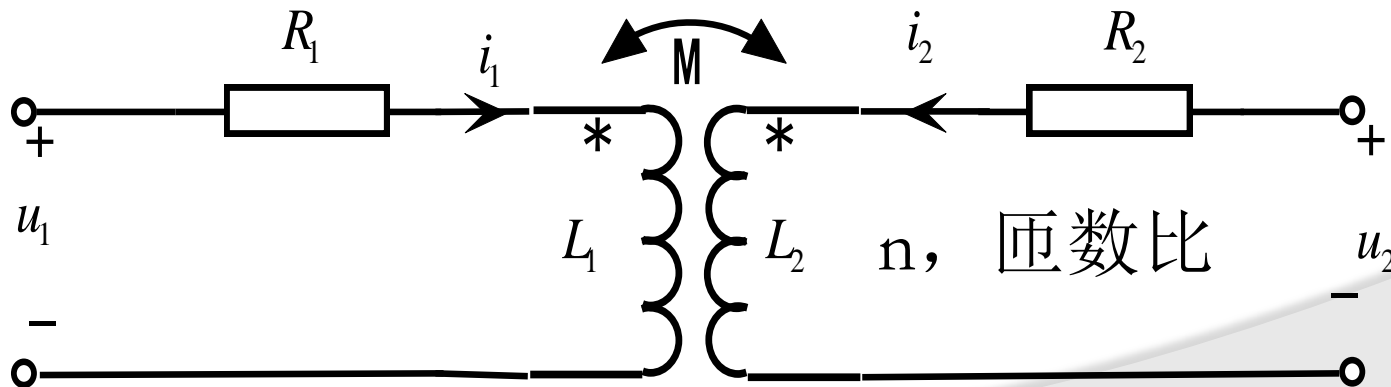
- 实际电磁耦合元件的理想化模型
- 线圈通过磁导率很大的铁磁材料（铁芯）构成
 - 忽略漏磁，考虑全耦合
- 各线圈的磁链 $\psi_1 = N_1\phi$ 和 $\psi_2 = N_2\phi$

◎ 电特性

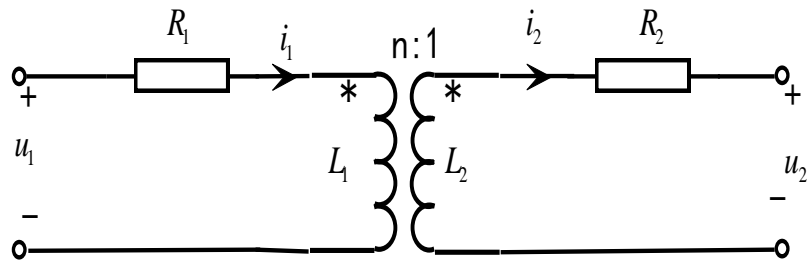
$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$
$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n, \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{n}$$

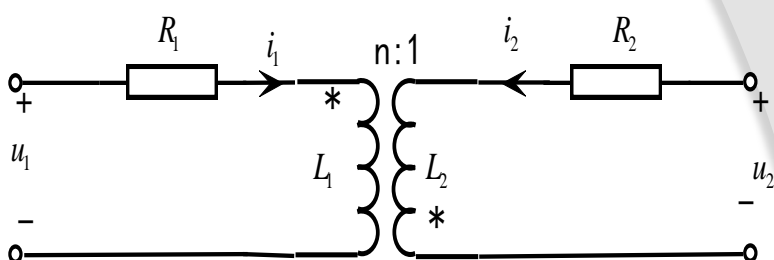
$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$



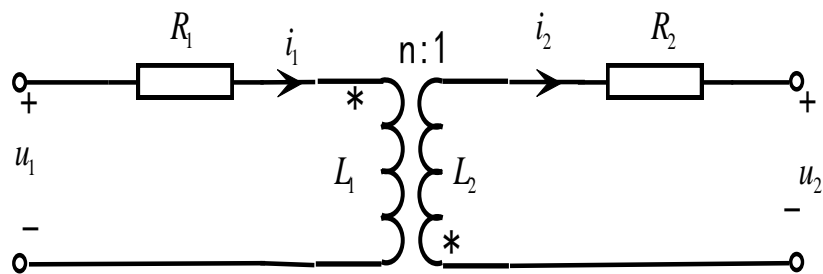
理想变压器



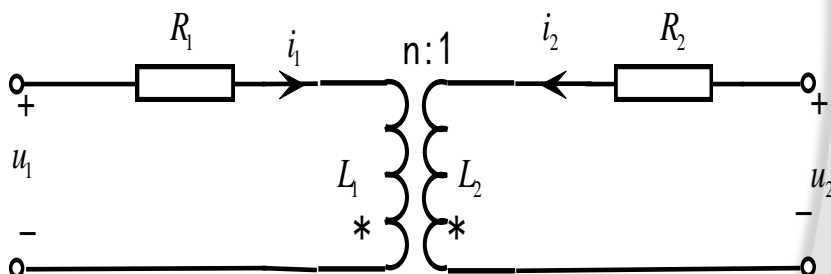
$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = \frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = \frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_1 = -nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$$

储能元件总结（电压电流关系，储能）

◎ 电容 $i = C \frac{du}{dt}, W = \frac{1}{2} C u^2$

◎ 电感 $u = L \frac{di}{dt}, W = \frac{1}{2} L i^2$

◎ 耦合电感
$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

◎ 变压器 $u_1 = n u_2, i_1 = -i_2 / n$