第十二次作业答案

罗曾宇

题目 1. 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势 $\boldsymbol{A}(\omega\tau)$ 表示，其中 $\tau = t - \dfrac{z}{c}$，$\boldsymbol{A}$ 垂直于 z 轴方向.

解答. 在洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

下，齐次达朗贝尔方程的平面波解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)}, \varphi = \varphi_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)},$$

由于 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} = 0$(这里是对 $\boldsymbol{A}$ 的进一步约束，忘记了的同学可翻阅课本 188 面)，即 $\boldsymbol{A}$ 为横场，于是由洛伦兹规范，得

$$i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} - \frac{i\omega}{c^2}\varphi = 0, \varphi = 0,$$

而波矢量 $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e_z}$，故矢势为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_0} e^{i(kz - \omega t)} = \boldsymbol{A_0} e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})} = \boldsymbol{A}(\omega\tau),$$

其中 $\tau = t - \dfrac{z}{c}$. 此平面波的电磁场用矢势表示为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}(\omega\tau), \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = i\omega \boldsymbol{A}(\omega\tau).$$

题目 2. 设真空中矢势 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 可用复数傅里叶展开为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_k[\boldsymbol{a_k}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{a_k^*}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$，其中 $\boldsymbol{a_k^*}$ 是 $\boldsymbol{a_k}$ 的复共轭.

(1) 证明 $\boldsymbol{a_k}$ 满足谐振子方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a_k}(t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2c^2\boldsymbol{a_k}(t)=0$.

(2) 当选取规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\varphi=0$ 时，证明 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_k}=0$.

(3) 把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 用 $\boldsymbol{a_k}$ 和 $\boldsymbol{a_k^*}$ 表示出来.

解答. (1) 在洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

下，真空中 $\boldsymbol{A}$ 的齐次波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0,$$

这是一个线性方程(线性的定义：$F(\alpha u+\beta v)=\alpha F(u)+\beta F(v)$, 可以自行检验一下)，任何频率的单色平面波是它的解，由各种不同频率的单色波线性叠加而成的任何电磁波，都是它的解. 故一般地可将这方程的解表为级数

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_k[\boldsymbol{a_k}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{a_k^*}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}],$$

矢量 $\boldsymbol{a_k}(t)$ 代表角频率为 $\omega=\dfrac{k}{c}$ 的单色波，$\boldsymbol{k}$ 是其波矢量，$\boldsymbol{a_k^*}(t)$ 是其复共轭. 将其代入波动方程中得

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a_k}(t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2c^2\boldsymbol{a_k}(t)=0,\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a_k^*}(t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2c^2\boldsymbol{a_k^*}(t)=0.$$

即每一个单色波 $\boldsymbol{a_k}$ 及其复共轭都满足谐振子方程.

(2) 若选取规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\varphi=0$，把矢势的级数解代入得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_k}(t)=0,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a_k^*}(t)=0,$$

即组成解的每个单色波都是横波.

(3) 利用矢势的级数解

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\sum_k i\boldsymbol{k}\times[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}],$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\sum_k[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t)}{\mathrm{d}t}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}],$$

如果在 (2) 选取的规范下，每个单色波都是横波，即有 $\boldsymbol{E}_k=c\boldsymbol{B}_k\times\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_k$ 是每个单色波传播波方向上的单位矢量，所以可将电场写为

$$\boldsymbol{E}=\sum_k(c\boldsymbol{B}_k\times\boldsymbol{e}_k)=\sum_k ick[\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}].$$

题目 3. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势.

(1) 引入一矢量函数 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},t)$(赫兹矢量)，若令 $\varphi=-\nabla\cdot\boldsymbol{Z}$，证明 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial t}$.

(2) 若令 $\rho=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$，证明 $\boldsymbol{Z}$ 满足方程 $\nabla^2\boldsymbol{Z}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\boldsymbol{P}$，写出在真空中的推迟解.

(3) 证明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可通过 $\boldsymbol{Z}$ 用下列公式表出，

$$\boldsymbol{E}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{Z})-c^2\mu_0\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{Z}.$$

解答. (1) 洛伦兹规范为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

将 $\varphi=-\nabla\cdot\boldsymbol{Z}$ 代入得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial t})=0,$$

因为洛伦兹规范对任意点任意时刻都成立，所以该式对任意点任意时刻都成立，所以 $\boldsymbol{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 为任意常矢量，并且只和 $\boldsymbol{x}$ 有

关，如果令 $\boldsymbol{Z}'=\boldsymbol{Z}+c^2\nabla\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})t$，有 $\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{Z}'}{\partial t}=0$，也就是说常矢量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 完全可以归化到 $\boldsymbol{Z}$ 中，所以，不妨取 $\nabla\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial t}.$$

(2) 若令 $\rho=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$，由电流连续性方程，便有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{J},\text{即}\boldsymbol{J}=\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

因为在洛伦兹规范下，矢势 $\boldsymbol{A}$ 满足达朗贝尔方程 $\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J}$，代入 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{J}$ 得

$$\nabla^2\boldsymbol{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{Z}}{\partial t^2}=-\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0},$$

此方程与 $\boldsymbol{A}$ 的达朗贝尔方程有完全相同的形式，因此它也有推迟解

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'.$$

(3)

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}),$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{Z})-\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}.$$

题目 4. 两个质量，电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生.

解答. 由于两粒子相向碰撞且质量 m 相等，因此系统的总动量为零:

$$m\boldsymbol{v_1}+m\boldsymbol{v_2}=0,$$

由此可知两个粒子的运动速度和位置矢量等值反向，即 $\boldsymbol{v_1}=-\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{x_1}=-\boldsymbol{x_2}$. 又因为两个粒子的电荷 q 相等，这系统的电偶极矩和磁偶极矩均为零:

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{x_1}+q\boldsymbol{x_2}=0,\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x_1}\times q\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{x_2}\times q\boldsymbol{v_2})=\boldsymbol{0},$$

因此不会发生电偶极和磁偶极辐射.

题目 5. 设有一球对称的电荷分布，以频率 ω 沿径向作简谐振动，求辐射场，并对结果给以物理解释.

解答. 不会发生辐射. 因为电荷球对称分布意味着电荷密度 $\rho = \rho(r^{'})$ 只是 $r^{'}$ 的函数而与坐标 θ', ϕ' 无关. 设在平衡状态下，球内任一点源的位矢为 $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}}^{'}$，当电荷沿径向振动时其位矢和速度分别为

$$\boldsymbol{r}^{'} = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}}^{'} e^{-i\omega t^{'}}, \boldsymbol{v}^{'} = -i\omega \boldsymbol{r}^{'},$$

于是球内任意一点上的电流密度为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{'}, t^{'}) = \rho(r^{'})\boldsymbol{v}^{'} = -i\omega\rho(r^{'})\boldsymbol{r}^{'},$$

显然，在任意一条球的直径上，由于两个对称点上电荷密度 $\rho(r^{'})$ 相等，而位矢 $\boldsymbol{r}^{'}$ 则等值反向，因而 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{'}, t^{'})$ 等值反向而互相抵消，故推迟势必定为零：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{'}, t^{'})}{r}\mathrm{d}V^{'} = 0.$$

题目 6. 一飞轮半径为 R，并有电荷均匀分布在其边缘上，总电量为 Q. 设此飞轮以恒定角速度 ω 旋转，求辐射场.

解答. 轮缘的电荷线密度为 $\lambda = \dfrac{q}{2\pi R}$, 因旋转角速度 ω 固定，因此形成的电流

$$I = \lambda v = \lambda\omega R = \frac{\omega q}{2\pi},$$

是稳恒的. 稳定的电荷和电流分布只能产生稳定的电场与磁场，而不会发生辐射.

题目 7. 利用电荷守恒定律，验证 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的推迟势满足洛伦兹条件.

解答. $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的推迟势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{r}\mathrm{d}V',$$

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t)}{r}\mathrm{d}V',$$

其中 $t'=t-\dfrac{r}{c}$. 由 $\nabla t'=-\dfrac{\nabla r}{c}$，以及算符代换关系 $\nabla'\to-\nabla$，有

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')=\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')_{t'\text{不变}}+\frac{\partial\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}\cdot\nabla't'=\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')_{t'\text{不变}}-\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t'),$$

$$\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{r}=\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')+\nabla'\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')=\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')_{t'\text{不变}}-\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')-\nabla\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t'),$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V[\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')+\nabla\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')]\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V[-\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')}{r}+\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')_{t'\text{不变}}]\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{r}\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}V',\end{aligned}$$

在第二步中，右方第一项化为面积分，总可以取积分面大于电流分布区域的界面，因而积分面上电流密度 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$，故此项为零. 而

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\boldsymbol{x}',t')\mathrm{d}V',$$

于是由电荷守恒定律

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t')_{t'\text{不变}}+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x}',t')}{\partial t'}=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 满足洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{x},t)=0.$$

题目 8. 半径为 R_0 的均匀永磁体，磁化强度为 $\boldsymbol{M_0}$，球以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 $\boldsymbol{M_0}$ 的轴旋转，设 $R_0\omega \ll c$，求辐射场和能流.

解答. 此球的磁矩振幅为 $\boldsymbol{m}_0 = \dfrac{4\pi R_0^3}{3}\boldsymbol{M}_0$, 由于条件 $R_0\omega << c$，即辐射波长 $\lambda >> 2\pi R_0$，因此远处的辐射场只需要考虑磁偶极场.

设以 z 轴为旋转轴，则 $\boldsymbol{m}$ 与 xy 平面平行，将它分解为两个独立的振动

$$\boldsymbol{m} = m_x\boldsymbol{e_x} + m_y\boldsymbol{e_y} = m_0\cos\omega t\boldsymbol{e_x} + m_0\sin\omega t\boldsymbol{e_y},$$

并写成复数形式

$$\boldsymbol{m} = m_0(\boldsymbol{e_x} + i\boldsymbol{e_y})e^{-i\omega t} = \frac{4\pi R_0^3 M_0}{3}(\boldsymbol{e_x} + i\boldsymbol{e_y})e^{-i\omega t},$$

由直角坐标基矢量与球坐标基矢量的变换：

$$\boldsymbol{e_x} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e_R} + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e_\theta} - \sin\phi\boldsymbol{e_\phi},$$

$$\boldsymbol{e_y} = \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e_R} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e_\theta} + \cos\boldsymbol{e_\phi},$$

有

$$\boldsymbol{m} = m_0 e^{i\omega t + i\phi}(\sin\theta\boldsymbol{e_R} + \cos\theta\boldsymbol{e_\theta} + i\boldsymbol{e}_\phi), \ddot{\boldsymbol{m}} = -\omega^2\boldsymbol{m},$$

辐射场和平均辐射能流密度为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{e_R}) \times \boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^2 M_0 R_0^3}{3c^2 R}(\cos\theta\boldsymbol{e_\theta} + i\boldsymbol{e_\phi})e^{i(kR-\omega t+\phi)},$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^2 M_0 R_0^3}{3cR}(i\boldsymbol{e_\theta} - \cos\theta\boldsymbol{e_\phi})e^{i(kR-\omega t+\phi)},$$

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^4 M_0^2 R_0^6}{18c^3 R^2}(1 + \cos^2\theta)\boldsymbol{e_R}.$$