2023春季《数学分析B2》期中试卷解析

一（本题15分）讨论函数$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)处的（1）连续；（2）可偏导；（3）可微性

解析：（1）连续性；即：$0\leq\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|=|\mathrm{x}-\mathrm{y}|\left|\frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{3}{2}|\mathrm{x}-\mathrm{y}|\to 0$

（2）偏导数；即：$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1$

同理：$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=-1$

（3）全微分；即：$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

即：$=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

即：$=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{x^3-y^3-(x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

即：$=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{x^3-y^3-x^3-xy^2+x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

即：$=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\neq 0$

二（本题12分，每小题6分）

1. 设二元函数$\mathrm{z}=\mathrm{f}(\mathrm{s},\mathrm{t})$有二阶连续偏导数，求$\mathrm{z}=\mathrm{f}(\mathrm{xy},\mathrm{x})$的偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解析：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+f'_2$

进一步：$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f'_1+yxf''_{11}+xf''_{21}$

2.求由方程$z^3-3xyz=a^3$在点(0,0,1)附近所确定函数$z(x,y)$的偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.其中a为给定的正常数.

解1：设$F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$

则：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz}{z^2-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xz}{z^2-xy}$

得：$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)$

即：$=\frac{(z+yz_y')(z^2-xy)-yz(2zz_y'-x)}{(z^2-xy)^2}$

到：$=\frac{\left(z+\frac{xyz}{z^2-xy}\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{xyz}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$

即：$=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$

即：$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}|_{(0,0,1)}=1.$

三（本题 12 分，每小题 6 分）

1.计算二重积分$\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $\mathrm{D}=\{(\mathrm{x},\mathrm{y})|\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\leq 1,\mathrm{y}\geq 0\}$.

解析：$\iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy=2\iint_{D_1}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$

即：$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1-\mathrm{r}^2}{1+\mathrm{r}^2}\mathrm{rdr}$

即：$=\pi\int_0^1\left(\frac{2}{1+\mathrm{r}^2}-1\right)\mathrm{rdr}$

即：$=\pi\left(\ln(1+\mathrm{r}^2)-\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\right)|_0^1$

即：$=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right).$

2.计算三重积分$\iiint_V (x+y+z)dv$,其中积分区域 V 由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和曲面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成.

分析：用三重积分的对称性，第一二项的积分为零

解析：$I=\iiint_V zdv$

由对称性：$\iiint_V xdv=0$

和：$\iiint_V ydv=0$

故有：$\iiint_V zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho$

即：$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$

即：$=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\sin^2\varphi|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$

四（本题 15 分）

已知 f(x,y)满足：$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x, f'_x(x,0)=(1+x)e^x, f(0,y)=y^2+2y$，

（1）求 f(x,y)的极值；（2）用拉格朗日乘数法求 f(x,y)在条件下 $ye^x=1$ 的极值.

解析：$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x \Rightarrow f'_x(x,y)=(1+y)^2e^x+g(x)$

由$f'_x(x,0)=(1+x)e^x \Rightarrow g(x)=xe^x \Rightarrow f'_x(x,y)=(1+y)^2e^x+xe^x$.

再对 x 积分：$\mathrm{f}(x,y)=(1+y)^2e^x+(x-1)e^x+h(y)$.

由：$f(0,y)=y^2+2y \Rightarrow h(y)=0$

所以：$\mathrm{f}(x,y)=(1+y)^2e^x+(x-1)e^x$.

下面求 f(x,y)的极值：

由：$\begin{cases} \mathrm{f}'_x(x,y)=(1+y)^2e^x+xe^x=0 \\ \mathrm{f}'_y(x,y)=2(y+1)e^x=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,-1)$

再：$\begin{cases} \mathrm{f}''_{xx}(x,y)=(1+y)^2e^x+(x+1)e^x \\ \mathrm{f}''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x \\ \mathrm{f}''_{yy}(x,y)=2e^x \end{cases}$

有：$A=\mathrm{f}''_{xx}(0,-1)=1, B=\mathrm{f}''_{xy}(0,-1)=0, C=\mathrm{f}''_{yy}(0,-1)=2.$

由：$B^2-AC=-2<0, A=1>0$,极小值 $\mathrm{f}(0,-1)=-1$.

解析（2）：从条件中解出 $y=e^{-x}$，代入 f(x,y)中，可看出有极小值。

由拉格朗日乘数法

构造：$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2e^x+(x-1)e^x+\lambda(ye^x-1)$

有：$\begin{cases} (1+y)^2e^x+xe^x+\lambda ye^x=0 \\ 2(y+1)e^x+\lambda e^x=0 \\ ye^x-1=0 \end{cases}$

即：$\begin{cases}(1+y)^2+x+\lambda y=0\\ 2(y+1)+\lambda=0\\ ye^x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\\ \lambda=-4\end{cases}$

故条件极值点为(0,1)，条件极小值为 3.

五（本题 16 分，每小题 8 分）

1.设 a,b 是正数，Γ是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，计算第一型曲线积分$\int_{\Gamma}|xy|ds$.

解析：设Γ的参数方程为：$x=a\cos\varphi, y=b\sin\varphi, 0\le\varphi\le 2\pi$.

所以：$\int_{\Gamma}|xy|ds=ab\int_0^{2\pi}|\cos\varphi\sin\varphi|\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$

即：$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\varphi+b^2}\,d\varphi$

即：$=2ab\int_0^1\sqrt{(a^2-b^2)t+b^2}\,dt$

即：$=2ab\frac{2}{3(a^2-b^2)}((a^2-b^2)t+b^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1$

即：$=\frac{4ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3)$

即：$=\frac{4ab}{3(a+b)}(a^2+b^2+ab)$

注：以上在 a>b 的情况下推出结论；当 a<b 和 a=b 情况时，

所得结论一样.

2.设 a,b,c 是常数，S 是圆球面$x^2+y^2+z^2=R^2,(R>0)$，计算第一型曲面积分

$\oiint_S(ax+by+cz)^2dS$。

解析：由对称性可知

有：$\oiint_S xydS=\oiint_S yzdS=\oiint_S zxdS=0$

且：$\oiint_S x^2dS=\oiint_S y^2dS=\oiint_S z^2dS$

因此：$\oiint_S(ax+by+cz)^2dS=\oiint_S(a^2+b^2+c^2)x^2dS$

即：$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\oiint_S(a^2+b^2+c^2)dS$

即：$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\oiint_S\ R^2dS$

即：$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}4\pi R^4$.

六（本题 10 分）证明曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3f(\frac{y}{x})$上任意点处的切平面在 0z 轴上的截距与切点到原点的距离之比为常数，并求此常数.

证明：令：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 r 表示点(x,y,z)到原点的距离

设：$u=\frac{y}{x}$; 且 $F(x,y,z)=z+r-x^3f(u)$

则：$F'_x(x,y,z)=\frac{x}{r}-3x^2f(u)+xyf'(u)$

和：$F'_y(x,y,z)=\frac{y}{r}-x^2f'(u)$

及：$F'_z(x,y,z)=\frac{z}{r}+1$.

则曲面在任意点(x,y,z)的切平面方程

为：$F'_x(x,y,z)(X-x)+F'_y(x,y,z)(Y-y)+F'_z(x,y,z)(Z-z)=0$

即：$F'_xX+F'_yY+F'_zZ=F'_xx+F'_yy+F'_zz=-2(r+z)$

转化为截距式方程：$\frac{X}{-\frac{2(r+z)}{F'_x}}+\frac{Y}{-\frac{2(r+z)}{F'_y}}+\frac{Z}{-\frac{2(r+z)}{F'_z}}=1$

切平面在 0z 轴上的截距为：$c=-\frac{2(r+z)}{F'_z}=-\frac{2(r+z)}{\frac{z}{r}+1}=-2r$

故截距与切点到原点的距离为：-2

七（本题 10 分）：设 f(x,y)为开区域 $D\subseteq R^2$上的连续可偏导函数，u,v 为R^2上的夹角为 a 的单位向量. 证明：$((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2)\sin^2a\le 2((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2)$.

证明 1：设方向 u 的方向角为θ，则 u 的方向余弦为$\{\cos\theta,\sin\theta\}$

则：v 的方向余弦为$\{\cos(\theta+a),\sin(\theta+a)\}$

于是：$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$，$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta+a)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta+a)$

有：$\frac{\partial f}{\partial u}\sin(\theta+a)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\sin(\theta+a)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin(\theta+a)$

和：$\frac{\partial f}{\partial v}\sin\theta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta+a)\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta+a)\sin\theta$.

得：$\frac{\partial f}{\partial u}\sin(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial v}\sin\theta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\sin(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta+a)\sin\theta$

即：$=\frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta\sin(\theta+a)-\cos(\theta+a)\sin\theta)$

即：$=\frac{\partial f}{\partial x}\sin a$.

设$\sin a\neq 0$时，（当$\sin a=0$时不定式成立）

于是：$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{1}{\sin \mathrm{a}}(\frac{\partial f}{\partial u}\sin(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial v}\sin\theta)$

同理：$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$，　$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta+a)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta+a)$

有：$\frac{\partial f}{\partial u}\cos(\theta+a)=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\cos(\theta+a)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos(\theta+a)$

和：$\frac{\partial f}{\partial v}\cos\theta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta+a)\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta+a)\cos\theta$.

得：$\frac{\partial f}{\partial u}\cos(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial v}\cos\theta=\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\cos(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta+a)\cos\theta$

即：$=\frac{\partial f}{\partial y}(\sin\theta\cos(\theta+a)-\sin(\theta+a)\cos\theta)$

即：$=-\frac{\partial f}{\partial y}\sin a$.

是：$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{1}{\sin \mathrm{a}}(\frac{\partial f}{\partial u}\sin(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial v}\sin\theta)$

和：$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}=-\frac{1}{\sin \mathrm{a}}(\frac{\partial f}{\partial u}\cos(\theta+a)-\frac{\partial f}{\partial v}\cos\theta)$

故：$((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2)=\frac{1}{\sin^2 a}((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2-2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\cos a)$

即：$\leq\frac{1}{\sin^2 a}((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2+2|\frac{\partial f}{\partial u}||\frac{\partial f}{\partial v}|)$

即：$\leq\frac{2}{\sin^2 a}((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2)$

于是：$((\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2)\sin^2 a\leq 2((\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2)$.

八（本题 10 分）:

二元函数 $f(x,y)$被称为凸函数是指：对任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R^2$，$t\in[0,1]$，都有

如下不等式：$f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)\le tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2)$。

假设函数 f 是可微的，求证：f 是凸函数等当且仅当对任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in R^2$，

有$(x_1-x_2)f_x'(x_1,y_1)+(y_1-y_2)f_y'(x_1,y_1)\ge f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)$.

证明：

必要性：$f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))\le f(x_1,y_1)+t(f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1))$

有：$f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))-f(x_1,y_1)\le t(f(x_2,y_2)+f(x_1,y_1),t\in(0,1)$

上式乘$\frac{1}{t}$，令 $t\to 0^+$，即得必要性。

充分性：$t\in(0,1)$，记$P_t=((1-t)x_1+tx_2,(1-t)y_1+ty_2)$

有：$[(1-t)x_1+tx_2-x_2]\frac{\partial f}{\partial x}(P_t)+[(1-t)y_1+ty_2-y_2]\frac{\partial f}{\partial y}(P_t)$

：$=(1-t)(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x}(P_t)+(1-t)(y_1,y_2)\frac{\partial f}{\partial x}(P_t)\ge f(P_t)-f(x_2,y_2)\ldots(1)$

：$[(1-t)x_1+tx_2-x_1]+[(1-t)y_1+ty_2-y_1]\frac{\partial f}{\partial y}(P_t)=$

：$=t(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(P_t)+t(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(P_t)\ge f(P_t)-f(x_1,y_1)\ldots\ldots(2)$

又：$(1)\times t+(2)\times(1-t)\Longrightarrow 0\ge f(P_t)-tf(x_2,y_2)-(1-t)f(x_1,y_1)$.