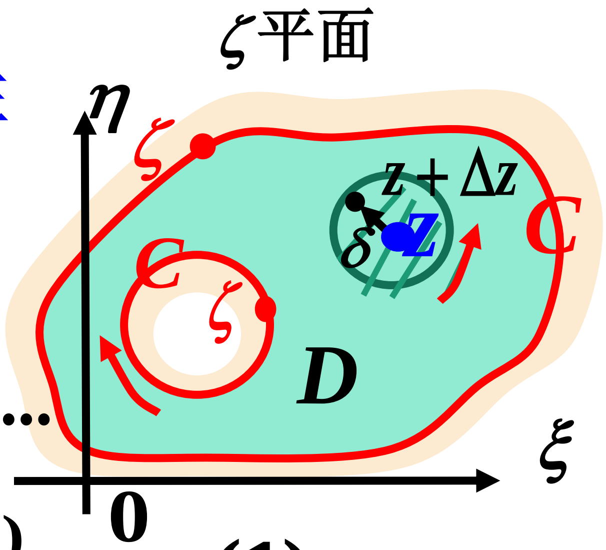
解析函数的高阶导数积分公式



定理6(P60) 在定理5(P59)的条件下, 即设 $f(z)$在(简单或复) 闭路C及其所围区域D 内处处解析, 则 $\forall z\in D$, $f(z)$ 有任意阶导数, 且

$$f^{\underline{(n)}}(z)=\frac{\underline{n!}}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\underline{n+1}}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\ldots$$

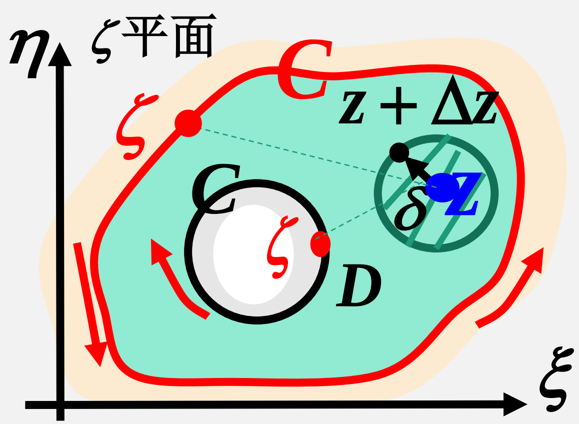
证明: 1) $n=1$时, 需证$f'(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta$. (1)

由定理5(P59)得 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$. 据此用导数定义证明(1).

D开, 故$\forall z\in D$, 存在充分小的$\delta>0$, 使得当$|\Delta z|<\delta$时, $z+\Delta z\in D$.

$$I\triangleq\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right\}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right|$$



由定理5(P59)得 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$

D开, $\forall z\in D,\ \exists\delta>0$, 当$|\Delta z|<\delta$时, $z+\Delta z\in D$.

$$I \triangleq \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right\}f(\zeta)\,d\zeta\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{\Delta z\, f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\,d\zeta\right|.$$

故$\forall\zeta\in C$, $|\zeta-z|\geq\delta$, $|\zeta-z-\Delta z|\geq|\zeta-z|-|\Delta z|\geq\delta-|\Delta z|$,

因$f(\zeta)$在C上连续, 存在与Δz无关的常数$M>0$, 使得$|f(\zeta)|\leq M,\ \forall\zeta\in C$.

$$I\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|\Delta z|M}{\delta^2(\delta-|\Delta z|)}l_C\to 0,$$ 当$|\Delta z|\to 0$时. 故 $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$

故 $n=1$ 时公式得证. 2) 当 $n>1$ 时用归纳法证明.

归纳法. 假设 $f^{(n-1)}(z)=\frac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\mathrm{d}\zeta$ 成立. 注意: $\forall \zeta \in C$, $|\zeta - z| \ge \delta$.

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \underline{\left\{\frac{(n-1)!}{\Delta z}\left\{\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right\}-\frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}\right\}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right|.$$

$$\frac{(n-1)!}{\Delta z}\left\{\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right\} = \frac{(n-1)!}{\Delta z}\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)\left(\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{n-1}}+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{n-2}(\zeta-z)}+\cdots+\frac{1}{(\zeta-z)^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(\zeta-z)(\zeta-z-\Delta z)}\left(\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{n-1}}+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{n-2}(\zeta-z)}+\cdots+\frac{1}{(\zeta-z)^{n-1}}\right) \rightarrow \frac{(n-1)!\cdot n}{(\zeta-z)^{n+1}},\quad |\Delta z|\to 0\text{时}.$$

由此可以证明: $\left|\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| \rightarrow 0$, 当$|\Delta z|\to 0$时.

故 $f^{(n-1)}(z)$可导, 且 $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$.

由归纳法得, 对于一般的n, 定理6(P60) 结论成立. #

定理6(P60) 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则

则 $\forall z\in D$，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad n=0,1,2,\cdots \quad (n=0\text{对应P}\,54\text{定理}1.)$$

定理6(P60) ➡ 解析函数可以求任意阶导数，即解析函数的任意阶导数解析.

★★★

定理6(P60) $\Rightarrow$ 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则

则 $\forall z_0\in D$，

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n=0,1,2,\cdots$$

在同样条件下，$\forall a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, 若 $\frac{b}{a}\in D$, 则

$$\int_C \frac{f(z)}{(az-b)^n}\,\mathrm{d}z=\int_C \frac{f(z)}{a^n\left(z-\frac{b}{a}\right)^n}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!\,a^n}\,f^{(n-1)}\left(\frac{b}{a}\right).$$

$\boxed{\text{熟背}}$

例 计算积分 $I = \int_C \left\{ \frac{e^z}{z(z-2i)} + \frac{\cos z}{(2z-2i)^3} \right\} dz,\ C: |z-3i| = r\ (r \neq 1, 2, 3).$

解 由 $z(z-2i) = 0$ 解得奇点 $z_1 = 0,\ z_2 = 2i$.

由 $(2z-2i)^3 = 0$ 解得奇点 $z_3 = i$. 它们与圆心3i的距离分别为:

$|0-3i| = 3$，$|2i-3i| = 1$，$|i-3i| = 2.$ $\boxed{\text{需根据 } r \text{ 的大小讨论.}}$

(1) 当 $0 < r < 1$ 时，没有奇点在积分路径 C 内, 故 $I = 0.$

(2) 当 $1 < r < 2$ 时，只有奇点 $2i$ 在 C 内, 故

$$I = \int_C \frac{e^z}{\underline{z(z-2i)}} dz + \int_C \frac{\cos z}{(2z-2i)^3} dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2i} + 0$$

$$= 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi e^{2i}.$$

(3) 当$2<r<3$时, 只有奇点i和2i在$C:|z-3i|<r$ 内, 故

$$I=\int_C \frac{e^z}{\underline{z(z-2i)}}\,dz+\int_C \frac{\cos z}{\underline{8(z-i)^3}}\,dz=2\pi i\cdot \frac{e^z}{z}\Big|_{z=2i}+\frac{2\pi i}{8(3-1)!}\cdot \frac{d^{3-1}\cos z}{dz^{3-1}}\Big|_{z=i}$$

$$=\pi e^{2i}+\frac{2\pi i}{8\cdot 2!}\cdot \frac{d^2\cos z}{dz^2}\Big|_{z=i}=\pi e^{2i}+\frac{1}{8}\pi i(-\cos i)$$

$$=\pi\cos 2+i\pi\sin 2-\frac{1}{8}\pi i\,\mathrm{ch}\,1=\pi\cos 2+i\pi\left(\sin 2-\frac{1}{8}\mathrm{ch}\,1\right).$$

例　计算积分 $I=\int_C\left\{\frac{e^z}{\underline{z(z-2i)}}+\frac{\cos z}{\underline{(2z-2i)^3}}\right\}dz,\ C:|z-3i|=r\ (r\neq 1,2,3).$

解 奇点 $z_1=0,\ z_2=2i,\ z_3=i$. 与圆心的距离分别为:

$|0-3i|=3,\quad |2i-3i|=1,\quad |i-3i|=2.$ 需根据 r 的大小讨论.

(1) 当$0<r<1$时, 没有奇点在$C:|z-3i|<r$ 内，故$I=0.$

(2) 当$1<r<2$时, 只有奇点2i在C 内, 故

$$I=\int_C \frac{e^z}{z(z-2i)}\,dz+\int_C \frac{\cos z}{(2z-2i)^3}\,dz=2\pi i\cdot \frac{e^z}{z}\Big|_{z=2i}+0=\pi e^{2i}.$$

(4) 当$r>3$时，奇点0,2i,i全在$C:|z-3\mathrm{i}|<r$ 内, 故

取$\rho>0$充分小, 则由多联通柯西积分定理得

$$I=\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z+\int_C \frac{\cos z}{(2z-2\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{|z|=\rho}\frac{\mathrm{e}^z}{\underline{z}(z-2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z+\int_{|z-2\mathrm{i}|=\rho}\frac{\mathrm{e}^z}{z\underline{(z-2\mathrm{i})}}\,\mathrm{d}z+\int_C\frac{\cos z}{8(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^z}{z-2\mathrm{i}}\bigg|_{z=0}+2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^z}{z}\bigg|_{z=2\mathrm{i}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{8\cdot 2!}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\cos z}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}}$$

$$=-\pi+\pi\cos 2+\mathrm{i}\pi\left(\sin 2-\frac{1}{8}\operatorname{ch}1\right).\ \#$$

(3) 当$2<r<3$时, 只有奇点2i和i在$C:|z-3\mathrm{i}|<r$ 内, 故

$$I=\int_C\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z+\int_C\frac{\cos z}{8(z-\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^z}{z}\bigg|_{z=2\mathrm{i}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{8(3-1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{3-1}\cos z}{\mathrm{d}z^{3-1}}\bigg|_{z=\mathrm{i}}$$

$$=\pi\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}-\frac{1}{8}\pi\mathrm{i}\cos\mathrm{i}\ =\pi\cos 2+\mathrm{i}\pi\left(\sin 2-\frac{1}{8}\operatorname{ch}1\right).$$

总结：柯西积分定理和柯西积分公式

设 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则

则 $\forall z \in D, \forall z_0 \in D$, $f(z)$ 有任意阶导数，且

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0; \quad \left(\text{定理2(P 54),定理3(P 55)}\right)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z; \qquad \left(\text{定理5(P 59)}\right)$$

★★★★★

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n = 1, 2, \cdots. \quad \left(\text{定理6(P60)}\right)$$

难点：灵活运用柯西积分定理和柯西积分公式计算或证明在闭曲线 上复积分.

例　试证明不存在这样的函数，它在闭单位圆 $|z| \le 1$ 上解析，而在单位圆周上的值是 $\dfrac{\sin z}{z-0.5}$.

与P68第16题类似.

证明：反证法. 假如存在 $f(z)$ 在 $|z| \le 1$ 上解析，且当 $|z| = 1$ 时，$f(z) = \dfrac{\sin z}{z-0.5}$.

首先因为 $f(z)$ 在 $C: |z| \le 1$ 上解析，故由柯西积分定理(P54 定理2)，

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \underline{\quad 0 \quad}. \qquad (1)$$

又，当 $|z| = 1$ 时，$f(z) = \dfrac{\sin z}{z-0.5}$，代入上式左端，由柯西积分公式得

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z-0.5}\,dz = 2\pi i \sin 0.5 \ne 0. \quad (2)$$

(1)和(2)矛盾.　故……………………#

例8(P62) 设$f(z)$在闭圆$|z|\leq 1$内解析，且$f(0)=1$, $C:|z|=1$, 正向.

(1)证明 $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pm f'(0)$.

(2)证明 $\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \pi+\frac{\pi}{2}f'(0)$,

$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \pi-\frac{\pi}{2}f'(0)$.

P67 习题 5, 9, 16证明思想与此题类似.

思路: (a)首先用柯西积分公式或柯西积分定理, 求出复积分或证明相关积分等式;

(b) 利用参数法把复积分 转化为实积分;

(c) 综合(a)和(b), 即让(a)和(b) 的结果相等，证明实积分等式.

注意: 这里强调的是柯西积分定理和柯西积分公式的应用,
并不需要大家用数学分析中的知识去具体求证实积分等式.

例8(P62) 设$f(z)$在闭圆$|z|\le 1$内解析, 且$\underline{f(0)=1}$, $C:|z|=1$, 正向.

(1)证明 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pm f'(0)$. (2)……

证明: (1)由柯西积分定理和柯西积分公式知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\underline{\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}}f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\underline{z}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\left\{\frac{2f(z)}{z}\pm\left(f(z)+\frac{f(z)}{z^2}\right)\right\}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{2f(z)}{z}\mathrm{d}z\pm\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z\right\}$$

$$=2f(z)\Big|_{z=0}\pm\left\{0+\frac{1}{(2-1)!}f'(z)\Big|_{z=0}\right\}$$

$$=2\pm f'(0).\ \Leftarrow(\text{根据条件}f(0)=1)$$

注意: 这里强调的是柯西积分定理和柯西积分公式的应用, 并不需要大家用数学分析中的知识去具体求证实积分等式.

例8(P62) 设$f(z)$在闭圆$|z|\le 1$ 内解析，且$f(0)=1$, $C:|z|=1$, 正向.

(1)证明 $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pm f'(0).$

(2)证明 $\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\pi+\frac{\pi}{2}f'(0)$, $\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\pi-\frac{\pi}{2}f'(0).$

证明: (2)C的参数方程为$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, $z'(\theta)=\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\left\{2\pm\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right\} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pm 2\cos\theta)\,f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2},}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\overset{(1)}{=}2+f'(0), & \text{"}\pm\text{"取"}+\text{"时},\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\overset{(1)}{=}2-f'(0), & \text{"}\pm\text{"取"}-\text{"时},\end{cases}$$

等式两边乘以$\frac{\pi}{2}$得到(2)的结论. #

$$\boxed{1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}.}$$

例 设 $f(z)$在$|z-a|<R$ 内解析,

证明: $\forall r\in(0,R)$, $\underline{f'(a)}=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}[\underline{f(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

证: 设 $f(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\underline{u(r,\theta)}+\mathrm{i}\,v(r,\theta).$

因结论左端是$f'(a)$, 故利用P 60定理6柯西导数积分公式.

根据题意取闭路$C: z=a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, 即圆周$|z-a|=r$.

$$\underline{\underline{f'(a)}=\frac{1!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{1+1}}\mathrm{d}z}=\frac{1}{2\pi\cancel{\mathrm{i}}}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{\cancel{2}}}(\cancel{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\cancel{\mathrm{i}})\,\mathrm{d}\theta$$

$$\underline{=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u+\mathrm{i}v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.}\quad(1)$$

$$\underline{0=\int_C}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}f(a+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i})\,\mathrm{d}\theta\ \underline{=r\,\mathrm{i}\int_0^{2\pi}(u+\mathrm{i}v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.}$$

乘以$\frac{1}{r\mathrm{i}\cdot 2\pi r}$后取共轭得, $0=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u-\mathrm{i}v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$ (2)

(1)和(2)相加得结论. # 将此例整理到作业本.

3.5 解析函数的性质(柯西积分公式的应用)

平均值公式(P63) 设$f(z)$在闭圆$|z-a|\leq R$上解析, 则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int_{|z-a|=R} f(z)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta,$$

其中$\mathrm{d}s$是积分路线上的弧长微分.

平均值公式(P63) 设$f(z)$在闭圆$|z-a|\le R$上解析, 则

$$\underline{f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|z-a|=R} f(z)\,\mathrm{d}s}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta,$$

其中$\mathrm{d}s$是积分路线上的弧长微分.

证明 记$C:|z-a|=R$, $z=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, $z'(\theta)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}$,

由柯西积分公式,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\underline{\mathrm{i}}}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\underline{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\underline{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i})}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

在C上, $\underline{z=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \mathrm{d}s=|\mathrm{d}z|=|z'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta=|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}|\,\mathrm{d}\theta=R\,\mathrm{d}\theta}$, 故

$$\frac{1}{2\pi R}\int_C f(z)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\cancel{R}}\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cancel{R}\,\mathrm{d}\theta=f(a).$$

比较上述结论中第一等号的左右两端实部, 将用于证明4.2节中定理4(P 72).

平均值公式的一个应用：

例(P 68的19题). 设$R>0$, $f(z)$在$|z|\le R$上解析, $a>0$, $|f(0)|<a$, 而在圆周$|z|=R$上, $|f(z)|>a$.

试证：在圆域$|z|<R$ 内$f(z)$至少存在$\underline{\text{一个}}$零点.

证明：$\underline{\text{反证法.}}$ 在$|z|<R$内每一点z有$f(z)\ne 0$.

又因在$|z|=R$上, $|f(z)|>a$, 故在$|z|\le R$上每一点z有$f(z)\ne 0$,

$\underline{\text{故}g(z)\triangleq \dfrac{1}{f(z)}\text{在}|z|\le R\text{上解析.}}$ $\underline{|g(0)|=\dfrac{1}{|f(0)|}>\dfrac{1}{a}.}$

而在圆周$|z|=R$上, $|g(z)|=\dfrac{1}{|f(z)|}<\dfrac{1}{a}$. 由平均值公式和长大不等式,

$$\frac{1}{a}<|g(0)|=\left|\frac{1}{2\pi R}\int_{|z|=R} g(z)\,\mathrm{d}s\right| \underline{\le} \frac{1}{2\pi R}\cdot\frac{1}{a}\cdot 2\pi R=\frac{1}{a}.$$

矛盾. 故在$|z|<R$ 内$f(z)$至少存在一个零点. #

注意此题直接对$f(z)$用平均值公式不能得出结论.

最大模原理(平均值公式的应用)

设$f(z)$在有界域D内解析，在有界闭域$\bar{D}=D+C$上连续，其中C是D 的边界，$f(z)$在D内不恒等于常数，则$|f(z)|$只能在边界C上取到它在 整个闭域$\bar{D}=D+C$上的最大值，即$\exists a\in C$，使得$|f(a)|=\max\limits_{z\in D+C}|f(z)|$，且$\forall z\in D$，$|f(z)|<|f(a)|$.

证明：首先因$f(z)$在$\bar{D}$上连续，故实函数$|f(z)|$在闭域$\bar{D}$上连续.

因此$\exists z_0\in D+C$，使得$M\triangleq\max\limits_{z\in D+C}|f(z)|=|f(z_0)|$.

我们只需证明$z_0\notin D$. 用反证法. 假设$z_0\in D$.

(1) 证$|f(z)|$在z_0 的任一含在D 内的邻域内恒为常数M； 用平均值公式.

(2)证明$\forall z\in D$，$|f(z)|=M$. 用圆链法.

(1) 用平均值公式. 因D是开域，$z_0\in D$，任作一个以z_0 为中心、R 为半径且完全含在D内的圆域，其边界圆周K_0：$|z-z_0|=R$.

设 $f(z)$ 在有界域 D 内解析，在 $\bar{D} = D + C$ 上连续，C 是 D 的边界，$f(z)$ 不恒为常数，则 $|f(z)|$ 只能在 C 上取到它在闭域 $\bar{D}$ 上的最大值.

证明：由条件，实函数 $|f(z)|$ 在闭域 $\bar{D}$ 上连续. 因此 $\exists z_0 \in D + C$，使得 $\underline{M \triangleq \max\limits_{z\in D+C} |f(z)| = |f(z_0)|}$. 只需证 $z_0 \notin D$. 用反证法. 假设 $z_0 \in D$.

(1) 证 $|f(z)|$ 在 z_0 的任一含在 D 内的邻域内恒为 M. 用平均值公式.

因 D 是开域，$z_0 \in D$，任作一个以 z_0 为中心、R 为半径且完全含在 D 内的圆域，记边界圆周为 $K_0 : |z - z_0| = R$.

由条件，$f(z)$ 在 K_0 及其内部解析.对任意在 K_0 内且与其同心的圆周 $K_r : z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \le \theta < 2\pi$，$0 < r \le R$，由平均值公式得，

$$\underline{M} = |f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta\right| \le \underline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta}$$

$$\underline{\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}\theta} = \underline{M}.$$

故此式中"$\le$"都应该取"$=$".

由条件, $f(z)$在K_0 及其内部解析.对任意在K_0 内且与其同心的圆周

$K_r: z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$, $0 < r \le R$, 由平均值公式得,

$$\underline{M =} \left|f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\theta\right| \le \underline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta}$$

$$\underline{\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}\theta}\ \underline{= M}.$$ 故此式中"≤"都应该取"=".

故 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}\theta$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{M - \left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\right\}\mathrm{d}\theta = 0.$

又因 $M - \left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \ge 0$, 故 $\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| \equiv M$, $0 \le \theta < 2\pi$.

再由$r \in (0, R]$ 的任意性, 知 在圆周K_0 及其内部$\left|f(z)\right| \equiv M$.

(2) 证明$\forall z \in D$, $\left|f(z)\right| = M$. 用圆链法.

$\forall z \in D$,用一条含在D内的逐段光滑曲线L 将z_0 和z 连接.

因为D有界, 故可设L 的长度有限.

(2) $\forall z \in D$, 用一条含在D内的逐段光滑曲线L将z_0和z连接. D有界, 故可设L长度有限. 用圆链法证明$|f(z)| = M$.

设$\rho = \min\limits_{z\in L,\ \zeta\in C} |z-\zeta|$, $\rho > 0$. 作圆链. 作圆周$K_0 : |z - z_0| = \frac{\rho}{2}$,

设K_0与L交于点z_1. 再作圆周K_1 : $|z - z_1| = \frac{\rho}{2}$.

依次类推, 以前一圆周与L的交点为圆心、$\frac{\rho}{2}$为半径连续作圆周下去.

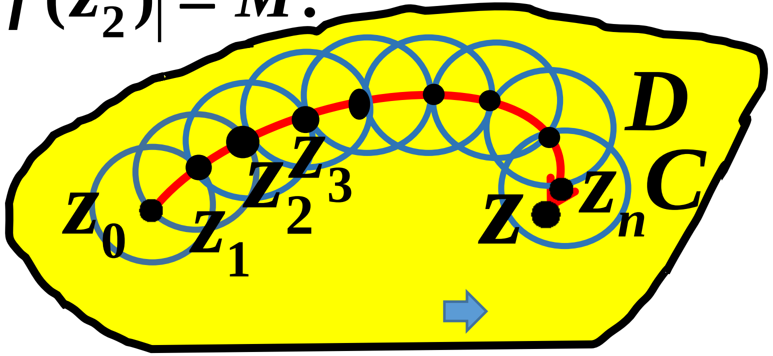
$\exists n \in \mathbb{Z}^+$, 使得第$n$个圆周$K_n$: $|z - z_n| = \frac{\rho}{2}$满足$z$落在$K_n$上或其内部.

由(1)得, $|f(z_1)| = M$. 对z_1和K_1利用(1)得 $|f(z_2)| = M$.

依此类推得$|f(z_k)| = M$, $1 \le k \le n$.

对z_n和K_n利用(1)得$|f(z)| = M$.

由z任意性知$|f(z)|$在D内恒等于M.



由P47第8(5)题, $f(z)$在D内恒等于复常数. $f(z)$在$D+C$上连续,

所以$f(z)$在$D+C$上恒等于复常数. 这与条件矛盾. 故$z_0 \notin D$, $z_0 \in C$. #

作业

P 67-68

9(参考习题第5或16题, 或参考P62例8)

11,14, 19(应用P 63平均值公式)

补：设 $f(z)$在$|z-a|<R$ 内解析，证明：$\forall r\in(0,R)$,

$$f'(a)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}[f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

1.背第2章中C-R方程(柯西-黎曼方程)及求导公式(2.7)(P 28-29).
以及各种初等函数的定义和性质；

2.熟练掌握参数积分法和长大不等式；

3.熟记柯西积分定理(P 54-55定理2及其推论1,2和定理3)及其应用；

4.熟记柯西积分公式(P 59定理5和P 60定理6)及其应用.

柯西积分公式的意义:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

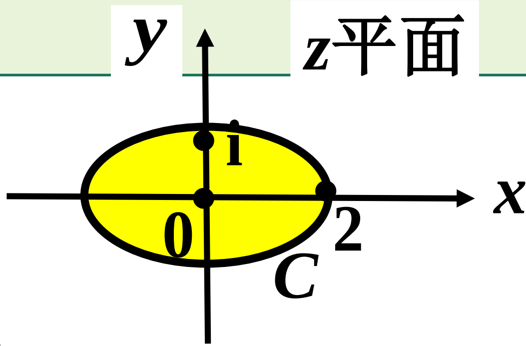
(1) 函数在区域内部任一点的值可用它在边界上的值表示. 从而解析函数在区域内部任一点的值, 完全可由它在区域边界上的值确定. 如果两解析函数在区域边界上处处相等, 则它们在区域内处处相等. (这是解析函数的一个重要特征.)

(2) 公式给出了一种用积分表达式表示解析函数的方法. (这是研究解析函数各种性质的有力工具.)

(3) 公式提供了一种计算积分的方法.

定理5(P59) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则 $\forall z_0 \in D$, $\quad f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$ (柯西积分公式)



例. 求(1)$\int_{|z|=2}\dfrac{z^2}{z-i}\,dz$, (2)$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{z^2}{z-i}\,dz$.

解. (1) $z=i$在圆$|z|<2$内， z^2在闭圆$|z|\le 2$上处处解析,

故由柯西积分公式即定理5 得

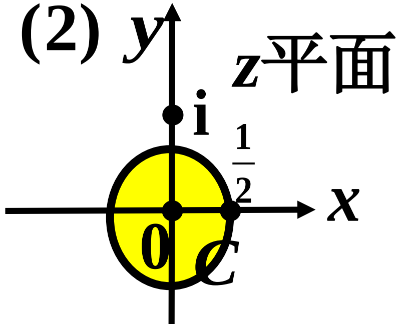
$$\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-i}\,dz = 2\pi i\cdot\left(z^2\Big|_{z=i}\right) = -2\pi i.$$

(2) $z=i$不在圆$|z|<\frac{1}{2}$内及其边界圆周上, 故$\dfrac{z^2}{z-i}$在闭域$|z|\le\frac{1}{2}$上处处解析.

故由柯西积分定理即定理2(P54) 得

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{z-i}\,dz = 0.$$

(2)



例 计算积分 $I=\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz,\quad C:|z|=r\,(r\neq 1,2).$

解: 需根据r的大小讨论. 由$z(z+1)(z-2)^2=0$解得奇点$0,-1,2.$

(1) 当$0<r<1$时,

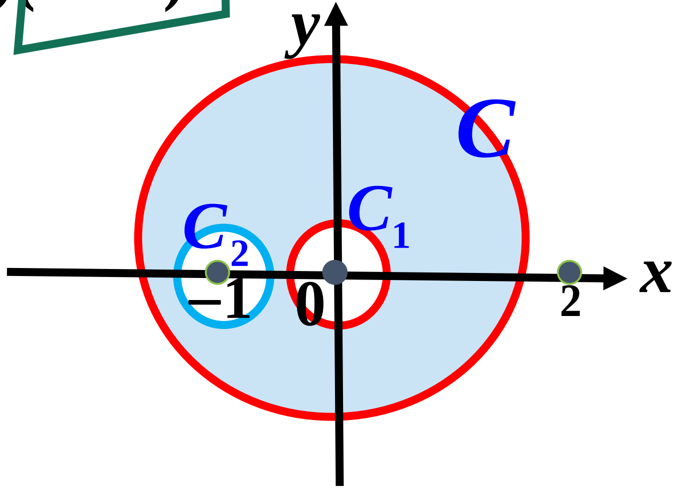
$$I=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2}\right|_{z=0}=\frac{1}{2}\pi i.$$

(2) 当$1<r<2$时, 根据多连通区域柯西积分定理(P55定理3)得

$$I=\oint_{|z|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z+1|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz\ (\rho>0\text{充分小})$$

$$=\left.\frac{2\pi i e^z}{(z+1)(z-2)^2}\right|_{z=0}+\left.\frac{2\pi i e^z}{z(z-2)^2}\right|_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{-9e}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i.$$



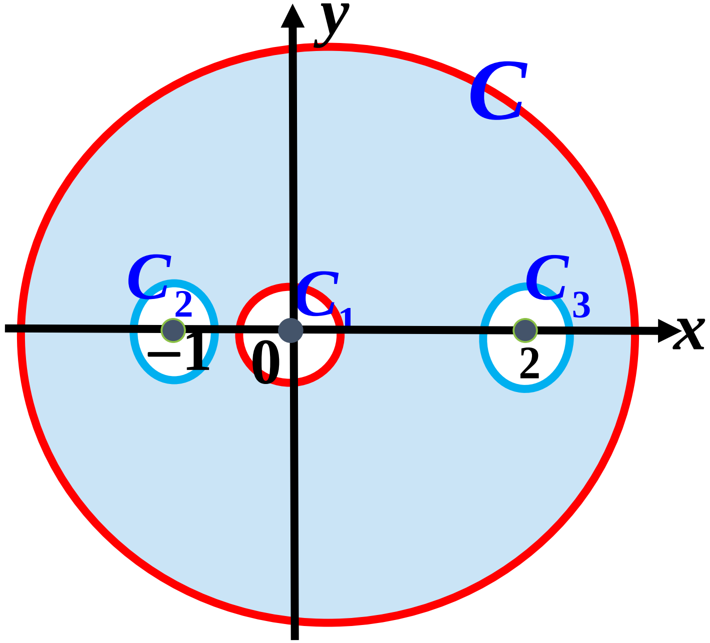
(3) 当 $r>2$ 时， 根据多连通区域柯西积分定理(P55定理3)得

$$I=\underline{\left(\oint_{|z|=\rho}+\oint_{|z+1|=\rho}\right)\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz}+\oint_{|z-2|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i+\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\frac{e^z}{z(z+1)}\right\}'\Bigg|_{z=2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i+2\pi i\frac{e^z z(z+1)-e^z(2z+1)}{z^2(z+1)^2}\Bigg|_{z=2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}+\frac{e^2}{18}\right)\pi i.\quad \#$$



(2) 当 $1<r<2$ 时，

$$I=\underline{\oint_{|z|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z+1|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz}\quad(\rho>0\text{充分小})$$

$$=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{e^z}{z(z-2)^2}\Bigg|_{z=-1}=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{-9e}=\underline{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i}.$$

$$\int_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz=\int_{|z+\frac{1}{2}|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{\underline{(2z+1)}(3i-z)}dz+\int_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)\underline{(3i-z)}}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|z+\frac{1}{2}|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})(3i-z)}dz+\underline{(-1)}\int_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)\underline{(z-3i)}}dz$$ ★★★

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{3i-z}\right|_{z=-\frac{1}{2}}-2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{2z+1}\right|_{z=3i}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{-7e^{-1}}{12i+2}-\frac{(9i-2)e^{6i}}{6i+1}\right\}=2\pi i\,\frac{-7e^{-1}-(18i-4)(\cos 6+i\sin 6)}{12i+2}$$

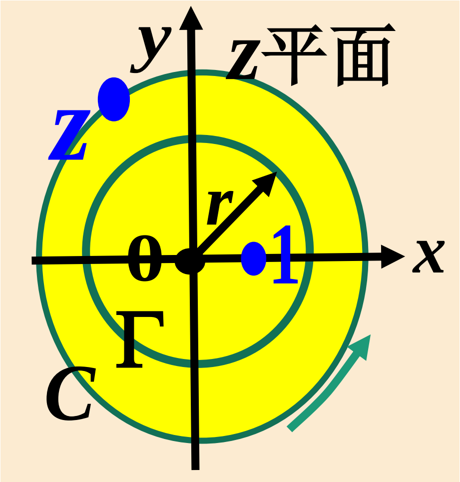
$$=\pi\,\frac{(18\cos 6+4\sin 6)+i(-7e^{-1}+4\cos 6+18\sin 6)}{6i+1}\cdot\frac{-6i+1}{-6i+1}$$

$$=\frac{\pi(42\cos 6+112\sin 6)-42\pi e^{-1}}{37}-i\,\frac{\pi\left(104\cos 6+6\sin 6+7e^{-1}\right)}{37}.\ \#$$

例 计算下列积分，其中 C 为包含正向圆周 Γ：$|z|=r>1$ 的任意简单封闭曲线.

$$(1)\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}\mathrm{d}z;\qquad (2)\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$$

解 (1) 函数 $\dfrac{\cos\pi z}{(z-1)^3}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析，但 $\cos\pi z$ 在 C 内处处解析，



根据定理6(P60)，得

$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-\underline{1})^{\underline{3}}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi \mathrm{i}}{\underline{(3-1)!}}(\cos\pi z)^{\underline{(3-1)}}\Big|_{\underline{z=1}}$$

$$=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\cdot(\cos\pi z)''\Big|_{z=1}=\pi\mathrm{i}(-\pi\sin\pi z)'\Big|_{z=1}$$

$$=\pi\mathrm{i}(-\pi^2\cos\pi z)\Big|_{z=1}=\pi^3\mathrm{i}.$$

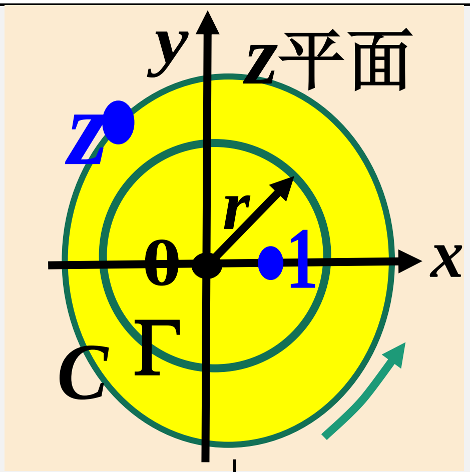
定理6(P60) 设 $f(z)$ 在闭路（简单闭路或复闭路）C 及其所围区域 D 内处处解析，则对于 D 内任一点 z，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{\underline{(n)}}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\underline{n+1}}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$(n=0$ 对应 P54 定理1.$)$

例 计算下列积分，其中 C 为包含正向圆周 Γ: $|z|=r>1$ 的任意简单封闭曲线.

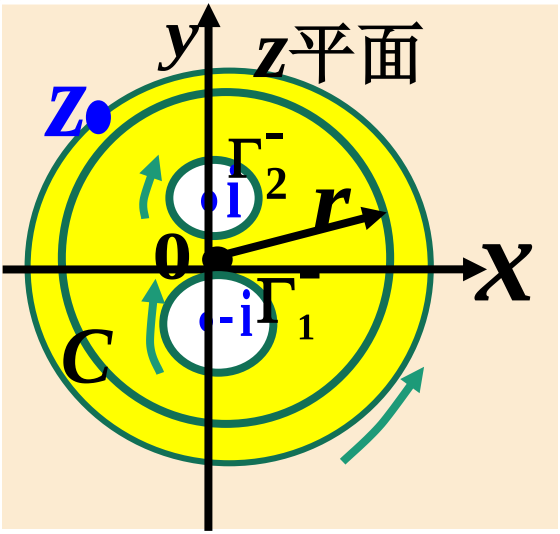
(1) $\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}dz$; (2) $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$.



解 (1) 函数 $\frac{\cos\pi z}{(z-1)^3}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析， 根据定理6(P60)，得

$$\oint_C \frac{\cos\pi z}{(z-1)^{3}}dz = \frac{2\pi i}{\underline{(3-1)!}}(\cos\pi z)^{\underline{(3-1)}}\Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{2!}\cdot(\cos\pi z)''\Big|_{z=1} = \pi i(-\pi^2\cos\pi z)\Big|_{z=1} = \pi^3 i.$$

(2) 被积函数 $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $z=\pm i$ 处不解析， i 和 $-i$ 都在 C 内，故都在 C 内.



作圆周 Γ_1: $|z+i|=\rho$， Γ_2: $|z-i|=\rho$， 取 $\rho>0$ 充分小使得

Γ_1, Γ_2 都在 $C: |z|=r$ 内部， Γ_1 在 Γ_2 外侧，Γ_2 在 Γ_1 外侧，

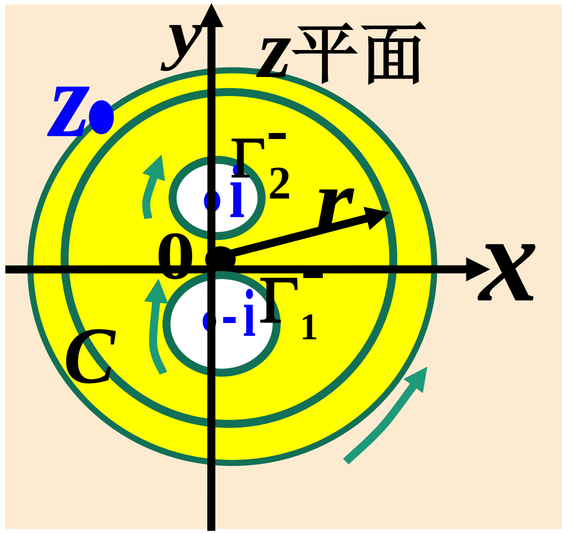
被积函数在由复闭路 $C=C+\Gamma_1^-+\Gamma_2^-$ 围成的多连通区域内解析.

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{\Gamma_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$$

根据定理3(P55)

$$(2)\ \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{\Gamma_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$$

根据定理3(P55)



$$\oint_{\Gamma_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_1}\frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz$$

根据定理6(P60)

在C_1及其内部解析

$$=\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\frac{e^z}{(z+i)^2}\right\}'\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\,\frac{e^z(z+i)^2-2(z+i)e^z}{(z+i)^4}\Bigg|_{z=i}$$

$$=2\pi i\,\frac{e^z(z+i-2)}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} = 2\pi i\,\frac{e^i(2i-2)}{8i^3} = \frac{1}{2}\pi e^i(1-i).$$

同理, $\oint_{\Gamma_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{\Gamma_2}\frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\frac{e^z}{(z-i)^2}\right\}'\Bigg|_{z=-i} = -\frac{1}{2}\pi e^{-i}(1+i).$

根据定理6(P60)

故 $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \frac{1}{2}\pi\left\{e^i(1-i)-e^{-i}(1+i)\right\} = \pi(\sin 1-\cos 1)i.$ #