第十三次作业答案

罗曾宇

题目 1. 带电粒子 e 做半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋角频率为 ω，求远处的辐射电磁场和辐射能流.

解答. 设粒子在 xy 平面运动，其电偶极矩振幅为 $p_0 = ea$，将电偶极矩矢量写成复数形式(注意在多极展开时已经对电偶极矩做了推广定义，$\boldsymbol{p} = \Sigma_i q_i \boldsymbol{r}_i$，不是说一个带电粒子就没有电偶极矩了)

$$\boldsymbol{p} = ea\boldsymbol{e_r} = ea(\cos\omega t\boldsymbol{e_x} + \sin\omega t\boldsymbol{e_y}) = ea(\boldsymbol{e_x} + i\boldsymbol{e_y})e^{-i\omega t},$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -i\omega\boldsymbol{p}, \ddot{\boldsymbol{p}} = -\omega^2\boldsymbol{p},$$

将 $\boldsymbol{e_x}$ 和 $\boldsymbol{e_y}$ 变换到球坐标基矢，得电偶极辐射场及平均辐射能流密度：

$$\boldsymbol{B} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R}\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi cR}(-i\boldsymbol{e_\theta} + \cos\theta\boldsymbol{e_\varphi})e^{i(kR-\omega t+\varphi)},$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi R}(\cos\theta\boldsymbol{e_\theta} + i\boldsymbol{e_\varphi})e^{i(kR-\omega t+\varphi)},$$

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^4 e^2 a^2}{32\pi^2 cR^2}(1 + \cos^2\theta)\boldsymbol{e_R},$$

此粒子的运动还形成磁偶极矩和电四极矩

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}a\boldsymbol{e_r} \times e\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}a\omega p_0\boldsymbol{e_z},$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} = 3ea^2\boldsymbol{e_r}\boldsymbol{e_r} = 3ap_0\boldsymbol{e_r}\boldsymbol{e_r},$$

但因为其速度 $v = \omega a << c$，即 $a << \lambda$(波长)，这里的粒子角动量守恒，磁偶极矩不随时间变化，因此没有磁偶极辐射. 电四极辐射强度比电偶极辐射低 $(\frac{a}{\lambda})^2$ 数量级，因此主要是电偶极辐射.(郭书配套答案这里有误)

题目 2. 设有一电矩振幅为 $\boldsymbol{p_0}$，振动角频率为 ω 的电偶极子距理想导体平面为 $\frac{a}{2}$ 处，$\boldsymbol{p_0}$ 平行于导体平面. 设 $a << \lambda$，求在 $R >> \lambda$ 处的电磁场及平均辐射能流.

解答. 电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的场作用于理想导体，引起导体出现表面电流，导体外的场是 $\boldsymbol{p}$ 的场与表面电流产生的场之叠加. 由于 $a << \lambda$，故导体表面附近的场为似稳场，可近似作为静场. 设导体表面为 $z = 0$ 的平面，并设其电势为零，即

$$\varphi|_{z=0} = 0,$$

令 $\boldsymbol{p} = p_0 e^{-i\omega t}\boldsymbol{e_x}$，以 $\boldsymbol{p}$ 的像 $\boldsymbol{p}'$ 产生的场代替导体表面产生的场，要保证上述边界条件满足，应使

$$\boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p} = -p_0 e^{-i\omega t}\boldsymbol{e_x}, \text{且位于} z = -\frac{a}{2},$$

由于 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 等值反向，因此这个系统的总电偶极矩为零，但它包含着磁偶极矩和电四极矩：

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}[\frac{a}{2}\boldsymbol{e_z} \times \dot{\boldsymbol{p}} + (-\frac{a}{2})\boldsymbol{e_z} \times (-\dot{\boldsymbol{p}})] = -\frac{i\omega p_0 a}{2} e^{-i\omega t}\boldsymbol{e_y},$$

$$\ddot{\boldsymbol{m}} = -\omega^2 \boldsymbol{m} = \frac{i\omega^3 p_0 a}{2} e^{-i\omega t}\boldsymbol{e_y},$$

$$D_{xz} = D_{zx} = \Sigma_{i=1}^{4} 3q_i x_i' z_i' = 3qla = 3p_0 a,$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} = 3p_0 a(\boldsymbol{e_x}\boldsymbol{e_z} + \boldsymbol{e_z}\boldsymbol{e_x})e^{-i\omega t},$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{e_R} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} = 3p_0 a(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e_z} + \cos\theta\boldsymbol{e_x})e^{-i\omega t},$$

$$\dddot{\boldsymbol{D}} = i3\omega^3 p_0 a(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e_z} + \cos\theta\boldsymbol{e_x})e^{-i\omega t},$$

由基矢量变换

$$\boldsymbol{e_x} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e_R} + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e_\theta} - \sin\phi\boldsymbol{e_\phi},$$

$$\boldsymbol{e_y} = \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e_R} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e_\theta} + \cos\phi\boldsymbol{e_\phi},$$

$$\boldsymbol{e_z} = \cos\theta\boldsymbol{e_R} - \sin\theta\boldsymbol{e_\theta},$$

得磁偶极和电四极矩辐射的磁场

$$\boldsymbol{B_m} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{e_R}) \times \boldsymbol{e_R} = \frac{-i\mu_0\omega^3 p_0 a}{8\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e_\theta} + \cos\phi\boldsymbol{e_\varphi})e^{i(kR-\omega t)},$$

$$\boldsymbol{B_D} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R}\dddot{\boldsymbol{D}} \times \boldsymbol{e_R} = \frac{-i\mu_0\omega^3 p_0 a}{8\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e_\theta} + \cos 2\theta\cos\phi\boldsymbol{e_\phi})e^{i(kR-\omega t)},$$

可见 $\boldsymbol{B_D}$ 与 $\boldsymbol{B_m}$ 有相同的数量级. 总辐射场为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_m} + \boldsymbol{B_D} = \frac{-i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^2 R}(\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e_\theta} + \cos^2\theta\cos\phi\boldsymbol{e_\phi})e^{i(kR-\omega t)},$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{e_R} = \frac{-i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c R}(-\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e_\phi} + \cos^2\theta\cos\phi\boldsymbol{e_\theta})e^{i(kR-\omega t)},$$

平均辐射能流密度为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{S}} = \frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{e_R} = \frac{\mu_0\omega^6 p_0^2 a^2}{32\pi^2 c^3 R^2}(\cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^4\theta\cos^2\phi)\boldsymbol{e_R}.$$

题目 3. 设有偏振平面波 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0}\exp^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上 ($\boldsymbol{E_0}$ 在 z 方向)，引起介质球极化，极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射. 设平面波的波长 $\dfrac{2\pi}{k}$ 远大于球半径 R_0，求介质球所产生的辐射场和能流.

解答. 由于波长 $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} >> R_0$，介质球及其表面附近的场为似稳场，近似地作为静电场边值问题，以求出介质球的极化电流分布. 球内外静电势均满足拉普拉斯方程 $\nabla^\varphi = 0$，边界条件为

$$R = 0, \varphi_1\text{应有限}; R \to \infty\text{处}, \varphi_2 \to -E_0 R\cos\theta,$$

$$R=R_0\text{处}, \varphi_2=\varphi_1, \epsilon_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}=\epsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial R},$$

ϵ 为介质球的电容率. 由 z 轴对称性和边界条件，可解出

$$\varphi_1=-\frac{3\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}E_0R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_2=-E_0R\cos\theta+\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+2\epsilon_0}\frac{E_0R_0^3}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

介质球内 $\boldsymbol{D_1}=\epsilon_0\boldsymbol{E_1}+\boldsymbol{P}=\epsilon\boldsymbol{E_1}$，得介质球极化强度的振幅

$$\boldsymbol{P_0}=(\epsilon-\epsilon_0)\boldsymbol{E_1}=-(\epsilon-\epsilon_0)\nabla\varphi_1=\frac{3\epsilon_0(\epsilon-\epsilon_0)}{\epsilon+2\epsilon_0}E_0\boldsymbol{e_z},$$

极化电荷分布构成的电偶极矩振幅为

$$\boldsymbol{p_0}=\frac{4\pi R_0^3}{3}\boldsymbol{P_0}=\frac{4\pi\epsilon_0(\epsilon-\epsilon_0)}{\epsilon+2\epsilon_0}R_0^3E_0\boldsymbol{e_z},$$

极化电荷及其形成的电偶极矩也以作用电场的角频率振动：

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p_0}e^{-i\omega t},\ddot{\boldsymbol{p}}=-\omega^2\boldsymbol{p},$$

于是辐射场和平均能流密度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{e^{i\omega R}}{4\pi\epsilon_0c^3R}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e_R}=\frac{\omega^2p_0e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0c^3R}\sin\theta\boldsymbol{e_\phi},$$

$$\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e_R}=\frac{\omega^2p_0e^{i(kR-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0c^3R}\sin\theta\boldsymbol{e_\theta},$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c}{2\mu_0}(\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{e_R}=\frac{\omega^4p_0^2}{32\pi^2\epsilon_0c^3R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e_R}.$$

题目 4. 证明在伽利略变换下，牛顿定律是协变的，麦克斯韦方程不是协变的.

解答. 设惯性系在 Σ' 以速度 v 沿另一惯性系 Σ 的 x 轴运动，两参考系相应的坐标轴平行，由伽利略变换

$$x=x^{'}+vt^{'},y=y^{'},z=z^{'},t=t^{'},$$

得速度在这两个惯性系之间得变换：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{'}}{\mathrm{d}t^{'}}+\boldsymbol{v},\text{即}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{'}+\boldsymbol{v},$$

物体的动量在这两个惯性系中分别为 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}^{'}=m^{'}\boldsymbol{u}^{'}$，而质量是伽利略变换下的不变量，即 $m=m^{'}$，于是牛顿定律在 Σ 系和 $\Sigma^{'}$ 系中有相同的形式：

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t},\boldsymbol{F}^{'}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{'}}{\mathrm{d}t^{'}},$$

即牛顿定律在伽利略变换下是协变的. 我们知道，从麦克斯韦方程组可以导出矢势和标势的波动方程，设 Σ 系中标势波动方程为

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

在伽利略变换下，φ,ρ,ϵ_0 均为不变量，但光速 c 不是不变量，因此这个方程不是协变的，由此推知麦克斯韦方程组也不是协变的.

题目 5. 设两根互相平行的尺，在各自静止的参考系中的长度均为 l_0，它们以相同速率 v 相对某一参考系运动，但运动方向相反，且平行于尺子. 求站在一根尺子上测量另一根尺的长度.

解答. 设 1 尺 ($\Sigma^{'}$ 系) 沿 Σ 系 x 轴正向以速度 v 运动，则 2 尺 ($\Sigma^{''}$ 系) 相对于 Σ 系的速度为 $u_x=-v$，于是在 1 尺上测得 2 尺的速度及长度分别为

$$u_x^{'}=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}}=-\frac{2vc^2}{c^2+v^2},$$

$$l^{'}=l_0\sqrt{1-(\frac{u_x^{'}}{c})^2}=l_0\frac{c^2-v^2}{c^2+v^2}.$$

题目 6. 静止长度为 l_0 的车厢，以速度 v 相对于地面运行，车厢的后壁以速度 u_0 向前推出一个小球，求地面的观察者测得小球从后壁到前壁的运动时间.

解答. 设地面参考系为 Σ，车厢沿 Σ 的 x 轴正向运动. 在 Σ 系中，小球处于车厢后壁的时空坐标为 (x_1, t_1)，到达前壁的时空坐标为 (x_2, t_2)，在车厢参考系 Σ' 中，这两事件的时空坐标为 $(x_1', t_1'), (x_2', t_2')$.

洛伦兹变换为

$$x = \gamma(x' + vt'), t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'),$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$. 在 Σ' 系中测得车厢静止长度 $\triangle x' = x_2' - x_1' = l_0$，小球运动时间为 $\triangle t' = t_2' - t_1' = \dfrac{l_0}{u_0}$，于是由洛伦兹变换，得地面上测得小球的运动时间为

$$\triangle t = t_2 - t_1 = \gamma(\triangle t' + \frac{v}{c^2}\triangle x') = \gamma(1 + \frac{u_0 v}{c^2})\frac{l_0}{u_0}.$$

题目 7. 一辆以速度 v 运动的列车上的观察者，在经过某一高大建筑物时，看见其避雷针上跳起一脉冲火花，电光迅速传播，先后照亮了铁路沿线上的两铁塔，求列车上的观察者测量到电光到达两铁塔的时刻差，设建筑物及两铁塔都在一直线上，与列车前进方向一致，铁塔到建筑物的地面距离已知都是 l_0.

解答. 设地面参考系 Σ 中，两铁塔分别位于 $x_2 = l_0, x_1 = -l_0$，距离 $\triangle x = x_2 - x_1 = 2l_0$，被照亮的时刻相同，即 $t_1 = t_2 = \dfrac{l_0}{c}, \triangle t = t_2 - t_1 = 0$. 由洛伦兹变换

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x), x' = \gamma(x - vt),$$

的第一式，在列车参考系 Σ' 中两铁塔被照亮的时刻差为

$$\triangle t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(\triangle t - \frac{v}{c^2}\triangle x) = -\gamma\frac{2vl_0}{c^2}.$$