中国科学技术大学期中考试

2023—2024 学年第 2 学期

课程名称: 实分析

学生姓名: ________ 学　　号: ________

专　　业: ________ 年级/班级: ________

说明：1. 证明过程要求严密详细，不得使用相关结论使得试题证明平凡。
2. 除非特别说明，可测集均为欧式空间中的Lebesgue可测集，可积均为Lebesgue可积。

一、(20分)用本课程的方法计算下列极限和积分，并指明所用的定理。

(1)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}\,dx.$$

(2)

$$\int_0^{\infty}(e^{-ax^2}-e^{-bx^2})\frac{1}{x}\,dx,\quad 0<a<b.$$

二、(12分)

1. 给出本课程中可测集的定义；
2. 利用上述定义证明：$E\subset\mathbb{R}^d$ 是可测集当且仅当对任意 $A\subset\mathbb{R}^d$, 下列条件成立

$$m_*(A)=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^c),$$

其中 m_* 为外测度。

三、(16分)判断下列命题是否正确，并证明或者举出反例。仅判断不得分。

1. 若 E 是可测集，$\{f_n\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列且几乎处处收敛到几乎处处有限的函数 f。则 f_n 在 E 上依测度收敛到函数 f。
2. 若 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数，则对任意固定的 $x\in\mathbb{R}$，$f(x,y)$ 是关于 $y\in\mathbb{R}$ 的可测函数。

四、(10分)

1. 叙述Fatou引理，并给出证明。
2. 举例说明Fatou引理的结论中，等号可以不成立。

五、(20分)

1. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(E) > 0$. 求证：对任何 $\alpha \in (0,1)$，存在开区间 I 使得

$$m_*(E \cap I) \geq \alpha m_*(I).$$

2. 设 E 与 F 都是 $\mathbb{R}$ 中的可测集，且 $m(E) > 0, m(F) > 0$. 求证

$$E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$$

包含一个非空开区间。

六、(12分)设 f 是 $[0,1]$ 上的非负可测函数，求证：

1. 当 $n \to +\infty$ 时，$\int_{[0,1]} f(x)^n \, dx$ 收敛到某个极限 $\lambda \in [0,\infty]$，并指出如何求 λ.
2. 若存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得对任意正整数 n 有

$$\int_{[0,1]} f(x)^n \, dx = c,$$

则存在 $[0,1]$ 的可测子集 A, 使得 $f(x) = \chi_A(x)$, $a.e.\ x$.

七、(10分)设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的可测函数且 $f(x) > 0$. 令 $q \in (0,1)$ 且 $\mathcal{A}$ 为 $[0,1]$ 中的满足 $m(E) \geq q$ 的所有可测子集 E 的集合。求证：

$$\inf_{E \in \mathcal{A}} \int_E f(x) \, dx > 0.$$