CQ/Test 6

T1

求积分值

$$I=\int_1^\infty t^2e^{t(2-t)}dt$$

T2

设$F(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{1+x^2}dx \quad t\epsilon(0,+\infty)$,求证

(1)$F(t)$在$(0,+\infty)$连续

(2)$F(t)$在$(0,+\infty)$可导

(3))$F(t)$在$(0,+\infty)$上二阶可导，且满足方程$F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$

T3

设$|\alpha|\neq 1$,证明积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}dx$收敛，并求值

1.换元，令$x=(t-1)^2$,则有

$$t=1+\sqrt{x}\quad dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$t(2-t)=-x+1\quad t^2=1+2\sqrt{x}+x$$

$$I=\int_1^\infty t^2e^{t(2-t)}dt=e\int_0^\infty(1+2\sqrt{x}+x)e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$I=e(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})+\Gamma(1)+\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}))=e(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}+1)$$

2.(1)(2)略 Dirichlet判别法即可，用sin x的积分有界性

(3)

3.不妨设$I(u)=\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}dx$

$$I'(u)=-\int_0^{+\infty}e^{-ux}\sin x\sin\alpha x dx=-Re(\int_0^{+\infty}e^{-ux}(e^{i(1+\alpha)x}-e^{i(1-\alpha)x})dx)=\frac{u}{2}(\frac{1}{u^2+(1+\alpha)^2}-\frac{1}{u^2+(1-\alpha)^2})$$

$$I(u)=\frac{1}{4}\ln\frac{u^2+(1+\alpha)^2}{u^2+(1-\alpha)^2}$$

收敛条件u趋于正无穷为0满足,则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}dx=I(0)=\frac{1}{2}\ln|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}|$$