

随机过程应考复习

一, Poisson 过程

2016-2017 秋

(1) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程, 则 $\text{Cov}(N(t), N(s)) =$ _____.

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的 Poisson 过程到达, 且相互独立. 若不论颜色, 第一辆汽车平均到达时间为 _____; 第一辆红色汽车的平均到达时间为 _____.

(4) 设 $[0, t]$ 内到达某商店门口的顾客数 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程, 每个达到的顾客依概率 p 进入店内, 以概率 $1 - p$ 不进店即离开, 且顾客是否进店是相互独立的; 进店的每个顾客又独立地以概率 q 进行消费, 以概率 $1 - q$ 不消费. 则进店的顾客数的均值和方差为 _____ 和 _____; 消费的顾客数的均值和方差为 _____ 和 _____.

二、(16分) 设某人甲负责订阅杂志, 前来订阅的顾客数是日均到达率为 6 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$.

若每个顾客的订阅季数 $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, 且各人的选择相互独立. 设 $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志的顾客人数, $i = 1, 2, 3$. 并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 t 为止甲所得全部手续费 (假设每订出一季杂志, 甲可得手续费 1 元),

(1) 问 $N_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ 分别是什么过程? 它们是否相互独立?

(2) 试求: $E[X(t)]$, $\text{Var}(X(t))$, 及 $X(t)$ 的矩母函数 $g_{X(t)}(u) = E[e^{uX(t)}]$.

2016-2017 春

2. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的 Poisson 过程, 则 $E[N(1)N(2)] =$ _____; $E[N(10)|N(5)] =$ _____; 若又已知 $N(3) = 1$, 则 $P(N(2) - N(1) = 1) =$ _____.

3. 假定某天文台观测到的流星流是一个 Poisson 过程, 据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率是 _____. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 _____.

8. 关于平稳过程, 下列说法正确的是().

- (A) 宽平稳过程具有平稳增量性
- (B) Poisson 过程是宽平稳过程
- (C) 初始状态服从平稳分布的 Markov 过程为严平稳过程
- (D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程, 每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$ 相互独立, 并均服从区间 $[1, 2]$ 上的均匀分布, 设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求 $S(t)$ 的均值 $E[S(t)]$ 和方差 $\text{Var}[S(t)]$.

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车, 分别按强度为 λ_1, λ_2 和 λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站,

(1) 若不论颜色, 求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望;

(2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下,

(a) 下一辆仍是红车的概率是多少? (b) 下一辆是黄车的概率是多少?

(3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下, 接下来通过的 k 辆全是红车, 而后是非红车的概率是多少? ($k \geq 0$)

(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有 n 辆的概率, $n = 0, 1, 2, \dots$

2019 期末

(3) 设有复合泊松过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, 其中 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, $Y_i \sim \text{Exp}\{\mu\}$. 则:
 $EX(t) = \underline{\hspace{2cm}}$, $E[X^2(t)] = \underline{\hspace{2cm}}$, $g_{X(t)}(s) = E \exp\{sX(t)\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、(8分) 保险公司的理赔次数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, 诸次理赔额 $C_i (i \geq 1)$ 为独立同分布, 且与 $N(t)$ 独立, $EC_i = \mu$. 又设 W_i 为第 i 次理赔发生的时间 ($i \geq 1$), 则到时刻 t 为止的理赔总额的折现值为:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中 $\alpha > 0$ 为折现率, 试求 $C(t)$ 的期望值.

(1) 设 X 与 Y 相互独立, 分别服从指数分布 $\text{Exp}\{\lambda\}$ 与 $\text{Exp}\{\mu\}$, 则:

(a) $X + Y \sim \text{Exp}\{\lambda + \mu\}$. () (b) $\min\{X, Y\} \sim \text{Exp}\{\lambda + \mu\}$. ()

(c) $\max\{X, Y\} \sim \text{Exp}\{\lambda + \mu\}$. () (d) $P\{X > h\} = 1 - \lambda h + o(h), h \downarrow 0$. ()

(e) $P\{X \leq s + t | X > s\} = P\{X \leq t\}, s, t > 0$. ()

2019.1.10

(3) (填空) 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, 3$ (指数分布), 则

$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ 的分布为 (), 概率 $P\{X_1 = X_{(1)}\}$ 等于 ()。

(4) (填空) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程, W_k 为其第 k 个事件发生的时间, 并设 $1 \leq k \leq n, t > 0$, 则 $E\{W_k | N(t) = n\} = (\quad)$, $E(W_k) = (\quad)$ 。

2020.1.6

(4) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 命 $X_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$, 则:

$E(X_T) = (\quad)$, $Var(X_T) = (\quad)$ 。

(3) 到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为 ()，第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为 ()。

(5) 到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t) = 2 + t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为()，午时段到达商店的平均人数为()。

二、(15 分) 设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以 Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i \sim U(1, 3)$ (均匀分布，单位：万元)，且 $\{Y_i, i \geq 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的期望 $EX(t)$ 、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$ 。(均匀分布矩母函数： $g(s) = \frac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}$)

二、平稳过程

2016-2017 秋

- (5) 设 $X(t) = A \sin(2\pi\Theta_1 t + \Theta_2)$, A 为常数, Θ_1, Θ_2 为相互独立的随机变量, Θ_1 的密度函数为一个偶函数, 而 Θ_2 服从区间 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 则其均值函数为_____, 协方差函数为_____, 从而该过程为_____。

五、(16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

2017 年春

- 五. (8分) 设 $X(t) = Y \cos(\omega t + \Theta)$, 其中 ω 为常数, Y 服从均值为 μ , 方差为 σ^2 正态分布, Θ 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布, 且 Y 与 Θ 相互独立. 试判断 $X(t)$ 是否为宽平稳过程. 如是, 请给出证明; 否则, 请说明原因。

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 21}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

- (1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

2019 年期末

- (2) 关于平稳过程, 下列说法是否正确
- (a) 宽平稳过程具有平稳增量性. ()
 - (b) Poisson过程是平稳过程. ()
 - (c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. ()
 - (d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. ()

五、(15分) 设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0, 1)$ 与 $U(0, 2\pi)$ ，定义过程：

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (t \in R, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

- (1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程；
- (2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(12分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

- (1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$ ；
- (2) 问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

2019.1.10

五、(15分) 设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0, 1)$ 与 $U(0, 2\pi)$ ，定义过程：

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (t \in R, \omega_0 \text{ 为非零常数})$$

- (1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程；
- (2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(12分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为 0) 的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

- (1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$ ；
- (2) 问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

2019 期末

五、(15分)考察下列函数 $S_i(\omega)$, ($\omega \in R$):

$$S_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}, \quad S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}, \quad S_3(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3},$$

$$S_4(\omega) = \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}, \quad S_5(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2 + 2} (i = \sqrt{-1}), \quad S_6(\omega) = \frac{4a \cos \omega}{\omega^2 + a^2} (a > 0).$$

- (1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数? 并进而求出其对应的协方差函数 $R(\tau)$.
 (2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性? 为什么?

六、(7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b \cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中 $U \sim U(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$ 零均值平稳, 方差为 σ^2 的白噪声序列, U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 独立. 作矩形窗滤波, $M > 0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M X_{t-j}$$

- 1) 试问 Y_t 是平稳过程吗? 为什么?
 2) 求出 Y_t 的方差.

2020年1月

(2) 下列函数是否为平稳过程的谱密度函数:

a. $S_1(\omega) = \frac{\omega^2 - 16}{\omega^4 + 11\omega^2 + 18}$ () ; b. $S_2(\omega) = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}$ () ;

c. $S_3(\omega) = \frac{\omega^2 \cos \omega}{\omega^4 + 1}$ () ; d. $S_4(\omega) = \frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2 + a^2}$, ($i = \sqrt{-1}$) ()

五、(15分) 设 A 与 Θ 独立, $A \sim \text{Exp}(1/3)$ (指数分布), $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ (均匀分布), 定义随机过程:

$$X(t) = A \cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

- (1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为宽平稳过程;
 (2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 。

六、(10分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ (均值为0) 的功率谱密度函数为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

- (1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;
 (2) 问 X 的均值是否有遍历性? 为什么?

三、马氏过程

2016-2017 秋

(2) (判断是非) 设有 $m \geq 1$ 使得对于马氏链的所有状态 i , 有 $P_{i,j}^{(m)} > 0$, 则:

A $d(j)|m$, 其中 $d(j)$ 为 j 的周期; ()

B $d(j) = m$; ()

C j 是非周期的; ()

D j 的周期为无穷; ()

(6) 设马氏链的状态 i 是周期为 d 的常返状态, μ_i 为状态 i 的平均常返时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} =$ _____。

三、(20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时 ($n = 0$) 均为 $1/3$ (其他品牌总的市场占有率为 $1/3$)。而每过一个月 (单位时间) 顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述, 其一步转移概率 (状态 1、2、3 分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器) 如下图所示。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- (1) 证明该链为不可约、遍历的;
- (2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?
- (3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、(16分) 逐个随机地把球放入到 a 个盒子中去 (可重复放), 以 X_n 表示放了 n 个球之后的空盒数, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链,

- (1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P , 并进行状态分类;
- (2) 试求放满 a 个盒子的平均时间 (次数)。

2017 秋

4. 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个 Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

若 X_0 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则 X_2 的分布律为 _____; 且该 Markov 链的平稳分布为 _____。

5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是().
- (A) 若状态 i 常返且 $j \rightarrow i$, 则状态 j 也是常返的
 (B) 若状态 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则状态 j 不一定是常返的
 (C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
 (D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在
6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是().
- (A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布
 (B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等
 (C) 极限分布若存在则与 X_0 的取值无关
 (D) 平稳分布若存在则必唯一
7. 关于直线上的简单对称随机游动 $\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是().
- (A) 所有状态的周期均为2
 (B) $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一个Markov 链且无平稳分布
 (C) 若 $X_0 = 0$, 则对任意整数 n , 其最终能到达它的概率为1
 (D) 若 $X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ (全体非负整数), 转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

- (1) 证明该马氏链为不可约遍历的;
 (2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$ 。

2019 . 1.10

(1) (是非) 若马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布 $\pi = \{\pi_j, j \geq 0\}$ 为其平稳分布, 则:

(a) $\sum_{i \geq 0} \pi_i p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, (j \geq 0, n \in N)$ (); (b) X 为严格平稳过程 ()

(c) $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j \geq 0)$ (); (d) X 必有正常返状态 ()。

三、(15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率为:

$$p_{0,j} = a_j > 0, (j \geq 0) \quad p_{i,i-1} = 1, (i \geq 1)$$

- (1) 证明该马氏链为不可约常返的, 且为非周期;
 (2) 试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0 , 并据以回答: 过程何时为正常

返? 何时为零常返?

(3) 在正常返时, 试求该马氏链的极限分布: $\pi = \{\pi_i, i \geq 0\}$ 。

四、(20分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) 试讨论该马氏链的状态分类(即:分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返?)。

(2) 试求过程由状态 k 出发而被状态 j 吸收的概率 $f_{k,j}$, ($k=1,2; j=3,4$)。

2019 期末

(4) 现有对于一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的25个连续观察数据:

$$\begin{matrix} -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & -1, & 0, & -1, \\ -1, & -1, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 0, & -1, & 1, & 1, & 1, \end{matrix}$$

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵 P 为_____。

三、(20分) 质点在一正 N 边形 ($N \geq 3$) 的周边上作随机游动(顶点 $1, 2, \dots, N$ 按顺时针方向排列), 质点以概率 p 顺时针游动一格, 以概率 $q = 1 - p$ 逆时针游动一格, 试用一马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 描述该模型, 并

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵 P , 并作状态分类;

四、(20分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) 试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);

(2) 试求过程从状态 k 出发而被状态 4 吸收的概率 $f_{k,4}$ 及 $f_{k,5}$, ($k=1, 2, 3$)。

2020.1.6

三、(18分) 圆周上有 $1, 2, 3, 4$ 四个位置按顺时针方向排列, 一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置, 若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j=1, 2, 3, 4$), 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链,

(1) 求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$, 并求 $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 | X_n = 2\} = ?$

(2) 讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$;

(3) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$ 是否存在? 为什么?

四、(12分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动, 其转移概率矩阵为:

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k , ($k = 1, 2, 3$)。