中科大20年春季学期数分(A2)开卷小测I

考试时间: 4月12日上午9:30—12:30

姓名：________________ 学号：____________________ 得分：________

请在12:30之前将依照“学号+姓名+小测1”的格式命名的PDF或者JPG文件发到BB系统的作业区.

一、(15分)

得分	

1. 叙述 $\mathbb{R}$ 上的开集与连通集合的定义;
2. 证明 $\mathbb{R}$ 的非空连通开集一定是开区间.
3. 已知 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域，p, q 为 D 中不同的两点，证明在 D 中存在 $\mathbb{R}^n$ 的闭区域 E 满足 $p, q \in E^\circ$.

二、(10分)

得分	

设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 为非空集合. 定义 $A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ 上的函数 f 为 $f(x, y) = \|x - y\|$. 回答如下问题:

1. 证明 f 在 $A \times B$ 上连续.
2. 设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集合，B 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭集，并且 $A \cap B = \emptyset$. 证明 $f : A \times B \to \mathbb{R}$ 可以取到最小值.
3. 举例说明存在 $\mathbb{R}^2$ 上的两个非空不交的闭集 A, B, 使得

$$\inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\} = 0.$$

三、(10分) | 得分 | |

1. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 紧致, $f:E\to\mathbb{R}^m$ 是一对一的连续映射, 记 $f(E)=D$. 证明: 映射 $f^{-1}:D\to\mathbb{R}^n$ 连续.

2. 证明: 不存在从圆周 $\mathbb{S}^1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$ 到二维球面 $\mathbb{S}^2:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2=1\}$ 的一对一的连续映射.

四、(共20分，每题5分) 要求完整解答过程. | 得分 | |

1. 求函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

2. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在原点处的两个累次极限;

3. 判断定义在 $[0,1]^2\backslash\{(1,1)\}$ 上的函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 的一致连续性, 并说明理由.

4. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{if } x^2+y^2>0;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$ 在原点处沿 $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}(0,0)$, 这里 $u_1^2+u_2^2=1$.

五、(15分) | 得分 | |

定义映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$f(x,y)=\big(x^3-3xy^2,\,3x^2y-y^3\big).$$

设 $U\subset\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $V\subset\mathbb{R}^2$都是开集. 证明:

1. $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的开集.

2. $f(V)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的开集.

六、(15分) | 得分 | |

考虑平面隐式曲线 $C:\ x^3y+xy^3=1+x^2y^2$. 点 $a=(1,1)$ 在曲线上。计算曲线 C 在点 a 处的切线方程和曲率。

七、(15分)

得分	

设 n 为大于 1 的整数, 记 $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$. 取点 $a\in S$, $c>1$, 记 $L=\{y\in\mathbb{R}^n:y\bullet a=c\}$, 这里的 "$\bullet$" 表示点乘. 考虑函数 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\|x-y\|^2$.

1. 写出 $f|_{S\times L}$ 的所有极值点, 要有计算过程.
2. 判断上述极值点的严格性, 并说明理由.

附加题(10分)

得分	

设 n 为大于 1 的整数, $\mathbb{M}_n$ 为 $n\times n$ 实矩阵全体. 求定义在 $\mathbb{M}_n$ 上的函数

$$f(A)=\mathrm{trace}\,AA^T$$

在约束条件

$$\det\ A=1$$

之下的所有极值点, 并判断它们是否严格的极值点.