中国科学技术大学 2018—2019学年第二学期考试试卷

考试科目 **随机过程B** 得分 ____________

学生所在系 __________ 姓名 ____________ 学号 ____________

(考试时间: 2019年6月24日下午2:30—4:30, 半开卷)

装……订……线

一、 (30分) 是非判断与填空题

(1)设X与Y相互独立，分别服从指数分布$Exp\{\lambda\}$与$Exp\{\mu\}$，则:

(a) $X+Y \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. ( )

(b) $\min\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. ( )

(c) $\max\{X,Y\} \sim Exp\{\lambda+\mu\}$. ( )

(d) $P\{X>h\}=1-\lambda h+o(h),\ h\downarrow 0$. ( )

(e) $P\{X\le s+t \mid X>s\}=P\{X\le t\},\ s,t>0$. ( )

(2) 关于平稳过程，下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. ( )

(b) Poisson过程是平稳过程. ( )

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. ( )

(d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. ( )

(3) 设有复合泊松过程$X(t)=\sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中$N(t)$是强度为$\lambda$的泊松过程，$Y_i\sim Exp\{\mu\}$. 则:

$EX(t)=$ __________, $E[X^2(t)]=$ __________, $g_{X(t)}(s)=E\exp\{sX(t)\}=$ __________.

(4) 现有对于一个三状态的马氏链$\{X_n,n\geqslant 0\}$的25个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,
-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵P为____________________.

二、 (8分)保险公司的理赔次数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，诸次理赔额$C_i(i\geqslant 1)$为独立同分布，且与$N(t)$独立，$EC_i=\mu$. 又设W_i 为第i次理赔发生的时间$(i\geqslant 1)$，则到时刻t为止的理赔总额的折现值为:

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中$\alpha>0$为折现率，试求$C(t)$的期望值.

三、 (20分)质点在一正N边形$(N\ge 3)$的周边上作随机游动(顶点$1,2,...,N$按顺时针方向排列)，质点以概率p顺时针游动一格，以概率$q=1-p$ 逆时针游动一格，试用一马氏链$\{X_n,n\geqslant 0\}$描述该模型，并

(1)写出该马氏链的转移概率矩阵P，并作状态分类;

(2)求出该马氏链的平稳分布；

(3)该马氏链是否存在极限分布？为什么？

四、 (20分)设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);

(2)试求过程从状态k出发而被状态4吸收的概率$f_{k,4}$及$f_{k,5}$, $(k = 1, 2, 3)$.

五、 (15分)考察下列函数$S_i(\omega)$, $(\omega \in R)$：

$$S_1(\omega) = \frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2}, \qquad S_2(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}, \qquad S_3(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3},$$
$$S_4(\omega) = \frac{\omega^2-4}{\omega^4+4\omega^2+3}, \qquad S_5(\omega) = \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}(i=\sqrt{-1}), \qquad S_6(\omega) = \frac{4a\cos\omega}{\omega^2+a^2}(a>0).$$

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数？并进而求出其对应的协方差函数$R(\tau)$.

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性？为什么？

六、 (7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b\cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中$U \sim$U$(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, 方差为σ^2的白噪声序列, U与$\{\varepsilon_t\}$独立. 作矩形窗滤波, $M > 0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$

1)试问Y_t是平稳过程吗？为什么？

2)求出Y_t的方差.

中国科学技术大学

2019-2020 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B） 得分：_____

学生所在系：______________ 姓名：___________ 学号：___________

（2020 年 1 月 6 日，半开卷）

一、(30 分，每空 2 分) 判断是非与填空：

（1）设 $X_0=0, X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ (n\geq 1)$，其中$\{\xi_i, i\geq 1\}$为 i.i.d.，且 $P\{\xi_i=-1\}=$ $=P\{\xi_i=1\}=0.5$，则$\{X_n, n\geq 0\}$为：

$a.$ 独立增量过程 （ ）； $b.$ 平稳独立增量过程 （ ）；

$c.$ 正常返马氏链（ ）； $d.$ 瞬过马氏链 （ ）； $e.$ $\lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n=0\}=0$ 。

（2）下列函数是否为平稳过程的谱密度函数：

$a.\ S_1(\omega)=\frac{\omega^2-16}{\omega^4+11\omega^2+18}$ （ ）； $b.\ S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ （ ）；

$c.\ S_3(\omega)=\frac{\omega^2\cos\omega}{\omega^4+1}$ （ ）； $d.\ S_4(\omega)=\frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2+a^2}, (i=\sqrt{-1})$ （ ）

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（ ），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为（ ）。

（4）设$\{X(t), t\geq 0\}$是强度为λ 的泊松过程，命 $X_T=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则：

$E(X_T)=($ $)$，$Var(X_T)=($ $)$。

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t)=2+t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为( )，午时段到达商店的平均人数为( )。

二、**（15 分）**设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以 Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i\sim U(1,3)$（均匀分布，单位：万元），且$\{Y, i\geq 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 的期望 $EX(t)$、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$。(均匀分布矩母函数：$g(s)=\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$)

三、(18分) 圆周上有1,2,3,4四个位置按顺时针方向排列，一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置，若以 $X_n = j$ 表示时刻 n 粒子处于位置 j ($j = 1,2,3,4$)，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链，

(1) 求该马氏链的转移概率矩阵 P 及 $P^{(2)}$，并求 $P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = ?$

(2) 讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$；

(3) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 是否存在？为什么？

四、(12分) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k，($k = 1, 2, 3$)。

五、(15分) 设 A 与 Θ 独立，$A \sim Exp(1/3)$ (指数分布)，$\Theta \sim U(0, 2\pi)$ (均匀分布)，定义随机过程：

$$X(t) = A\cos(t + \Theta), \quad (t \in R)$$

(1) 证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

(2) 试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、(10分) 设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$ (均值为0) 的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

(1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

(2) 问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

中国科学技术大学

2018-2019 第一学期期末考试题

考试科目：随机过程（B）　　　　　　　　　得分：_____

学生所在系：______________ 姓名：__________ 学号：___________

（2019 年 1 月 10 日，半开卷）

一、(30 分。填空题每空 3 分，其余每空 2 分) 判断是非与填空：

（1）**（是非）** 若马氏链 $X=\{X_n, n\ge 0\}$ 的初始分布 $\pi=\{\pi_j,\ j\ge 0\}$ 为其平稳分布，则：

(a) $\sum_{i\ge 0}\pi_i p_{i,j}^{(n)}=\pi_j, (j\ge 0, n\in N)$ （　　）；(b) X 为严格平稳过程（　　）

(c) $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}, (i,j\ge 0)$ （　　）；　　(d) X 必有正常返状态（　　）。

（2）**（是非）** 下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数？

(a) $R(\tau)=e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$ （　　）；(b) $R(\tau)=|\tau|e^{-\tau^2/2}$（　　）；$(c)$ $R(\tau)=\frac{\sin\tau}{\pi\tau}$ （　　）

(d) $R(\tau)=\sigma^2 e^{i\lambda\tau}$ （　　）；(e) $R(\tau)=\sigma^2 e^{-i\lambda|\tau|}$ （　　）。（注：$\sigma,\lambda>0, i=\sqrt{-1}$）

（3）**（填空）** 设 X_1,X_2,X_3 相互独立，且 $X_i\sim Exp(\lambda_i), i=1,2,3$（指数分布），则 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布为（　　　），概率 $P\{X_1=X_{(1)}\}$ 等于（　　　）。

（4）**（填空）** 设 $\{N(t), t\ge 0\}$ 是一强度为 λ 的 Poisson 过程，W_k 为其第 k 个事件发生的时间，并设 $1\le k\le n, t>0$，则 $E\{W_k \mid N(t)=n\}=$（　　　），$E(W_k)=$（　　　）。

二、（8 分） 假设汽车按强度为 λ 的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的公路，进入的第 i 辆车以速度 V_i 行驶。假定诸 V_i（$i\ge 1$）为相互独立的正随机变量，有共同分布 F。试求在时刻 t 位于区间 (a,b) 内的平均汽车辆数。

三、**（15 分）** 设马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}$ 的转移概率为：

$$p_{0,j}=a_j>0,\ (j\ge 0)\quad p_{i,i-1}=1,\ (i\ge 1)$$

（1）证明该马氏链为不可约常返的，且为非周期；

（2）试求过程由 0 出发后首次返回到 0 的平均时间 μ_0，并据以回答：过程何时为正常

返？何时为零常返？

（3）在正常返时，试求该马氏链的极限分布：$\pi=\{\pi_j,\ j\geq 0\}$。

四、**（20分）**设马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.3 & 0.2\\0 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（1） 试讨论该马氏链的状态分类（即：分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返？）。

（2） 试求过程由状态k出发而被状态j吸收的概率$f_{k,j}$,（$k=1,2$；$j=3,4$）。

五、(15分)设A与Θ独立且分别服从均匀分布$U(0,1)$与$U(0,2\pi)$，定义过程：

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)\qquad（t\in R，\omega_0\text{为非零常数}）$$

（1）证明$\{X(t),\ t\in R\}$为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数$S(\omega)$。

六、（12分）设平稳过程$X=\{X(t),\ t\in R\}$（均值为0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+11\omega^2+28}$$

（1）试求X的协方差函数$R(\tau)$；

（2）问X的均值是否有遍历性？为什么？

（完）

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 1 月 10 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）：a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 是 ）。

（2）（每空 2 分）：a.（ 非 ）； b.（ 非 ）； c.（是 ） ；d.（是）； e.（非）。

（3）（每空 3 分）（ $1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ），（ $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ ） 。

（4）（每空 3 分）（ $\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}/(k-1)!$ ），（ $\lambda t^2/2$ ）

二、（6 分）

若第 i 辆汽车于时刻 s(s<t)进入该公路，则 $P\{a<(t-s)V_i<b\}=F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})$，故第 i 辆车于时刻 t 位于区间（$a,b$）的概率 $p=\frac{1}{t}\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$，从而时刻 t 位于区间（$a,b$）内的平均汽车辆数为 $\lambda pt=\lambda\int_0^t[F(\frac{b}{t-s})-F(\frac{a}{t-s})]ds$。

三、（16 分）

（1） 易证马氏链为不可约（ $p_{i,j}\ge a_j>0,\forall i\ne j$ ）、非周期（ $p_{0,0}^{(1)}=a_0>0$ ），且 $f_{0,0}=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j=1$，故常返；

（2） 求得：$\mu_0=\sum_{n=1}^{+\infty}nf_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_{n-1}$，显然，马氏链为正常返$\Leftrightarrow\mu_0<+\infty$；

（3） $\pi_j=\frac{1}{\mu_0}\sum_{k\ge j}a_k$，（$j\ge 0$） 。

四、（20 分）

（1）四类：$\{1\},\{2\}$ 均为瞬过类，$d(1)=\infty, d(2)=1$；$\{3\},\{4\}$ 为二遍历类（吸收态）。

（2）设 T 为过程进入吸收态的时间，记 $f_{k,j}=P\{X_T=j\mid X_0=k\}$, $(k=1,2;\ j=3,4)$ 则有：

$$
\begin{aligned}
f_{1,3}&=P\{X_T=3\mid X_0=1\}=\sum_i P\{X_T=3\mid X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,3}+0.3\\
f_{1,4}&=\sum_i P\{X_T=4\mid X_1=i\}p_{1,i}=0.5f_{2,4}+0.2\\
f_{2,3}&=\sum_i P\{X_T=3\mid X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,3}+0.4\\
f_{2,4}&=\sum_i P\{X_T=4\mid X_1=i\}p_{2,i}=0.2f_{2,4}+0.4
\end{aligned}
$$

解得：$f_{1,3}=11/20, f_{1,4}=9/20, f_{2,3}=f_{2,4}=1/2$。

五、（16 分）

（1）
$$
\begin{aligned}
&EX(t) = EAE\cos(\omega_0 t + \Theta) = 0\\
&\gamma_X(t+\tau,t) = EA^2E\cos[\omega_0(t+\tau)+\Theta]\cos(\omega_0 t+\Theta) =\\
&= \tfrac{1}{2}EA^2E\{\cos[\omega_0(2t+\tau)+2\Theta]+\cos\omega_0\tau\} = \tfrac{1}{2}EA^2\cos\omega_0\tau\\
&= 4\cos\omega_0\tau = R_X(\tau)
\end{aligned}
$$

故$\{X(t),\ t\in R\}$为宽平稳。

（2）$R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 4\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$。

六、（12 分）

（1）$S(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21}e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12}e^{-2|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty}|R(\tau)|d\tau < \infty$。

（完）

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2019 年 6 月 24 日）

一、（30 分）

（1）（每空 2 分）：a.（ 非 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d. （ 是 ）；e.（是）。

（2）（每空 2 分）：a.（非 ）； b.（ 非 ）；c.（是 ）；d.（是）。

（3）（每空 3 分）（ $\frac{\lambda t}{\mu}$ ）；（ $\frac{\lambda t(2+\lambda t)}{\mu^2}$ ）；（ $\exp(\frac{\lambda ts}{\mu-s})$ ）。

（4）（3 分）（ $P=\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ）

二、（8 分）

$EC(t)=E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i} \mid N(t)\right]\right\}=\frac{\lambda\mu(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}$ 。

三、（20 分）

（1） $$P=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ N-2 \\ N-1 \\ N \end{array}\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$ ，（双随机）

不可约、正常返、周期为 2（N 偶）或非周期（N 奇）。

（2）求解：$\pi=\pi P, \sum_j \pi_j=1$，由：

$$\begin{cases} \pi_1=q\pi_2+p\pi_N \\ \pi_2=p\pi_1+q\pi_3 \\ \cdots \\ \pi_{N-1}=p\pi_{N-2}+q\pi_N \\ \pi_N=q\pi_1+p\pi_{N-1} \\ 1=\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_N \end{cases}$$ 解得平稳分布：$\pi=(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\cdots,\frac{1}{N})$

（3）当 N 为奇数时，极限分布存在：$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}=\frac{1}{N}$,（ $1\le i,j\le N$ ），否则不存在。

四、（20 分）

（1）每个状态自成一类。1,2,3 均为瞬过类，其中 1 的周期为无穷，其余为非周期；4,5 为遍历类（吸收态）。

（2）设T 为过程进入吸收态 4 或 5 的时间，则

$f_{k,4} = P\{X_T = 4 \mid X_0 = k\}$，$f_{k,5} = P\{X_T = 5 \mid X_0 = k\},(k = 1,2,3)$ 其中：

$$f_{1,4} = \sum_i P\{X_T = a \mid X_1 = i\} p_{1,i} = 0.6 f_{2,4} + 0.2 f_{3,4} + 0.1$$
$$f_{2,4} = 0.3 f_{2,4} + 0.4 f_{3,4} + 0.2$$
$$f_{3,4} = 0.2 f_{3,4} + 0.4$$

解得：$f_{1,4} = \frac{19}{35}$，$f_{2,4} = \frac{4}{7}$，$f_{3,4} = \frac{1}{2}$。类似可求得：$f_{1,5} = \frac{16}{35}$，$f_{2,5} = \frac{3}{7}$，$f_{3,5} = \frac{1}{2}$。

五、（15 分）

（1）$S_2(\omega)$ 是谱密度函数。$S_2(\omega) \leftrightarrow R(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\sqrt{2}|\tau|} + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\sqrt{3}|\tau|}$。

（2）该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$。

六、（7 分）

（1）先求 $EX_t = E(S_t + \varepsilon_t) = 0$，

$$\gamma_X(t,t) = E(S_t + \varepsilon_t)^2 = E(S_t^2 + \varepsilon_t^2) = ES_t^2 + \sigma^2 = E[b^2 \cos^2(\omega t + U)] + \sigma^2$$
$$= \frac{b^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(2\omega t + 2u) + 1] du + \sigma^2 = \frac{b^2}{2} + \sigma^2$$

$$\gamma_X(t+\tau,t) = EX_{t+\tau} X_t = \frac{b^2}{2} \cos\omega\tau + \delta(\tau)\sigma^2,\ (: \delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases})$$

从而：$EY_t = 0$ 且：

$$\gamma_Y(t+\tau,t) = EY(t+\tau)Y(t) = \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i,j=-M}^{M} EX_{t+\tau-i} X_{t-j}$$
$$= \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i,j=-M}^{M} (\frac{b^2}{2} \cos\omega(\tau - i + j) + \delta(\tau - i + j)\sigma^2)$$

故Y_t 平稳。

（2）
$$\gamma_Y(t,t) = \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i,j=-M}^{M} (\frac{b^2}{2} \cos\omega(i-j) + \delta(i-j)\sigma^2)$$
$$= \frac{1}{(2M+1)^2} (\sum_{i,j=0}^{2M} \frac{b^2}{2} \cos\omega(i-j) + (2M+1)\sigma^2)$$
。

（完）

随机过程期末考试参考答案与评分标准

（2020 年 1 月 6 日）

一、（30 分，每空 2 分）

（1）a.（ 是 ）； b.（ 是 ）； c.（ 是 ）； d.（ 非 ）；e.（ 是 ）。

（2）a.（ 非 ）； b.（ 是 ）； c.（ 非 ）； d.（ 非 ）。

（3）（ $1/12$ ），（ $(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^k$ ）。

（4）（ $\lambda T/2$ ），（ $\lambda T/3$ ）。

（5）（ $e^{-8}\approx 0.0003$ ），（ 8 人 ）。

二、（15 分）

$$EX(t)=EN(t)EY=\lambda t\times 2=10t(\text{万元}),$$

$$\begin{aligned}VarX(t)&=EN(t)VarY+VarN(t)(EY)^2\\&=5t\times 4/12+5t\times 4=65t/3,\end{aligned}$$

$$g_{X(t)}(s)=e^{\lambda t(g_Y(s)-1)}=e^{5t(\frac{e^{3s}-e^{s}-2s}{2s})}。$$

三、（18 分）

（1）
$$P=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}0&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\\ 0&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}=P^2=\frac12\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+3}=3,X_{n+1}=1\mid X_n=2\}=\\&=P\{X_{n+1}=1\mid X_n=2\}P\{X_{n+3}=3\mid X_n=2,X_{n+1}=1\}\\&=p_{21}p_{13}^{(2)}=\tfrac12\times\tfrac12=\tfrac14。\end{aligned}$$

（2） 求解：
$$\begin{cases}\pi_1=\frac12(\pi_2+\pi_4)\\ \pi_2=\frac12(\pi_1+\pi_3)\\ \pi_3=\frac12(\pi_2+\pi_4)\\ \pi_4=\frac12(\pi_1+\pi_3)\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{cases}$$
，易得： $\pi_1=\pi_2=\pi_3=\pi_4=1/4$；

状态分类：不可约、正常返、周期为 2。

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$ 不存在。例如：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = \frac{2}{\mu_i} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$，但 $p_{ii}^{(2n-1)} \equiv 0,\ (\forall n \ge 1)$，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 不存在。

四、（12 分）

设 $T = \min\{n : n \ge 0, X_n = 0\}$ ，则：

$p_k = P\{X_T = 0 \mid X_0 = k\},\ v_k = E(T \mid X_0 = k),\ (k = 0,1,2,3)$，其中：$p_0 = 1,\ v_0 = 0$，

由 P 有：

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 \\ p_2 = \frac{1}{3} p_1 + \frac{1}{3} p_2 + \frac{1}{3} p_3 \\ p_3 = p_2 \end{cases}，及 \begin{cases} v_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) \\ v_2 = \frac{1}{3}(v_1 + 1) + \frac{1}{3}(v_2 + 1) + \frac{1}{3}(v_3 + 1) \\ v_3 = v_2 + 1 \end{cases}$$

解得：

$p_k = 1,\ (k = 1,2,3)$，及：$v_1 = 7,\ v_2 = 11,\ v_3 = 12$ 。

五、（15 分）

$EX(t) = EAE\cos(t + \Theta) = 3 \times 0 = 0,$

（1）$\gamma_X(t+\tau, t) = EX(t+\tau)X(t) = EA^2 E\cos(t + \tau + \Theta)\cos(t + \Theta)$，
$= 18 \times \frac{1}{2}\cos\tau = 9\cos\tau$

故 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳。

（2）$R_X(\tau) \leftrightarrow S(\omega) = 9\pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1))$ 。

六、（10 分）

（1） $S(\omega) = \dfrac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 7)} \leftrightarrow R(\tau) = \frac{2\sqrt{7}}{21} e^{-\sqrt{7}|\tau|} - \frac{1}{12} e^{-2|\tau|}$；

（2） 该过程的均值有遍历性，因为：$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$ 。

（完）