第五章作业参考答案*

东奕汐　程伟涛

2023 年 2 月 18 日

练习 11. 设分布函数 F 的特征函数为 $f(t)$, 证明

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_x\left[F(x)-F(x-0)\right]^2.$$

证明 设 $X\sim F$, $Y\sim F$ 且 X 与 Y 独立, 记 F_{X-Y} 为 $X-Y$ 的分布函数, 则

$$\begin{aligned}f_{X-Y}(t)=&\mathrm{E}e^{it(X-Y)}\\=&\mathrm{E}e^{itX}\mathrm{E}e^{i(-t)Y}\\=&|f(t)|^2.\end{aligned}$$

由推论 5.2.3 可知,

$$F_{X-Y}(0)-F_{X-Y}(0-)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}|f(t)|^2\mathrm{d}t,$$

而

$$\begin{aligned}&F_{X-Y}(0)-F_{X-Y}(0-)\\=&\mathrm{P}(X=Y)\\=&\mathrm{EP}(X=Y|Y)\\=&\int\mathrm{P}(X=Y|Y=y)\,\mathrm{d}F(y)\\=&\int\mathrm{P}(X=y)\,\mathrm{d}F(y)\\=&\sum_y\mathrm{P}(X=y)\left(F(y)-F(y-)\right)\\=&\sum_x\left(F(x)-F(x-)\right)^2.\end{aligned}$$

*练习 11, 14, 15, 28 和练习 29, 32 分别由程伟涛和东奕汐完成.

故

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_x[F(x)-F(x-0)]^2.$$

□

练习 14. 举例说明两个随机变量 X 和 Y 不独立, 有相同的分布 F, 而它们的和 $X+Y$ 的分布恰为 $F*F$.

证明 设 $X\sim Cauchy(0,1)$, 令 $Y=X$, 则 X 与 Y 不独立且 $f_X(t)=f_Y(t)=e^{-|t|}$. 而

$$\begin{aligned}f_{X+Y}(t)&=\mathrm{E}e^{it(X+Y)}\\&=\mathrm{E}e^{i(2t)X}\\&=e^{-|2t|}\\&=f_X(t)\,f_Y(t)\,.\end{aligned}$$

这恰为 $F*F$ 对应的分布函数, 故 $X+Y$ 的分布为 $F*F$. □

练习 15. 设 $X_n\xrightarrow{\mathrm{d}}X$, $Y_n\xrightarrow{\mathrm{d}}Y$, X 与 Y 独立, 且对每个 n, X_n 与 Y_n 独立, 则

$$X_n+Y_n\xrightarrow{\mathrm{d}}X+Y.$$

证明 设 $f_n(t)$, $g_n(t)$ 分别为 X_n 与 Y_n 的特征函数, $f(t)$ 与 $g(t)$ 分别为 X 与 Y 的特征函数. 由 $X_n\xrightarrow{\mathrm{d}}X$, $Y_n\xrightarrow{\mathrm{d}}Y$ 可得 $f_n(t)\to f(t)$, $g_n(t)\to g(t)$, 故

$$f_{X_n+Y_n}(t)=f_n(t)g_n(t)\to f(t)g(t)=f_{X+Y}(t),$$

故 $X_n+Y_n\xrightarrow{\mathrm{d}}X+Y$. □

练习 28. 以 $\sigma^2(\xi)$ 和 $\sigma^2(\eta)$ 分别记随机变量 xi 和 eta 的方差.

1. 若 $\sigma^2(\xi)<\infty$, $\sigma^2(\eta)<\infty$, 则 $|\sigma(\xi)-\sigma(\eta)|\leqslant\sigma(\xi-\eta)$.
2. 设 $\{V_n\}$ 和 $\{W_n\}$ 为两个随机变量序列, $0<\sigma^2(V_n)<\infty$, G 为分布函数, 且设当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{V_n}{\sigma(V_n)}\xrightarrow{\mathrm{d}}G,\quad\frac{\mathrm{E}(W_n-V_n)^2}{\sigma^2(V_n)}\longrightarrow0,$$

证明 $W_n/\sigma(W_n)\xrightarrow{\mathrm{d}}G$, $W_n/\sigma(V_n)\xrightarrow{\mathrm{d}}G$.

证明

1. 只需证明 $(\sigma(\xi)-\sigma(\eta))^2 \leqslant \sigma^2(\xi-\eta)$, 这等价于

$$\sigma(\xi)^2-2\sigma(\xi)\sigma(\eta)+\sigma(\eta)^2 \leqslant \sigma(\xi)^2-2Cov(\xi,\ \eta)+\sigma(\eta)^2,$$

   也即 $Cov(\xi,\eta) \leqslant \sqrt{Var(\xi)Var(\eta)}$, 这由 Cauchy-Schwartz 不等式保证.

2. 由提示先证明 $W_n/\sigma\left(V_n\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} G$. 因为对任意 $\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|\frac{W_n-V_n}{\sigma\left(V_n\right)}\right|>\varepsilon\right) &=\mathrm{P}\left(\left|W_n-V_n\right|>\varepsilon\sigma\left(V_n\right)\right) \\
&\leqslant \frac{\mathrm{E}\left(W_n-V_n\right)^2}{\varepsilon^2\sigma^2\left(V_n\right)} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

   故 $\left(W_n-V_n\right)/\sigma\left(V_n\right) \xrightarrow{p} 0$. 则由 Slutsky 定理可知

$$\frac{W_n}{\sigma\left(V_n\right)}=\frac{V_n}{\sigma\left(V_n\right)}+\frac{W_n-V_n}{\sigma\left(V_n\right)} \xrightarrow{\mathrm{d}} 0.$$

   下面证明 $W_n/\sigma(V_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$. 因为

$$\frac{W_n}{\sigma\left(W_n\right)}=\frac{W_n}{\sigma\left(V_n\right)}\frac{\sigma\left(V_n\right)}{\sigma\left(W_n\right)},$$

   而

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sigma\left(W_n\right)}{\sigma\left(V_n\right)}-1\right|^2 &=\frac{1}{\sigma^2\left(V_n\right)}\left|\sigma\left(W_n\right)-\sigma\left(V_n\right)\right|^2 \\
&\leqslant \frac{\sigma^2\left(W_n-V_n\right)}{\sigma^2\left(V_n\right)} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{E}\left(W_n-V_n\right)^2}{\sigma^2\left(V_n\right)} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

   则由 Slutsky 定理可知 $W_n/\sigma(W_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$.

□

练习 29. 设 X 和 Y 分别有分布函数 F 和 G. 证明:

1. 若 F 和 G 没有公共跳点, 则 $\mathrm{E}\left[F\left(Y\right)\right]+\mathrm{E}\left[G\left(X\right)\right]=1$.

2. 若 F 连续, 则 $\mathrm{E}\left[F\left(X\right)\right]=1/2$.

3. 即使 F 和 G 有公共跳, 若 X 和 Y 相互独立, 则

$$\mathrm{E}\left[F\left(Y\right)\right]+\mathrm{E}\left[G\left(X\right)\right]=1+\mathrm{P}\left(X=Y\right).$$

4. 即使 F 有跳, 我们也有

$$\mathrm{E}\left[F\left(X\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{x}\mathrm{P}^{2}\left(X=x\right).$$

证明

1.

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}F\left(Y\right)+\mathrm{E}F\left(X\right)\\=&\int F\left(y\right)\mathrm{d}G\left(y\right)+\int G\left(x\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\\=&\lim_{a\to-\infty,b\to+\infty}\left(F\left(y\right)G\left(y\right)\Big|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}G\left(y-\right)\mathrm{d}F\left(y\right)+\int_{a}^{b}G\left(x\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\right)\\=&1+\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(x\right)-G\left(x-\right)\mathrm{d}F\left(x\right).\end{aligned}$$

因为 F 和 G 没有公共跳点, 故当 y 为 G 的跳点时, y 不为 F 的跳点, 故 $F(y)-F(y-)=0$, 故

$$\int_{\{y\}}G\left(x\right)-G\left(x-\right)\mathrm{d}F\left(x\right)=\left(G\left(y\right)-G\left(y-\right)\right)\left(F\left(y\right)-F\left(y-\right)\right)=0,$$

当 y 不为 G 的跳点时, $G(y)-G(y-)=0$, 故上式仍为 0. 因此 $\mathrm{E}\left[F\left(Y\right)\right]+\mathrm{E}\left[G\left(X\right)\right]=1$.

2. 在 1 中取 $F=G$ 即得结论.

3. 由 X 与 Y 独立可知,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}G\left(x\right)-G\left(x-\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\\=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}\left(Y=x\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\\=&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}\left(Y=X|X=x\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\\=&\mathrm{E}\left[\mathrm{P}\left(Y=X|X\right)\right]\\=&\mathrm{P}\left(Y=X\right).\end{aligned}$$

由此立得结论.

4. 与 1 类似,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}F\left(X\right)=&\int F\left(x\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\\=&\lim_{a\to-\infty,b\to+\infty}\left(F^{2}\left(x\right)|_{a}^{b}-\int_{(a,b]}F\left(x-\right)\mathrm{d}F\left(x\right)\right)\\=&1-\lim_{a\to-\infty,b\to+\infty}\int_{(a,b]}F\left(x-\right)\mathrm{d}F\left(x\right),\end{aligned}$$

由定理 3.1.3 式 3.1.10 知:

$$\int_{(a,b]} F(x-)\,\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2}\left(F^2(b) - F^2(a) - \sum_{a<x\leqslant b}(F(x)-F(x-))^2\right),$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{E}F(X) =& 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_x \mathrm{P}^2(X=x)\\ =& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_x \mathrm{P}^2(X=x).\end{aligned}$$

□

练习 32. 设 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列, 满足 $\mathrm{E}[X_1]=0, \mathrm{E}\left[X_1^2\right]=\sigma^2<+\infty$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{E}\left|\sum_{k=1}^n X_k\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

证明 由中心极限定理,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} X \sim N\left(0,\sigma^2\right).$$

由 $\{X_i\}$ 独立同分布且 $\mathrm{E}X_i=0,\ \mathrm{E}X_i^2=\sigma^2$,

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 = \sigma^2.$$

下证 $\left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right|$ 一致可积.

- 由

$$\mathrm{E}\left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \left(\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma,$$

  可知积分一致有界.

- 对任意 $\varepsilon>0$, 取 A 满足 $\mathrm{P}(A)<\varepsilon^2/\sigma^2$, 则由 Holder 不等式可知,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right| I_A &\leqslant \sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}\right)^2 \mathrm{P}(A)}\\ &< \sqrt{\sigma^2\cdot\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

  故一致绝对连续.

由定理 5.1.4,

$$\mathrm{E}\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}}\right| \to \mathrm{E}|X| = \sqrt{2/\pi}\sigma.$$

□