中国科学技术大学数学科学学院
2019—2020学年第二学期考试试卷

课程名称 <u>数学物理方程A</u>　　课程编号 <u>001506</u>

姓名＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿　　学院＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一 (14分) 已知二阶方程

$$u_{xx}-4u_{xy}+3u_{yy}=0,$$

(1) 判断此方程的类型（答案在”双曲型“,”抛物型“和“椭圆型”中选）

(2) 求此二阶方程的通解。

二 (12分) 求定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y,\\ u(0,y)=y^2,\ \ u(x,0)=\sin 3x\end{cases}$$

三 (16分) 求以下固有值问题的固有值,固有函数。

$$(1)\qquad \begin{cases}y''+\lambda y=0,\quad (0<x<5)\\ y(0)=0,\ \ y'(5)=0.\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases}x^2y''+xy'+(\lambda x^2-25)y=0,\ (0<x<1)\\ |y(0)|<+\infty,\quad y'(1)=0.\end{cases}$$

四 (16分) 利用分离变量法求解定解问题:

$$\begin{cases}u_t=4u_{xx},\ (t>0,\ 0<x<20)\\ u(t,0)=u(t,20)=0,\\ u(0,x)=\varphi(x)\,.\end{cases}$$

五 (14分)求解以下定解问题,其中(r,θ,φ)为球坐标。

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\ (r<3)\\ u\mid_{r=3}=3+\cos^2\theta\,.\end{cases}$$

六 (16分)求解初值问题:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+20u,\ \ (t>0,\ -\infty<x<+\infty)\\ u\mid_{t=0}=\varphi(x),\end{cases}$$

并求出$\varphi(x)=\delta(x+2)$时的具体解。

七 (12分)求解边值问题:

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\quad (0<x<3,\ y>0)\\ u\mid_{y=0}=0,\ \ u\mid_{y\to+\infty}\text{有界}\\ u\mid_{x=0}=\varphi_1(y),\ u\mid_{x=3}=\varphi_2(y)\,.\end{cases}$$

参考公式

1)直角坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系:$\Delta_3 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2)若ω是$J_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若ω是$J'_\nu(\omega a)=0$的一个正根，则有模平方$N_{\nu2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

3)勒让德多项式:$P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2,3,...,$

母函数:$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$,递推公式: $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2t})$

5. 由V内Poisson方程第一边值问题的格林函数$G(M;M_0)$,求得Poisson方程第一边值问题解$u(M)$的公式是:

$$u(M)=-\iint\limits_S\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}(M;M_0)dS+\iiint\limits_V f(M_0)G(M;M_0)dM_0.$$