2024 春近世代数期末考试

叶郁，刘永强，马永庆

2024.6.26

题目 1. （判断题，每题 3 分）

(1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是环。
(2) $\mathbb{Z}$ 和 $2\mathbb{Z}$ 作为环是同构的。
(3) 假设 $f: R \to S$ 是环同态，且 R, S 都含幺，则 $f(1_R) = 1_S$。
(4) $\mathbb{Z}_5[x,y]$ 是 UFD。
(5) $\mathbb{Z}_5(x)[y]$ 是 PID。
(6) UFD 中不可约元和素元等价。
(7) $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包。
(8) 设 F/K 为域扩张，且 $[F:K]=\infty$，则 F/K 为超越扩张。
(9) $f(x) = 3x^3+4x^2+2x+66$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约。
(10) $\mathbb{Q}\left[\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right]$ 是域。

题目 2. （填空题，每题 3 分）

(1) 一有限域 K 的阶数为 8，则其特征是多少。
(2) 写出 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的所有素理想。
(3) 写出 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 的所有单位。
(4) 求出 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\sqrt{6}])$。
(5) 写出 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式。
(6) 一整数满足 $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \equiv 2 \pmod 5$, $n \equiv 1 \pmod 9$，写出 $n \bmod 90$ 的值。

题目 3. （6 分）

证明 $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3-x^2+1) \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^3-x^2+x+1)$（不需要写出同构映射）。

题目 4. （6 分）

设 R 为一有限的含幺交换环，证明其每一个素理想都是极大理想。

题目 5. （6 分）

设 F/K 为域扩张，u 在 K 上代数，且 $[F:K]$ 为奇数。证明 $K(u) \cong K(u^2)$。

题目 6. （10 分）

设 $R = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$。
(1) 证明 R 是环，且零理想是其素理想。
(2) 给出 R 的所有不可约元（需要证明）。

(3) 求证 R 不是 UFD。

题目 7. （18 分）

设 $R=\mathbb{Z}[x]$，而将 $\mathbb{Z}$ 视为 R 的子环。

(1) P 为 R 的素理想，证明 $P\cap\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的素理想。

(2) 在 (1) 的基础上，若进一步有 $P\cap\mathbb{Z}=(0)$，证明 P 是主理想。

(3) 分类 R 的所有素理想。