第一章事件与概率

1.3 古典概型

称一个随机试验为**古典概型**, 如果

第一, (有限性) 试验结果只有有限个 (记为 n) ,
第二, (等可能性) 每个基本事件发生的可能性相同.

为计算事件 A 的概率, 设 A 中包含 m 个基本事件, 则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} \left(\text{或} \frac{\#A}{\#\Omega} \right)$$

记号: 为方便起见, 以 $|A|$ 或 $\#A$ 记事件 A 中基本事件的个数.
计算古典概率, 主要用到排列组合的知识.

计数原理

乘法原理 假定进行过程 I 有 n_1 中方式，而对于过程 I 的每一个方式，进行过程 II 都有 n_2 种方式。那么，依次进行过程 I 与 II 共有 $n_1 n_2$ 种方式。

加法原理 假定进行过程 I 有 n_1 中方式，进行过程 II 有 n_2 种方式。那么，进行过程 I 或 II 共有 n_1+n_2 种方式。

排列组合

- 从 n 个不同的元素中, 有放回地取出 r 个元素组成的可重复排列的种数为 n^r 种。从 n 个不同的元素中，不放回地取出 r 个元素组成的不重复排列的种数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)=P_n^r$.

- 从 n 个不同的元素中, 不放回地取 r 个组成的组合，种数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C_n^r$$

- 从 n 个不同的元素中, 有放回地取 r 个组成的组合 (不考虑顺序), 种数为

$$\binom{n+r-1}{r}$$

在运用排列组合公式时, 要清楚次序问题.

甲乙丙丁四人进行乒乓球双打练习, 两人一对地结为对打的双方, 有多少种不同的结对方式?

↑Example

↓Example

"组合"是一种"有编号的分组模式", 或者说, 按照组合模式计算出的分组方式数目中, 已经天然地把组的不同编号方式数目计算在内了.

↑Example

欲将 6 个人分为 3 组, 每组 2 人, 分别从事 3 项不同工作, 求分配方式数.

↓Example

要把 7 人分为 3 个小组, 执行同一种任务, 其中一个组 3 人, 另两个组各 2 人, 求分组方式数.

↑Example

↓Example

为了适应这种分为多个 “不同的” 组的问题需求, 人们总结出如下的 “多组组合模式”:

多组组合模式： 有 n 个不同元素, 要把它们分为 k 个不同的组, 使得各组依次有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 个元素, 其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

种不同分法.

不尽相异元素的排列模式 有 n 个元素, 属于 k 个不同的类, 同类元素之间不可辨认, 各类元素分别有 n_1, n_2, $\cdots$, n_k 个, 其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 要把它们排成一列, 则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

种不同排法.

一批产品有 N 个，其中废品有 M 个。现从中随机取出 n 个，在以下两种情形下，分别求“其中恰好有 m 个废品”这一事件的概率。(1) 有放回地选取； (2) 不放回地选取

↑Example ↓Example

解:

n 个男生, m 个女生排成一排 $(m \leq n+1)$. 求事件 $A =$ {任意两个女孩不相邻} 的概率。又若排成一圈，又如何?

↑Example
↓Example

解:

$\overline{\uparrow}$Example

r 个不同的球任意放入编号为 1 至 n 的 n 个盒子，每球入各盒均等可能，求下列事件的概率

(1) A={指定的 r 个盒子各含一个球}

(2) B={每盒至多有一球}

(3) C={某指定盒中恰有 m 个球}

$\underline{\downarrow}$Example

解:

注：

- 球相异和球相同两种情形下的样本空间是不同的，即机会均等原则是不同的。(各是什么呢？)

- 这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为它

- 若把球解释为粒子，把盒子解释为相空间中的小区域，则这个问题便相应于统计物理学里的 Maxwell—Boltzmann 统计

- **生日问题**

求 r 个人中没有两个人生日相同的概率. 若把 r 个人看作上面问题中的 r 个不可辨球，而把一年的 365 看作为盒子，则 $n = 365$，这时记 B 为所求概率事件。则

例如当 $r = 40$ 时，$P(B) = 0.109$，这个概率已经相当小；而当 $r = 50$ 时，$P(B) = 0.03$，$r = 55$ 时，$P(B) = 0.01$，这实在是出乎意料地小。

设有方程 $x + y + z = 15$, 试分别求出它的正整数解和非负整数解 (x, y, z) 的组数.

↑Example ↓Example

设有 n 个人随机地坐到礼堂第一排 N 个座位上去，试求下列事件的概率：(1) 任何人都没有邻座；(2) 每人恰有一个邻座；(3) 关于中央座位对称的两个座位至少有一个空着。

↑Example ↓Example

解:

1.4 几何概型

在实际中，我们还会碰到样本点无限多的情形。几何概型是其中的一种.

设 Ω 是欧氏空间中确定的集合，满足条件 $0 < m(\Omega) < +\infty$。对 Ω 中的任何可测子集 A，称

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

为事件 A 的几何概率。这里等可能性体现在“落在区域 A 的概率与区域 A 的测度成正比并且与其形状位置无关。"

Definition

这里 $m(\Omega)$ 表示 Ω 的“大小”.

甲乙两人约定在 $[0,T]$ 时段内去某地会面，规定先到者等候一段时间 $t(t \leq T)$ 再离去。试求事件 A={甲乙将会面} 的概率。

↑Example

↓Example

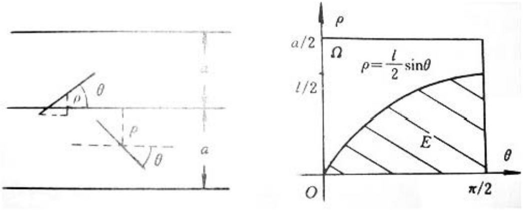
解:

↑Example

(Buffon's needle) 桌面上画满间隔均为 a 的平行线，现向桌面任意投放一长为 $l(l < a)$ 的针，求事件 E ={针与某直线相交} 的概率。

↓Example

图 1.1: 针和平行线位置关系



值得注意的是这里采用的方法：建立一个概率模型，它与某些我们感兴趣的量 —这里是常数 π—有关，然后设计随机试验，并通过这个试验的结果来确定这些量。这也就是 Monte-Carlo 思想.

在圆周上任取三点 A, B, C，求事件 E=$\{\triangle ABC$ 为锐角三角形$\}$ 的概率。(1/4)

↑Example

↓Example

在圆上任取两点 A, B 连成一条弦，再任取两点 C, D 连成一弦，求 AB 与 CD 相交的概率。(1/3)

↑Example

↓Example