

## 中国科学技术大学2015-2016第二学期测验试卷

考试科目: 数学分析A2

得分:

姓名:

学号:

1. 计算 (60分):

(1) 已知向量场  $\Psi = \nabla \times \mathbf{G}$ , 其中

$$\mathbf{G} = (3x^2, \cos(zy), -\sin(yx)),$$

计算  $\Psi$  的旋度与散度。

(2) 计算曲线积分  $\oint_L (x+y+xy)dx + (x-y+xy)dy$ , 其中  $L$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  沿逆时针方向。

(3) 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是柱面  $x^2 + z^2 = R^2$  在  $x \geq 0, y \geq 0$  限制下被平面  $y = 0$  及  $y = 1$  所截下部分的外侧。

(4) 计算向量场  $\mathbf{v} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$  沿曲线  $L$  的环流量, 其中  $L$  是上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$  与柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  的交线, 顺  $Ox$  轴正向看,  $L$  沿顺时针方向。

2. (20分) 在变力  $\mathbf{F} = (yz, zx, xy)$  的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上第一挂限的点  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 问当  $x_0, y_0, z_0$  为何值时, 力  $\mathbf{F}$  所做的功最大? 并求出  $W$  的最大值。

3. (20分) 设  $V \subset \mathbb{R}^3$  是有界区域,  $\partial V$  是光滑曲面,  $\mathbf{n}$  是曲面  $\partial V$  的外法向量场, 而  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  是空间位置向量。分别证明:

$$(i) \int_{\partial V} \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{0}, \quad (ii) \int_{\partial V} \mathbf{p} \times \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{0}.$$

注: 向量值函数在相应区域  $V$  (或曲面  $\Sigma$ ) 上的积分定义为其各分量在  $V$  (或  $S$ ) 上的积分后所组成的向量。