§13.5 Euler 积分

13.5.1 Γ 函数 B 函数及其性质

定义 1 含参变量 x 的积分

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

所定义的一个关于 x 的函数, 称为 Γ 函数 (Gamma 函数).

通过含参变量 x, y 的积分

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

所定义的一个关于 x, y 的二元函数, 称为 B 函数 (Beta 函数).

因为这两个函数是由 Euler 在求解偏微分方程时引入的, 所以又被称为 Euler 函数或 Euler 积分.

定理 1 $\Gamma(x)$ 的定义域是 $(0,\ +\infty)$, 而且是 $(0,\ +\infty)$ 上连续函数.

证明 把积分分成两部分,

$$\Gamma(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

对任意的 $\beta>\alpha>0$, 当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, 时有

$$t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{\alpha-1}e^{-t},\quad 0<t\leqslant 1;$$
$$t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{\beta-1}e^{-t},\quad 1\leqslant t<+\infty.$$

因积分 $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ 和积分 $\int_1^{+\infty}t^{\beta-1}e^{-t}dt$ 都收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 积分 $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ 和积分 $\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不但收敛, 而且一致收敛. 故 $\Gamma(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有定义, 而且连续.

由于 $\beta>\alpha$ 是任意的两个正数, 所以 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义而且连续.

定理 2 Γ 函数有任意阶导数.

证明 设 $x \in [\alpha, \beta]$. 我们需要观察被积函数对 x 求 k 次导数后的积分

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt.$$

利用定理 1 中同样的方法, 有

$$|t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k| \leqslant \frac{(-1)^k(\ln t)^k}{t^{1-\alpha}} \quad t \in (0,1],$$

$$t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k \leqslant t^{\beta-1}e^{-t}(\ln t)^k \quad t \in [1,+\infty).$$

上面两个不等式的右边都是可积的, 因为当 $t \to 0^+$ 时, $(\ln t)^k$ 趋于无穷的速度, 比任何 t^γ, $\gamma > 0$ 慢. 而当 $t \to +\infty$ 时, $t^{x-1}(\ln t)^k$ 趋于无穷的速度, 远比不上 e^t. 所以可以证明上述积分在 $[\alpha, \beta]$ 上是一致收敛的, 故定理成立, 且

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt.$$

定理 3 (Γ 函数递推公式) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ x>0$.

证明　由分部积分法得

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt=-t^xe^{-t}\Big|_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$
$$=x\Gamma(x).$$

重复应用上面的递推公式便得

$$\Gamma(x+1)=x(x-1)\cdots(x-n+1)\Gamma(x-n+1),\quad n-1<x\leqslant n.$$

在上式中, 因为 $0<x-n+1\leqslant 1$, 所以对 $x>1$ 的 Γ 函数值的计算总可以归结为计算 $0<x<1$ 的 Γ 函数值.

特别当 $x=n$ (n 为自然数) 时就有

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1)=n!,$$

这是因为 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$.

此外, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值亦可定出. 这只须在积分

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

中作变量代换 $t=x^2$ 即得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

由此又可定出当 x 为半整数 $n+\frac{1}{2}$ 的 Γ 函数的值

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

定理 4 $\mathrm{B}(x,y)$ 在 $I=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续, 且 $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$.

证明 在 B 函数的定义式

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

中, 如果 $x<1$, 则 $t=0$ 是瑕点; 如果 $y<1$, 则 $t=1$ 是瑕点. 故把积分拆成两部分:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^a t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt+\int_a^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

其中 $0<a<1$.

当 $t\to 0$ 时,

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sim t^{x-1},$$

所以第一个积分当 $x>0$ 时收敛;

当 $t \to 1$ 时,

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1},$$

所以第二个积分当 $y > 0$ 时收敛. 就是说, $\mathrm{B}(x,y)$ 的定义域为 $x > 0, y > 0$.

对于区间 I 上任取一点 (x_0, y_0), 取 $x_0 > x_1 > 0$, $y_0 > y_1 > 0$, 则当 $x \geqslant x_1, y \geqslant y_1$ 时, 无论 t 是区间 $(0,1)$ 上怎样的数值, 都有

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant t^{x_1-1}(1-t)^{y_1-1},$$

由于积分 $\int_0^1 t^{x_1-1}(1-t)^{y_1-1}dt$ 收敛, 因而积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ 在 $[x_1,+\infty) \times [y_1,+\infty)$ 上一致收敛, 故 $\mathrm{B}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 由 (x_0,y_0) 的任意性可知, $\mathrm{B}(x,y)$ 在其定义域上连续.

作变换 $t = 1-u$, 即可得到 $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$.

定理 5 (B 函数无穷积分表示) 对任意的 $x>0, y>0$, 有

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}dz.$$

证明 由定义知

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

令 $t=\frac{1}{1+z}$, 即有 $1-t=\frac{z}{1+z}$, $dt=-\frac{dz}{(1+z)^2}$, 代入后就有

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}dz\ (x>0,y>0).$$

定理 6 (B 函数递推公式) 对任意的 $x>0, y>1$, 有

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x,y-1).$$

证明 从 B 函数的定义出发, 由分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x,y)&=\int_0^1(1-t)^{y-1}d\frac{t^x}{x}=\frac{t^x(1-t)^{y-1}}{x}\bigg|_0^1+\frac{y-1}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-2}\,dt\\&=\frac{y-1}{x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}\,dt-\frac{y-1}{x}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\\&=\frac{y-1}{x}\mathrm{B}(x,y-1)-\frac{y-1}{x}\mathrm{B}(x,y).\end{aligned}$$

因此,

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x,y-1).$$

特别, 由于 $\mathrm{B}(1,1)=1$, 对于 $m,n\in\mathbb{N}^+$ 有 $\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

定理 7 (**B 函数与 Γ 函数的关系**, Dirichlet **公式**) 对任意的 $x > 0, y > 0$, 有

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

证明 根据 B 函数和 Γ 函数的递推公式, 只需对 $x > 1$, $y > 1$ 的情况证明结论成立. 由 Γ 函数的定义

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \int_0^{+\infty} v^{y-1} e^{-v} dv,$$

在上式中命 $v = ut$, 再交换积分次序, 就得到

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \int_0^{+\infty} u^y t^{y-1} e^{-ut} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{y-1} dt \int_0^{+\infty} u^{x+y-1} e^{-(1+t)u} du. \end{aligned} \tag{1}$$

上面交换积分次序是合理的, 这只需注意到在 $x > 1, y > 1$ 的假设下, 有

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

$$0 \leqslant u^{x+y-1}t^{y-1}e^{-u(t+1)} \leqslant \frac{(x+y-1)^{x+y-1}}{(t+1)^x},\ (u \geqslant 0)$$

$$0 \leqslant u^{x+y-1}t^{y-1}e^{-u(t+1)} \leqslant (y-1)^{y-1}u^x e^{-u},\ (t \geqslant 0).$$

现在在 (1) 式右端用变量代换 $w = u(1+t)$, 最后得到

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t^{y-1}dt \int_0^{+\infty} \frac{w^{x+y-1}e^{-w}}{(1+t)^{x+y}}dw \\ &= \Gamma(x+y)\int_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \\ &= \Gamma(x+y)\,\mathrm{B}(x,y).\end{aligned}$$

从而得到

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x>0, y>0).$$

例 1　求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$$

的值, 其中 n 及 m 都是非负整数.

解　作变量代换 $t = \sin^2 x$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)},\end{aligned}$$

在这个表达式中, Γ 函数的自变量所取的值或是整数, 或是半整数, 因此所给

积分是可以算出来的. 特别当 $m=0$ 时就有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

定理 8 (Legendre **加倍公式**) 当 $x>0$ 时, 有

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

证明 在积分

$$\mathrm{B}(x,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt$$
$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1}dt$$

中作变量代换 $\frac{1}{2}-t=\frac{1}{2}\sqrt{u}$, 则可算得

$$\mathrm{B}(x,x)=\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{x-1}du=\frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right),$$

将这个等式两边的 B 函数用 Γ 函数来表示就成为

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})},$$

把 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 代入即得加倍公式.

定理 9 (Stirling **公式**) 对任意 $x > 0$, 存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ 使得

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{\theta(x)}{12x}}.$$

推论 1 对于任意实数 a, 有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a \Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = 1.$$