§3.3 微分中值定理

3.3.1 Rolle 定理和 Fermat 定理

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义, 如果对其中的任一点 x, 都有

$$f(x_0) \geqslant f(x), \quad (\text{或} \quad f(x_0) \leqslant f(x)),$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值（或极小值）, x_0 称为 $f(x)$ 的一个极大值点（或极小值点）. 极大值和极小值统称为极值, 极大值点和极小值点统称为极值点.

直观上, 从几何上看, 如果函数 $f(x)$ 在一点 x_0 取到极大 (极小) 值, 而且函数在此点的切线存在, 那么在这点的切线应当是水平的（平行于 x 轴）, 也就是说函数在这点的导数为零.

定理 1 (Fermat **定理**) 设函数 $f(x)$ 在其定义区间 I 的一个内点（即不是端点）x_0 处取到极值, 如果函数在这一点可导, 则必有 $f'(x_0) = 0$.

定理 1 (Fermat **定理**) 设函数 $f(x)$ 在其定义区间 I 的一个内点（即不是端点）x_0 处取到极值, 如果函数在这一点可导, 则必有 $f'(x_0)=0$.

证明 不妨设函数在 x_0 取到极大值. 根据定义, 存在一个 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0$$

只要改变量 h 满足 $|h|<\delta$. 于是差商

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0, \quad \text{当 } h<0 \text{ 时}$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0, \quad \text{当 } h>0 \text{ 时}$$

又因为函数在 x_0 可导, 所以在上列两式中分别令 $h\to 0^-$ 和 $h\to 0^+$, 有

$$f'_-(x_0)\geqslant 0, \quad f'_+(x_0)\leqslant 0$$

故 $f'(x_0)=0$. 当 f 在 x_0 取到极小值的情况, 可类似证明.

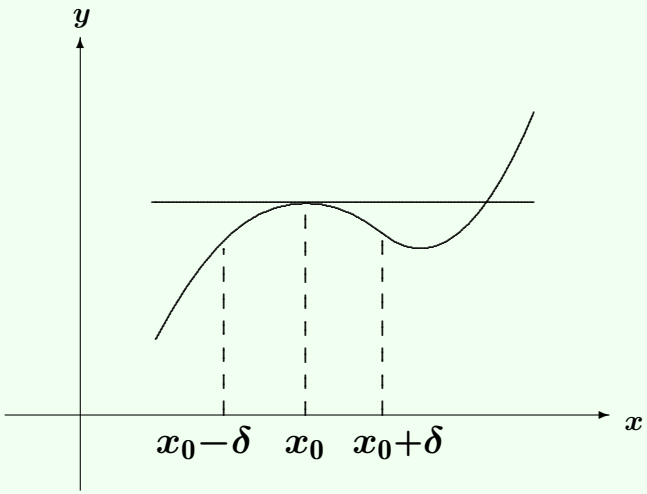


图 3.1

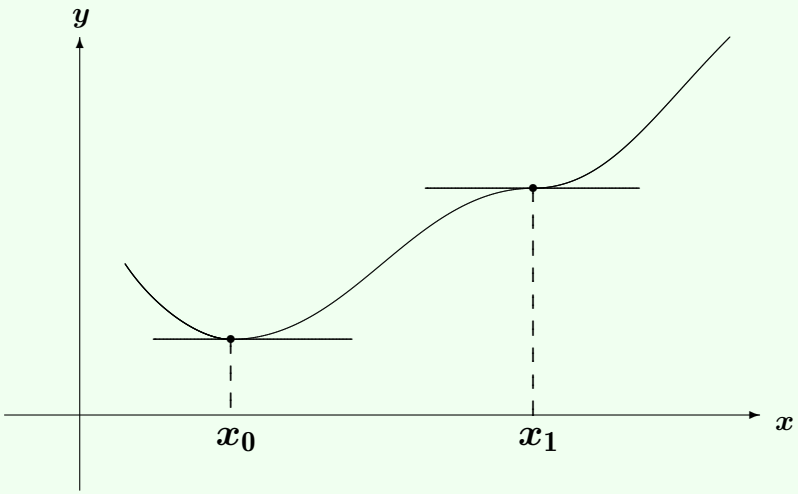


图 3.2

注意 Fermat 定理的逆并不成立, 也就是说, 即使函数 f 在一内点的导数为零, 未必这一点是极值点, 最简单的反例是 $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$, 显然, $f'(0) = 0$, 但是 $x = 0$ 不是该函数的极值点. 即便如此, Fermat 定理提供了这样的途径, 即由导数的信息, 推断函数的有关 (极大、极小) 值是否存在? 通常, 称导数为零的点为函数的驻点, 因此想了解函数的极值点, 只要在驻点中作进一步讨论即可.

定理 2 (Rolle **定理**) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 而且 $f(a)=f(b)$, 则必有 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

定理 2 (Rolle **定理**) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 而且 $f(a)=f(b)$, 则必有 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证明 根据闭区间 $[a,b]$ 上连续函数一定有最大值和最小值 (最大值和最小值当然也是极值) 的实事, 如果最大值和最小值中至少有一个在 (a,b) 内部一点 ξ 取得, 则由 Fermat 定理知, $f'(\xi)=0$. 反之, 最大值和最小值都只能在端点 a 和 b 处取得, 而 $f(a)=f(b)$, 所以最大值和最小值相等, 即, 函数是一个常值函数, 此时函数的导函数在任何一点都为零. 证毕.

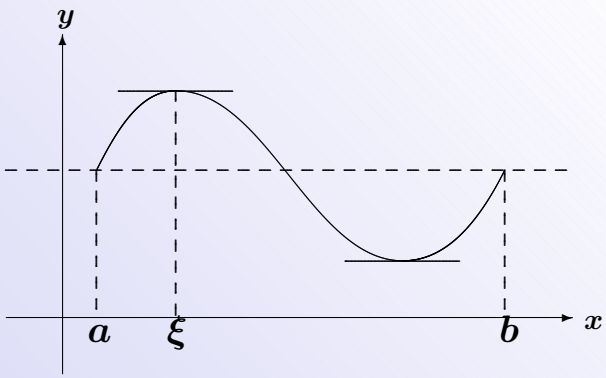


图 3.3

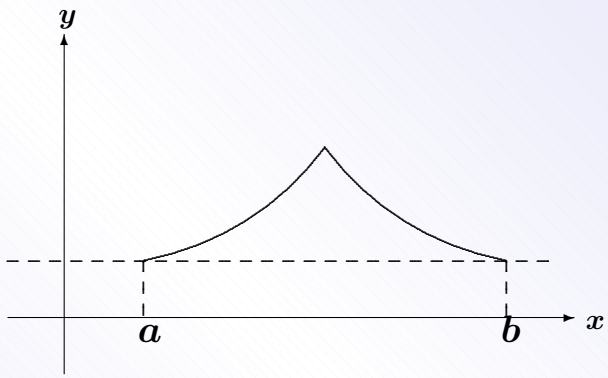


图 3.4

3.3.2 微分中值定理

定理 3 (**微分中值定理**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 则必有 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.3.2 微分中值定理

定理 3 (**微分中值定理**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 则必有 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明 我们构造函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).$$

则容易验证: $F(b) = F(a) = 0$, 而且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 因此 $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件, 故存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

这即是定理的结论. 证毕.

有时, 我们也称微分中值定理为 Lagrange 中值定理. 当 $f(a) = f(b)$ 时, 中值定理就转化成 Rolle 定理, 因此它是比 Rolle 定理更一般的定理.

从几何上看, 微分中值定理的结果是不难理解的. 考虑函数的差商

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

它是割线 AB 的斜率. 设想一下, 如果我们平行移动这条割线, 则它至少有一次机会达到这样的位置, 即在曲线上与割线 AB 距离最远的那一点 M, 成为曲线的切线 (图3.5). 也就是说, 存在介于 a 和 b 之间的一点 ξ, 使得定理 3 成立.

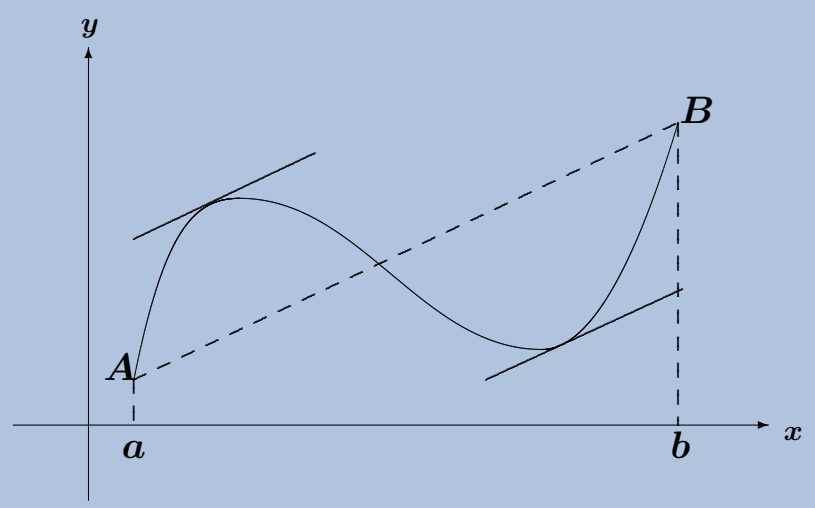


图 3.5

从物理上看, 一个沿直线运动的质点, 必然在某一个时刻的瞬时速度, 等于整个运动过程的平均速度.

推论 1 如果函数 f 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 x, 都有 $f'(x) = 0$, 则函数 f 在区间上一定是常值函数. 对于两个可导函数 f 和 g, 如果它们的导数相等, 则两个函数相差一个常数.

推论 1 如果函数 f 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 x, 都有 $f'(x)=0$, 则函数 f 在区间上一定是常值函数. 对于两个可导函数 f 和 g, 如果它们的导数相等, 则两个函数相差一个常数.

证明 任取区间上两点 $x_1<x_2$, 在 $[x_1,x_2]$ 上, 由中值定理知, 存在一点 ξ 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

但 $f'(x)$ 恒为零, 所以 $f'(\xi)=0$, 于是 $f(x_1)=f(x_2)$, 即函数在区间上任意两点的值相等, 所以是常值函数.

推论 1 如果函数 f 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 x, 都有 $f'(x)=0$, 则函数 f 在区间上一定是常值函数. 对于两个可导函数 f 和 g, 如果它们的导数相等, 则两个函数相差一个常数.

证明 任取区间上两点 $x_1<x_2$, 在 $[x_1,x_2]$ 上, 由中值定理知, 存在一点 ξ 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

但 $f'(x)$ 恒为零, 所以 $f'(\xi)=0$, 于是 $f(x_1)=f(x_2)$, 即函数在区间上任意两点的值相等, 所以是常值函数.

进一步可以证明, 若函数 f 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 x, 都有 $f^{(n)}(x)=0$, 则函数 f 在区间上一定是次数不超过 $n-1$ 的多项式.

例 1 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足方程 $f'(x) = f(x)$, 则存在常数 c 使得 $f(x) = ce^x$.

例 1 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足方程 $f'(x) = f(x)$, 则存在常数 c 使得 $f(x) = ce^x$.

证明 令 $g(x) = e^{-x}f(x)$. 则 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = 0$. 于是 $g(x)$ 是常数, 记 $g(x) = c$. 则有 $f(x) = ce^x$.

例 1 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足方程 $f'(x) = f(x)$, 则存在常数 c 使得 $f(x) = ce^x$.

证明 令 $g(x) = e^{-x}f(x)$. 则 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = 0$. 于是 $g(x)$ 是常数, 记 $g(x) = c$. 则有 $f(x) = ce^x$.

以上结论可以推广如下:

设 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\varphi'(x) = g(x)$. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足方程 $f'(x) = g(x)f(x)$, 则存在常数 c 使得 $f(x) = ce^{\varphi(x)}$.

推论 2 设函数 f 在区间 I 可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$（即导数有界）. 则

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|$$

即, 具有有界导数的函数一定是 Lipschitz 连续的.

推论 2 设函数 f 在区间 I 可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$ (即导数有界). 则

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|$$

即, 具有有界导数的函数一定是 Lipschitz 连续的.

例 2 设函数 f 在区间 I 上有定义. 若存在 $M > 0$, 及 $\alpha > 1$ 使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|^{\alpha}, \ \forall\, x_1, x_2 \in I,$$

则 $f(x)$ 是常数.

推论 2 设函数 f 在区间 I 可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$ (即导数有界). 则

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|$$

即, 具有有界导数的函数一定是 Lipschitz 连续的.

例 2 设函数 f 在区间 I 上有定义. 若存在 $M > 0$, 及 $\alpha > 1$ 使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|^{\alpha}, \ \forall\, x_1, x_2 \in I,$$

则 $f(x)$ 是常数.

证明 对于任意 I 的内点 x_0, 当 Δx 充分小时, 有

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \leqslant M|\Delta x|^{\alpha}.$$

因此,

$$\left|\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right| \leqslant M|\Delta x|^{\alpha-1}.$$

由于 $\alpha > 1$, 我们得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0,$$

即, $f'(x_0) = 0$. 这说明 f 在 I 上可导且导函数恒为零, 因此 f 为常数.

由于 $\alpha > 1$, 我们得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0,$$

即, $f'(x_0) = 0$. 这说明 f 在 I 上可导且导函数恒为零, 因此 f 为常数.

例 3 证明: 对任意常数 c, 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0, 1]$ 中不可能有两个相异的实根.

由于 $\alpha > 1$, 我们得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0,$$

即, $f'(x_0) = 0$. 这说明 f 在 I 上可导且导函数恒为零, 因此 f 为常数.

例 3 证明: 对任意常数 c, 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0, 1]$ 中不可能有两个相异的实根.

证明 记 $f(x) = x^3 - 3x + c$. 若对某个 c, 方程在 $[0, 1]$ 上有两个相异的实根 x_1, x_2 不妨设 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ 则 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足 Rolle 定理的三个条件, 所以必有 $x_1 < \xi < x_2$ 使得

$$f'(\xi) = 3(\xi^2 - 1) = 0.$$

即 $|\xi| = 1$, 但 $0 \leqslant x_1 < \xi < x_2 \leqslant 1$, 故矛盾. 矛盾说明有两个相异实根的假设是不对的.

例 4 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

例 4 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证明 由于 $0 < a < b$, 故在 $[a, b]$ 上, 函数 $\ln x$ 显然满足中值定理的条件, 所以存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\ln b - \ln a = (\ln x)'|_{x=\xi}(b-a) = \frac{1}{\xi}(b-a)$$

但

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$$

即有所证的结果.

例 4 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证明 由于 $0 < a < b$, 故在 $[a, b]$ 上, 函数 $\ln x$ 显然满足中值定理的条件, 所以存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\ln b - \ln a = (\ln x)'|_{x=\xi}(b-a) = \frac{1}{\xi}(b-a)$$

但

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$$

即有所证的结果.

取 $a = x > 0, b = x + 1$ 可得

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

例 5 证明恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1$$

例 5 证明恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1$$

证明 命 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 则 $f'(x) \equiv 0$. 所以

$$\arcsin x + \arccos x \equiv c \quad (\text{常数}).$$

将 $x = 0$ 代入, 即得 $c = \frac{\pi}{2}$.

例 5 证明恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1$$

证明 命 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 则 $f'(x) \equiv 0$. 所以

$$\arcsin x + \arccos x \equiv c \quad (\text{常数}).$$

将 $x = 0$ 代入, 即得 $c = \frac{\pi}{2}$.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0.$$

例 5 证明恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1$$

证明 命 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 则 $f'(x) \equiv 0$. 所以

$$\arcsin x + \arccos x \equiv c \quad (\text{常数}).$$

将 $x = 0$ 代入, 即得 $c = \frac{\pi}{2}$.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0.$$

证明 令 $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x)$. 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $g(a) = g(b) = 0$. 根据 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即

$$-\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f(\xi) + e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f'(\xi) = 0,$$

也就是 $f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0$.

定理 4 (Cauchy **中值定理**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 而且对任一点 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$. 则在 (a,b) 内, 必存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

定理 4 (Cauchy **中值定理**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 而且对任一点 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$. 则在 (a,b) 内, 必存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 设辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big(g(x)-g(a)\Big)$$

易知, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $F(b)-F(a)=0$. 即, $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件.

根据 Rolle 定理, 存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

根据条件有 $g'(\xi)\neq 0$, 及 $g(a)\neq g(b)$. 于是有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

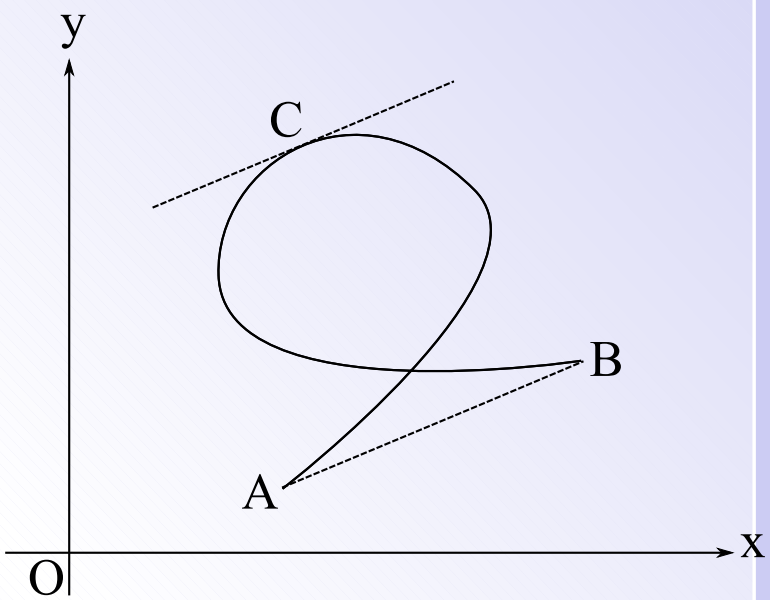
此即定理的结论. 证毕.

Cauchy 中值定理的几何意义

设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 考察参数方程

$$x = g(t),\ y = f(t), \quad (t \in [a,b])$$

所确定的曲线 L, 该曲线的两个端点是 $A = (g(a), f(a))$ 和 $B = (g(b), f(b))$, 连接这两个端点的直线的斜率是 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. 根据条件知在曲线 L 上除端点外的每一点都是有切线的. Cauchy 中值定理的几何意义就是曲线上有一点 $C = (g(\xi), f(\xi))$ 的切线斜率 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 恰好等于 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.



例 7 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

例 7 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

证明 所要证明的式子可以写成

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \left.\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi}.$$

因此只要对函数 $\frac{f(x)}{x}$ 和 $\frac{1}{x}$ 应用 Cauchy 中值定理, 即可得到结论.

例 8 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 其中 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

例 8 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 其中 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

证明 考察函数

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(x)\big).$$

根据条件可知, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且显然有 $F(a) = F(b) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即,

$$f'(\xi)\big(g(b) - g(\xi)\big) - g'(\xi)\big(f(\xi) - f(a)\big) = 0.$$

由于 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点, 有 $g'(\xi) \neq 0$, 及 $g(b) - g(\xi) \neq 0$. 因而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

3.3.3 导函数的介值性质

定理 5 (Darboux **定理**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 则 $f'(x)$ 能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意数. 即, 导函数满足介值定理.

3.3.3 导函数的介值性质

定理 5 (Darboux **定理**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 则 $f'(x)$ 能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意数. 即, 导函数满足介值定理.

证明 不妨设 $f'(a) < r < f'(b)$. 令 $g(x) = f(x) - rx$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $g'(a) < 0 < g'(b)$.

3.3.3 导函数的介值性质

定理 5 (Darboux **定理**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 则 $f'(x)$ 能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意数. 即, 导函数满足介值定理.

证明 不妨设 $f'(a) < r < f'(b)$. 令 $g(x) = f(x) - rx$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $g'(a) < 0 < g'(b)$.

从 $g'(a) < 0$ 可知, 在 a 右边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(a)$ 小;

3.3.3 导函数的介值性质

定理 5 (Darboux **定理**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 则 $f'(x)$ 能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意数. 即, 导函数满足介值定理.

证明 不妨设 $f'(a) < r < f'(b)$. 令 $g(x) = f(x) - rx$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $g'(a) < 0 < g'(b)$.

从 $g'(a) < 0$ 可知, 在 a 右边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(a)$ 小;

从 $g'(b) > 0$ 可知, 在 b 左边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(b)$ 小.

3.3.3 导函数的介值性质

定理 5 (Darboux **定理**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 则 $f'(x)$ 能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意数. 即, 导函数满足介值定理.

证明 不妨设 $f'(a) < r < f'(b)$. 令 $g(x) = f(x) - rx$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $g'(a) < 0 < g'(b)$.

从 $g'(a) < 0$ 可知, 在 a 右边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(a)$ 小;

从 $g'(b) > 0$ 可知, 在 b 左边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(b)$ 小.

这说明 $g(a)$ 和 $g(b)$ 都不是 $g(x)$ 的最小值. 因此 $g(x)$ 的最小值只能在 (a,b) 中某点 ξ 取到. 由 Fermat 定理可知 $g'(\xi) = 0$. 即, $f'(\xi) = r$. 证毕.

注意 从 Darboux 定理可知, 导函数没有第一类间断点.

例 9 设 $0 < a < 2$. 求证不存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 使得对任意 x 有 $f(ax - f(x)) = x$.

例 9 设 $0 < a < 2$. 求证不存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 使得对任意 x 有 $f(ax - f(x)) = x$.

证明 若 $f(x)$ 是满足条件的函数, 令 $g(x) = ax - f(x)$, 则

$$f(x) + g(x) = ax, \tag{1}$$

$$f(g(x)) = x. \tag{2}$$

例 9 设 $0 < a < 2$. 求证不存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 使得对任意 x 有 $f(ax - f(x)) = x$.

证明 若 $f(x)$ 是满足条件的函数, 令 $g(x) = ax - f(x)$, 则

$$f(x) + g(x) = ax, \tag{1}$$

$$f(g(x)) = x. \tag{2}$$

由 (2) 知当 $x \neq y$ 时, 有 $g(x) \neq g(y)$. 注意到 g 是连续函数, 根据介值定理可知 g 是严格单调函数.

例 9 设 $0 < a < 2$. 求证不存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 使得对任意 x 有 $f(ax - f(x)) = x$.

证明 若 $f(x)$ 是满足条件的函数, 令 $g(x) = ax - f(x)$, 则

$$f(x) + g(x) = ax, \tag{1}$$

$$f(g(x)) = x. \tag{2}$$

由 (2) 知当 $x \neq y$ 时, 有 $g(x) \neq g(y)$. 注意到 g 是连续函数, 根据介值定理可知 g 是严格单调函数.

若 g 严格减, 则由 (1) 知 f 严格增. 设 $x < y$. 有 $g(x) > g(y)$, 因而 $f(g(x)) > f(g(y))$, 结合 (2) 可得 $x > y$, 矛盾! 这说明 g 只能严格增.

若 g 有上界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$ 是有限的. 根据 f 的连续性有

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(b),$$

这与 (2) 矛盾! 于是 g 无上界, 同理 g 也无下界.

若 g 有上界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$ 是有限的. 根据 f 的连续性有

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(b),$$

这与 (2) 矛盾! 于是 g 无上界, 同理 g 也无下界.

由于 g 连续, 且无上界和下界, 因而对于任意实数 x 存在 y 使得 $g(y) = x$, 由 (2) 得 $f(x) = y$, 因此

$$g(f(x)) = x. \tag{3}$$

由 (3) 可知 f 也严格增. 于是 f 和 g 是互为反函数的严格增连续函数.

若 g 有上界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$ 是有限的. 根据 f 的连续性有

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f(b),$$

这与 (2) 矛盾! 于是 g 无上界, 同理 g 也无下界.

由于 g 连续, 且无上界和下界, 因而对于任意实数 x 存在 y 使得 $g(y) = x$, 由 (2) 得 $f(x) = y$, 因此

$$g(f(x)) = x. \tag{3}$$

由 (3) 可知 f 也严格增. 于是 f 和 g 是互为反函数的严格增连续函数.

从 (1) 可得

$$f \circ f(x) = af(x) - x, \tag{4}$$

$$g \circ g(x) = ag(x) - x. \tag{5}$$

设 f_n 为 f 的 n 次迭代, g_n 为 g 的 n 次迭代, 从上面两式, 可得

$$f_n(x) = c_n f(x) - c_{n-1}x, \tag{6}$$

$$g_n(x) = c_n g(x) - c_{n-1}x, \tag{7}$$

其中数列 c_n 满足递推公式:

$$c_{n+1} = ac_n - c_{n-1}, \quad c_1 = 1, \ c_2 = a.$$

设 f_n 为 f 的 n 次迭代, g_n 为 g 的 n 次迭代, 从上面两式, 可得

$$f_n(x) = c_n f(x) - c_{n-1}x, \tag{6}$$

$$g_n(x) = c_n g(x) - c_{n-1}x, \tag{7}$$

其中数列 c_n 满足递推公式:

$$c_{n+1} = ac_n - c_{n-1}, \quad c_1 = 1, \ c_2 = a.$$

若 0 是 f 的不动点, 则 0 也是 g 的不动点, $f(0) = g(0) = 0$. 对 (2) 求导可得

$$f'(0)g'(0) = 1.$$

对 (1) 求导可得

$$f'(0) + g'(0) = a.$$

这两个式子是矛盾的, 不然有

$$a = f'(0) + g'(0) \geqslant 2\sqrt{f'(0)g'(0)} = 2.$$

这说明 0 不是 f 和 g 的不动点. 因此 $f(0)$ 和 $g(0)$ 中必有一个是正数.

这说明 0 不是 f 和 g 的不动点. 因此 $f(0)$ 和 $g(0)$ 中必有一个是正数.

不妨设 $f(0) > 0$. 从 f 的严格增性, 可知 $\{f_n(0)\}$ 为严格递增数列. 因为 $f_n(0) = c_n f(0)$, 所以 c_n 是递增的, 因而 $c_n \geqslant c_1 = 1$. 又

$$c_{n+1} - c_n = (a-2)c_n + c_n - c_{n-1} < c_n - c_{n-1}.$$

所以 $\{c_n - c_{n-1}\}$ 是非负递减的, 这说明 $\{c_n - c_{n-1}\}$ 收敛, 但这又可推出 c_n 趋于零, 与 $c_n \geqslant 1$ 矛盾. 这样就完成了证明.

证法二 已经有 f, g 满足 (1), (2), (3) 且严格单调递增互为反函数, 故, $f'(x) > 0, g'(x) > 0$. 对于任意 x, 令 $y = f(x)$. 由 (1), (2), 得

$$f'(y) + g'(y) = a, \tag{8}$$

$$f'(y)g'(x) = 1. \tag{9}$$

若 $g'(y) \geqslant g'(x)$, 则由 (8), (9), 有

$$a \geqslant 2\sqrt{f'(y)g'(y)} \geqslant 2\sqrt{f'(y)g'(x)} = 2,$$

这与条件矛盾! 因此, $g'(y) < g'(x)$. 将 (8), (9) 的 x, y 交换, 用刚才的推导仍可得出矛盾! 故, 满足条件得 $f(x)$ 不存在.

证法三 仅假设 $f(x)$ 连续. 接 (1), (2), (3), 若存在 $x_0 > 0$ 使得 $f(x_0) = g(x_0)$, 则由 (1), 得

$$f(x_0) = \frac{a}{2} < x_0.$$

由 (3) 及 g 的增性, 得

$$x_0 = g(f(x_0)) < g(x_0) = f(x_0).$$

上面两个不等式矛盾! 故, 对于任意 $x > 0$, 有 $f(x) \neq g(x)$. 根据零值定理, 必有 $f(x) > g(x)$, $(x > 0)$ 或者 $f(x) < g(x)$, $(x > 0)$. 不妨设,

$$f(x) < g(x), \ (x > 0). \tag{10}$$

此时根据 (1), 有 $f(x) < \frac{a}{2}x$, $(x > 0)$. 记 $a_1 = \frac{a}{2}$. 则

$$f(x) < a_1 x, \ (x > 0).$$

假设有正数 a_n 使得

$$f(x) < a_n x, \ (x > 0). \tag{11}$$

由 (3) 和 g 的单调性, 得

$$x < g(a_n x), \ (x > 0).$$

将此式中的 x 换成 $\frac{x}{a_n}$, 得

$$\frac{x}{a_n} < g(x), (x > 0).$$

代入 (1), 得

$$f(x) < a_{n+1} x, \ (x > 0).$$

其中

$$a_{n+1} = \frac{a a_n^2}{a_n^2 + 1}. \tag{12}$$

这样就递推构造了正数列 $\{a_n\}$ 满足 (11). 注意到, $a_1 < 1$, $a_2 = \frac{a}{1+1/a_1^2} < a_1$. 数列 $\{a_n\}$ 严格单调递减, 且由 (12) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 在 (11) 中令 $n \to \infty$ 可得 $f(x) \leqslant 0$. 这与 $f(x)$ 单调递增无上界矛盾.

总之, 在题设条件下, 仅假设 $f(x)$ 连续, 也不可能存在 $f(x)$ 满足条件.