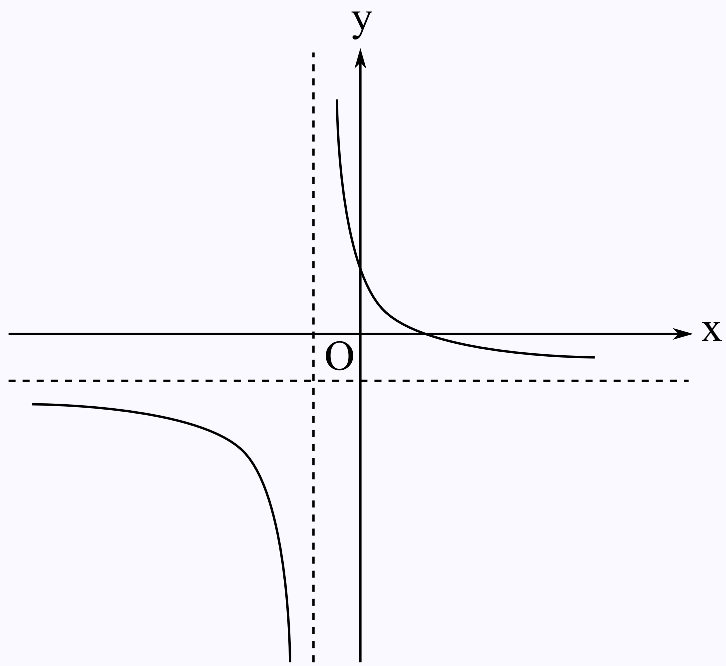
§9.3 隐函数定理和逆映射定理

形如 $y = f(x)$ 的变量 y 与变量 x 的关系是通过函数 f 来建立, 就称为显函数. 在很多情形各变量之间的关系是通过一个或多个方程来建立的.

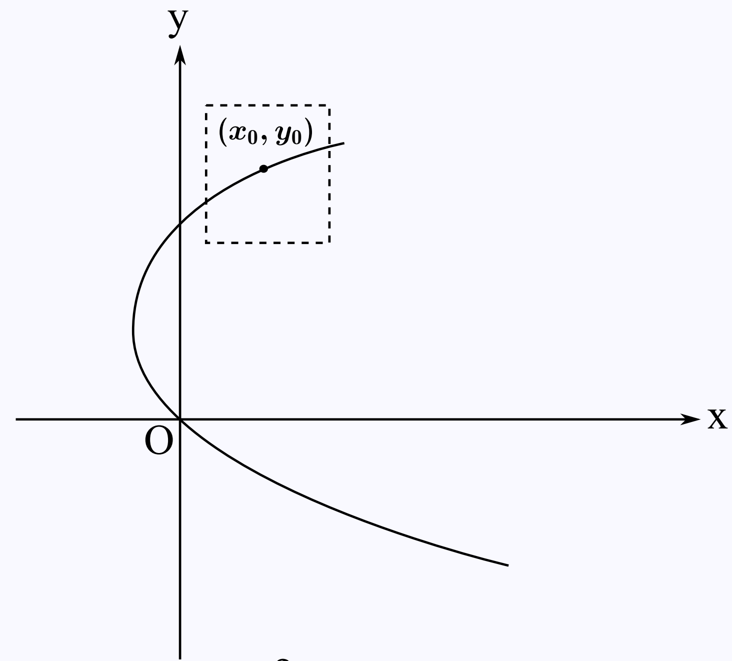
定义 1 设 $F(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上有定义, 方程 $F(x, y) = 0$ 确定了平面上一条曲线. 如果在曲线上某一点 $(x_0, y_0) \in D$（即 $F(x_0, y_0) = 0$）的邻域 $I \times J \subset D$内, 对于任一 $x \in I$ 都有唯一的 $y \in J$, 使 $F(x, y) = 0$, 则由此对应关系确定的 I 上的函数 $y = f(x)$ 称为在 (x_0, y_0) 的邻域中由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.

如果一个 x 有多个 y 使得 $F(x, y) = 0$, 则这个方程确定了多个隐函数. 有时能通过方程解出它表示的隐函数, 但在很多情形是无法解出隐函数的.

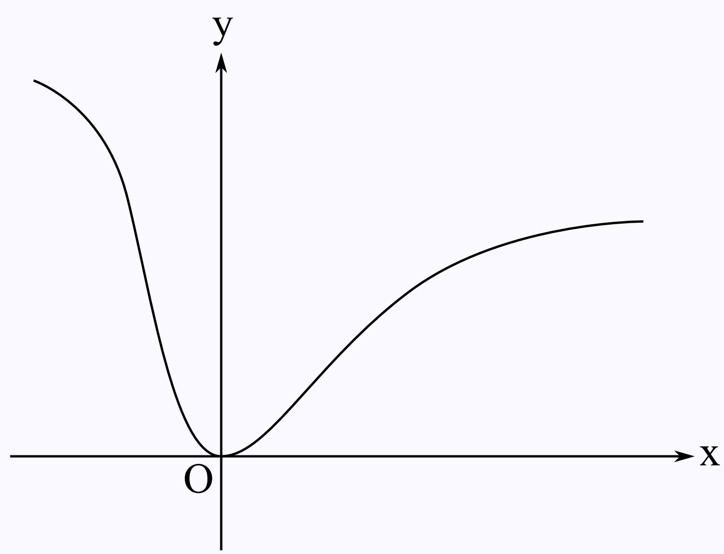
我们要讨论方程所确定的隐函数的可微性, 以及求隐函数的微分的方法.



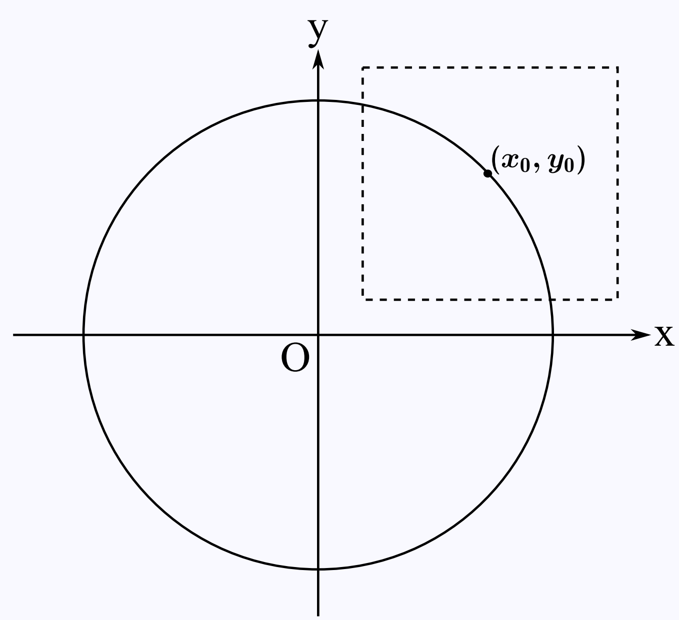
$$xy + x + y - 1 = 0$$



$$x - y^2 + \sin y = 0$$



$$\frac{x^2}{2x^2+\sin x+1}e^{-y} - y = 0$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

9.3.1 隐函数的存在性和微商

分析 设 $F(x, y)$ 是二元可微函数. 假如方程

$$F(x, y) = 0$$

确定了 Oxy 平面上一条曲线, 而且能够在曲线上一点 (x_0, y_0) 的邻域内解出方程所确定的隐函数

$$y = f(x),$$

因而在 (x_0, y_0) 附近有

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

假设 $f(x)$ 是可导的. 对上面恒等式两边利用复合函数的链式法则求导, 得

$$F'_x + F'_y f'(x) = 0,$$

因为

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

所以, 隐函数的导数应该是如下形式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \qquad (F(x,y)=0).$$

由此分析可看出:

第一, 一般情况下, 方程

$$F(x,y)=0$$

在 (x_0,y_0) 附近所确定的隐函数

$$y=f(x)$$

存在的必要条件应该是函数 $F(x,y)$ 的偏导数 $F'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不等于零. 对称地, 若确定的隐函数是 $x=f(y)$, 则必要条件应该是 $F(x,y)$ 的偏导数 $F'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不等于零.

第二, 如果隐函数 $y=f(x)$ 存在, 它的微商, 应该就是上面推导出来的形式.

定理 1 (**隐函数存在定理**) 设区域 $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$. 如果 $F(x, y)$ 在 D 中有定义并满足:

1° $F(x, y) \in C^1(D)$, 即在区域上有连续的偏导函数;

2° $F(x_0, y_0) = 0$, 即点 M_0 在方程 $F(x, y) = 0$ 确定的曲线上;

3° $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则存在 M_0 的邻域 $I \times J \subset D$, 使得:

1) 对 I 中任意 x, 有 J 中唯一 y 使 $F(x, y) = 0$; 即在过 M_0 的一小段曲线可以确定一个隐函数 $y = f(x)$, 且 $y_0 = f(x_0)$.

2) 由 1) 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 有连续的微商, 而且它的微商是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad (F(x, y) = 0).$$

如果条件 3° 改为 $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则隐函数是 $x = f(y)$.

证明 关键是要证明隐函数的存在性. 证明过程中, 将反复利用所涉及函数的连续性. 不妨设 $F'_y(x_0,y_0)>0$. 则由 $F'_y(x,y)$ 的连续性, 可知存在一个以 (x_0,y_0) 为中心的矩形 $I'\times J$, 使得

$$F'_y(x,y)>0,\quad (x,y)\in I'\times J$$

所以 $F(x,y)$ 在 $I'\times J$ 上关于 y 严格单调增. 记 $J=[c,d]$, 则

$$F(x_0,c)<F(x_0,y_0)=0<F(x_0,d),\quad \text{即}\quad F(x_0,c)<0<F(x_0,d)$$

因为 $F(x,y)$ 对 x 连续, 所以存在一个以 x_0 为中心的区间 $I\subset I'$, 使得

$$F(x,c)<0<F(x,d),\quad x\in I$$

再因为 $F(x,y)$ 对 y 的连续性、单调性和介值定理, 对每一个 $x\in I$, 存在唯一的 $y=f(x)$, 使 $F(x,f(x))=0$, 且 $c<f(x)<d,\ \ x\in I$.

$f(x)$ 在 x_0 连续: 对任意 $\varepsilon>0$ 在上面的过程中总可以选 J 使得 $|J|<\varepsilon$. 而且可以取区间 I 适当小, 使得当 $x\in I$ 时, $f(x)\in J$. 因而

$$|f(x)-f(x_0)|<|J|<\varepsilon.\quad \text{这说明 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 连续}.$$

$f(x)$ 在 I 连续: 对 $x_1 \in I$, 设 $y_1 = f(x_1)$, 则 $(x_1, y_1) \in I \times J$. 因为 $F(x_1, y_1) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) > 0$, 所以 F 在点 (x_1, y_1) 满足与 (x_0, y_0) 同样的条件. 因此由前面的证明可知, 存在包含 (x_1, y_1) 的开矩形 $I_1 \times J_1 \subset I \times J$. 当 $x \in I_1$ 时, 方程 $F(x, y) = 0$ 在 J_1 有唯一解 $g(x)$, 且 g 在 x_1 连续. 由解的唯一性知: 当 $x \in I_1$ 时, $f(x) = g(x)$. 这说明 f 在 x_1 也连续.

$f(x)$ 在 I 可导: 设 $x \in I$. 取 h 充分小, 使得 $x + h \in I$. 令 $y = f(x)$, $k = f(x+h) - f(x)$. 由 F 的可微性, 有

$$0 = F(x+h, y+k) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)k + r, \tag{9.1}$$

其中 r 满足 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. 令 $\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{h^2+k^2}}$, $\quad \beta = \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{h^2+k^2}}$, 则 $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \beta = 0$, $\alpha h + \beta k = r$. 将此代入 (9.1), 可得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) + \beta}.$$

令 $h \to 0$, 即得 $f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

例 1 考虑方程 (对应的曲线称为 Descartes (笛卡尔) 叶形线.)

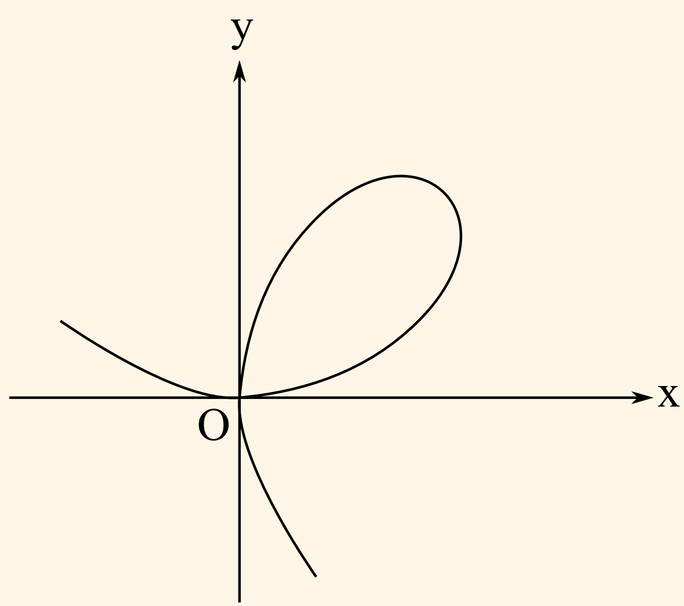
$$F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0.$$

显然, 要想直接求解方程, 给出显式的函数表达式是相当困难的. 对函数 $F(x,y)=x^3+y^3-3axy$ 的两个变量分别求导得

$$F'_x(x,y)=3x^2-3ay,\quad F'_y(x,y)=3y^2-3ax$$

注意到原点 $(0,0)$ 虽然满足方程 $F(0,0)=0$, 但是 $F'_x(0,0)=0$, $F'_y(0,0)=0$. 所以定理在 $(0,0)$ 失效.

从图形上看, 曲线在 $(0,0)$ 点自相交, 在这一点的附近, 任何给定的 x (或 y), 都无法做到单值的对应一个 y (或 x). 当然不存在显式的函数表达式 (想想看, 如果一个一般曲线 $F(x,y)=0$ 有自相交, 则在自相交的点处, $F(x,y)$ 的两个偏导数会如何?)



例 2 设方程 $\sin(x+y)+2x+y=0$ 确定了 y 是 x 的函数. 求 $y'(x)$, $y''(x)$.

解 设 $F(x,y)=\sin(x+y)+2x+y$. 则 $F_y'(x,y)=\cos(x+y)+1$. 当 $\cos(x+y)+1\neq 0$ 时, 有隐函数 $y=y(x)$. 将 $y=y(x)$ 代入方程, 得到

$$\sin(x+y(x))+2x+y(x)=0.$$

两边对 x 求导, 得

$$\cos(x+y(x))\cdot(1+y'(x))+2+y'(x)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -1-\frac{1}{1+\cos(x+y)}.\\
y''(x) &= \frac{-\sin(x+y)\cdot(1+y'(x))}{(1+\cos(x+y))^2}\\
&= \frac{\sin(x+y)}{(1+\cos(x+y))^3}
\end{aligned}$$

对于三维空间的一个方程

$$F(x,y,z)=0$$

一般来说，它确定了三维空间的一个曲面．如果在曲面上一点 (x_0,y_0,z_0) 附近，有隐函数 $z=f(x,y)$，则

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0.$$

同样，对这个恒等式两边分别对 x 和 y 求导，则有

$$F'_x+F'_zf'_x=0;\quad F'_y+F'_zf'_y=0.$$

从中可以解得，隐函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数如下

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

因此，这种情况下隐函数 $z=f(x,y)$ 存在的条件是：$F(x,y,z)$ 有连续的偏导数，$F(x_0,y_0,z_0)=0$，且

$$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

例 3 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\frac{1}{2}\sin(x+2y-z)=x+2y-z$ 所确定的隐函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 记

$$F(x,y,z)=\frac{1}{2}\sin(x+2y-z)-x-2y+z.$$

则

$$F'_z(x,y,z)=-\frac{1}{2}\cos(x+2y-z)+1>0.$$

所以 $F(x,y,z)=0$ 在空间中确定了隐函数 $z=z(x,y)$. 因为

$$F'_x=\frac{1}{2}\cos(x+2y-z)-1,\quad F'_y=\cos(x+2y-z)-2,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=2.$$

实际上, 由原方程可知有 $x+2y-z=0$, 因此 $z=x+2y$. 这就是方程的解.