# 第十五次作业答案

罗曾宇

**题目 1.** 设在参考系 $\Sigma$ 内 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$，$\Sigma'$ 系沿 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 的方向运动. 问 $\Sigma'$ 系应以什么样的速度相对于 $\Sigma$ 系运动才能使其中只有电场或只有磁场?

**解答.** 令 $\Sigma'$ 系沿着 $\Sigma$ 系的 $x$ 轴正向运动，按题意，在 $\Sigma$ 系中

$$E_x = E_z = 0, \boldsymbol{E} = E_y \boldsymbol{e_y}, B_x = B_y = 0, \boldsymbol{B} = B_z \boldsymbol{e_z},$$

由电磁场变换关系

$$\boldsymbol{E}'_{//} = \boldsymbol{E}_{//}, \boldsymbol{B}'_{//} = \boldsymbol{B}_{//},$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp}, \boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E})_{\perp},$$

得 $\Sigma'$ 系中

$$E'_x = B'_x = 0,$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = \gamma(|\boldsymbol{E}| - v|\boldsymbol{B}|),$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) = \gamma(|\boldsymbol{B}| - \frac{v}{c^2}|\boldsymbol{E}|),$$

若在 $\Sigma'$ 系中只观察到电场 $\boldsymbol{E}'$，磁场 $\boldsymbol{B}' = 0$，要求 $\Sigma'$ 系的速度为

$$v = \frac{c^2|\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{E}|}, \text{即} \boldsymbol{v} = \frac{c^2}{E^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B},$$

由于总有 $v < c$，故 $\Sigma$ 系中应满足 $|\boldsymbol{E}| > c|\boldsymbol{B}|$.

若在 $\Sigma'$ 系中只观察到磁场 $\boldsymbol{B}'$，电场 $\boldsymbol{E}'=0$，要求 $\Sigma'$ 系的速度为

$$v=\frac{1}{B^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B},$$

而且 $\Sigma$ 系中应满足 $|\boldsymbol{E}|<c|\boldsymbol{B}|$.

**题目 2.** 作匀速运动的点电荷所产生的电场在运动方向发生“压缩”，这时在电荷的运动方向上电场 $\boldsymbol{E}$ 与库伦场相比较会发生减弱. 如何理解这一减弱与变换公式 $E_{//}=E'_{//}$ 的关系？

**解答.** 设点电荷 $q$ 沿 $\Sigma$ 系 $x$ 轴以速度 $v$ 运动. 在电荷静止的 $\Sigma'$ 系中，任意时刻都观察到球对称的库伦场，它在运动方向上的分量为

$$\boldsymbol{E}'_{//}=\frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3},\text{其中}r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$(x',y',z')$ 是 $\Sigma'$ 系中场点的坐标. 变换到 $\Sigma$ 系中，虽然有

$$\boldsymbol{E}_{//}=\boldsymbol{E}'_{//}=\frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3},$$

但在 $\Sigma$ 系中场点坐标为 $(x,y,z)$，而场点坐标是按

$$x'=\gamma(x-vt),y'=y,z'=z,$$

变换的. 设 $t=t'=0$ 时电荷 $q$ 刚好经过 $\Sigma$ 系的原点，此时对同一个场点，因为 $\gamma>1$，故 $x<x'$，因而必有 $\boldsymbol{E}_{//}<\boldsymbol{E}'_{//}$，即对于同一个场点，在 $\Sigma$ 系中观察到的 $\boldsymbol{E}_{//}$ 分量实际上被“压缩”了；对同一个场点任何时刻都有 $\boldsymbol{E}_{//}<\boldsymbol{E}'_{//}$. 而变换式 $\boldsymbol{E}_{//}=\boldsymbol{E}'_{//}$ 则是描写在两个参考系中，当 $x=x',r=r'$，即不同场点上 $\boldsymbol{E}$ 的平行分量相等.

**题目 3.** 有一沿 $z$ 轴方向螺旋进动的静磁场 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_0}(\cos k_m z \boldsymbol{e_x} + \sin k_m z \boldsymbol{e_y})$，其中 $k_m = \dfrac{2\pi}{\lambda_m}$，$\lambda_m$ 为磁场周期长度. 现有一沿 $z$ 轴以速度 $v = \beta c$ 运动的惯性系，求在该惯性系中观察到的电磁场, 证明当 $\beta \simeq 1$ 时该电磁场类似于一列频率为 $\gamma c k_m$ 的圆偏振电磁波.

**解答.** 在 $\Sigma$ 系中 $\boldsymbol{B}_{//} = 0$，且 $\boldsymbol{E} = 0$，故在运动参考系 $\Sigma'$ 中观察到的电磁场为

$$\boldsymbol{E}'_{//} = \boldsymbol{E}_{//} = 0, \boldsymbol{B}'_{//} = \boldsymbol{B}_{//} = 0,$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_{\perp} = \gamma\beta c B_0(\cos k_m z \boldsymbol{e_y} - \sin k_m z \boldsymbol{e_x}),$$

$$\boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma \boldsymbol{B}_{\perp} = \gamma B_0(\cos k_m z \boldsymbol{e_x} + \sin k_m z \boldsymbol{e_y}),$$

由 $k_m = \dfrac{2\pi}{\lambda_m}$，有 $k'_m = \gamma k_m$，而 $z' = \dfrac{z}{\gamma}$，因此 $k_m z = k'_m z'$. 将这个电磁场写成复数形式

$$\boldsymbol{E}' = \gamma\beta c B_0(\boldsymbol{e_y} + i\boldsymbol{e_x})e^{ik'_m z'}, \boldsymbol{B}'_{\perp} = -\frac{k'_m \boldsymbol{e_z}}{\omega'} \times \boldsymbol{E}'_{\perp},$$

其中 $\omega' = \gamma\beta c k_m = \beta c k'_m$. 可见当 $\beta \simeq 1$，即 $\Sigma'$ 系的速度 $v \simeq c$ 时，电磁场类似于一列频率为 $\omega' \simeq \gamma c k_m = c k'_m$，沿着负 $z$ 轴方向传播的圆偏振波.

**题目 4.** 有一无限长均匀带电直线，在其静止参考系中线电荷密度为 $\lambda$. 该线电荷以速度 $v = \beta c$ 沿自身长度匀速移动. 在与直线相距为 $d$ 的地方有一以同样速度平行于直线运动的点电荷 $e$. 分别用下列两种方法求出作用在电荷上的力：

(a) 在直线静止系中确定力，然后用四维力变换公式；

(b) 直接计算线电荷和线电流作用在运动电荷上的电磁力.

**解答.** 设带电直线沿 $\Sigma$ 系的 $x$ 轴运动. 在该系统静止的 $\Sigma'$ 系中，带电线的电磁场为

$$\boldsymbol{E}'_{//} = 0, \boldsymbol{E}'_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{B}' = 0,$$

故电荷受到的作用力为

$$\boldsymbol{F}^{'} = e\boldsymbol{E}^{'} = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0 d}\boldsymbol{e_r},$$

由于 $\Sigma^{'}$ 系中电荷速度 $\boldsymbol{v}^{'} = 0$，故四维力为

$$K_\mu^{'} = (\boldsymbol{K}, \frac{i}{c}\boldsymbol{K}^{'} \cdot \boldsymbol{v}^{'}) = (0, 0, \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0 d}, 0),$$

即 $\boldsymbol{K}^{'} = \boldsymbol{F}^{'}$. 而在 $\Sigma$ 系中 $\boldsymbol{K} = \gamma\boldsymbol{F}$，其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，由四维力变换 $K_\mu = a_{\nu\mu}K_\nu^{'}$，得 $\Sigma$ 系中电荷受到的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}^{'}}{\gamma} = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0\gamma d}\boldsymbol{e_r},$$

若直接在 $\Sigma$ 系观察，则带电线的电磁场为

$$\boldsymbol{E}_{//} = \boldsymbol{E}_{//}^{'} = 0, \boldsymbol{B}_{//} = \boldsymbol{B}_{//}^{'} = 0,$$

$$\boldsymbol{E}_\perp = \gamma\boldsymbol{E}_\perp^{'}, \boldsymbol{B}_\perp = \gamma\frac{v}{c^2}\boldsymbol{E}_\perp^{'},$$

故电荷受到的作用力为

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = e\gamma[\boldsymbol{E}_\perp^{'} - (\frac{v}{c})^2\boldsymbol{E}_\perp^{'}] = \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0\gamma d}\boldsymbol{e_r}.$$

**题目 5.** 质量为 $M$ 的静止粒子衰变为两个粒子 $m_1$ 和 $m_2$，求粒子 $m_1$ 的动量和能量.

**解答.** 设衰变后产生的两个粒子动量为 $\boldsymbol{p_1}$ 和 $\boldsymbol{p_2}$，则两粒子的能量为

$$E_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4}, E_2 = \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4},$$

由衰变前后系统的能量和动量守恒

$$Mc^2 = E_1 + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4},$$

$$0 = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}, \text{即} \boldsymbol{p_1} = -\boldsymbol{p_2},$$

解出

$$E_1 = \frac{c^2}{2M}(M^2 + m_1^2 - m_2^2),$$
$$p_1 = \frac{c}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}.$$

**题目 6.** 已知某一粒子 $m$ 衰变成质量为 $m_1$ 和 $m_2$，动量为 $p_1$ 和 $p_2$(两者方向间的夹角为 $\theta$) 的两个粒子. 求该粒子的质量 $m$.

**解答.** 设衰变前粒子的动量为 $\boldsymbol{p}$，由衰变前后能量和动量守恒

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4},$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}, \text{即} p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta,$$

解出

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^2}[\sqrt{(m_1^2c^2 + p_1^2)(m_2^2c^2 + p_2^2)} - p_1p_2\cos\theta].$$