第十四次作业答案

罗曾宇

题目 1. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l_0，$S-R$ 装置浸在均匀无限的液体介质 (静止折射率 n) 中. 试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器接到讯号所经历的时间.

(1) 液体介质相对于 $S-R$ 装置静止；

(2) 液体沿着 $S-R$ 连线方向以速度 v 流动；

(3) 液体垂直于 $S-R$ 连线方向以速度 v 流动.

解答. 设 $S-R$ 装置静止的参考系为 Σ，$S-R$ 连线在 x 轴上.

(1) 当液体相对于这装置静止时，光速为 $u_x=\dfrac{c}{n}$，讯号传播时间为

$$\triangle t=\frac{l_0}{u_x}=n\frac{l_0}{c}.$$

(2) 当液体沿着 $S-R$ 连线方向流动时，在液体静止的参考系 Σ' 中光速 $u_x'=\dfrac{c}{n}$，故在 Σ 系中光速及讯号传播时间分别是

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\dfrac{vu_x'}{c^2}}=\frac{c(c+nv)}{nc+v},$$

$$\triangle t=\frac{l_0}{u_x}=\frac{l_0(nc+v)}{c(c+nv)}.$$

(3) 当液体介质沿 Σ 系的 y 轴正方向流动时，在液体静止的 Σ' 系中，$S-R$ 装置的运动速度为 $u_y'=-v$，光速 $u'=\dfrac{c}{n}$，故在 Σ' 系中光从 S 至

R 的传播速度和时间分别是

$$u_x^{'} = \sqrt{u'^2 - v^2},$$

$$\triangle t^{'} = \frac{l_0}{u_x^{'}} = \frac{nl_0}{\sqrt{c^2 - (nv)^2}},$$

变换到 $S - R$ 静止的 Σ 系中，便有

$$\triangle t = \triangle t^{'} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = \frac{nl_0 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{\sqrt{c^2 - (nv)^2}}$$

题目 2. 在坐标系 Σ 中，有两个物体都以速度 u 沿 x 轴运动，在 Σ 系看来，它们一直保持距离 l 不变. 今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到这两个物体的距离是多少？

解答. 在两物体静止的参考系 Σ'' 中，两者距离为

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} = \frac{cl}{\sqrt{c^2 - u^2}},$$

设观察者所在参考系为 Σ'，他测得这两个物体的速度为

$$u_x^{'} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{c^2(u - v)}{c^2 - uv},$$

故观察者测得这两个物体的距离为

$$l^{'} = l_0 \sqrt{1 - (\frac{u_x^{'}}{c})^2} = \frac{cl\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - uv}.$$

题目 3. 一把直尺相对于 Σ 坐标系静止，直尺与 x 轴交角 θ. 今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到直尺与 x 轴交角 $\theta^{'}$ 有何变化？

解答. 在尺子静止的参考系 Σ 中，有 $\tan\theta = \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$. 而在运动的观察者看来，尺子的长度在 x 和 y 两个方向的投影为

$$\triangle x^{'} = \triangle x\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = \frac{\triangle x}{\gamma}, \triangle y^{'} = \triangle y,$$

因此有

$$\tan\theta^{'} = \frac{\triangle y^{'}}{\triangle x^{'}} = \gamma\tan\theta.$$

可以画个草图看看几何关系.

题目 4. 两个惯性系 Σ 和 $\Sigma^{'}$ 中各放置若干时钟，同一惯性系中的诸时钟同步.$\Sigma^{'}$ 相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴方向运动. 设两系原点相遇时，$t_0 = t_0^{'} = 0$. 问处于 Σ 系中某点 (x, y, z) 处的时钟与 $\Sigma^{'}$ 系中何处的时钟相遇时，指示的时刻相同？读数是多少？

解答. 由洛伦兹变换

$$x^{'} = \gamma(x - vt), y^{'} = y, z^{'} = z, t^{'} = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x),$$

当 $\Sigma^{'}$ 系位于 $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ 的钟与 Σ 系位于 (x, y, z) 的钟相遇，而且两钟指示的时刻相同，即 $t^{'} = t$ 时，即有

$$x = \frac{c^2}{v}t(1 - \frac{1}{\gamma}),$$

进而可以得到

$$x^{'} = -x, t^{'} = t = \frac{x}{v}(1 + \frac{1}{\gamma}).$$

题目 5. 火箭由静止状态加速到 $v = \sqrt{0.9999}c$. 设瞬时惯性系上加速度为 $|\dot{\boldsymbol{v}}| = 20m\cdot s^{-2}$，问按照静止系的时钟和按火箭内的时钟加速火箭各需多少时间？

解答. 设火箭加速方向沿静止系 Σ 的 x 轴正向，速度为

$$v = u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}},$$

在瞬时惯性系 Σ' 中，$u_x' = 0$，$a_x' = \frac{\mathrm{d}u_x'}{\mathrm{d}t'} = 20m \cdot s^{-2}$，而 $\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}$，故在 Σ 系中火箭的加速度为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma}a_x'(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 20(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}},$$

即有

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\frac{\mathrm{d}v}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}},$$

故在 Σ 系中火箭从 $v = 0$ 加速到 $v = \sqrt{0.9999}c$ 所需时间为

$$t = \frac{1}{20}\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{(1 - \frac{m^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} = 5\sqrt{0.9999}c(\text{秒}) = 47.53(\text{年}),$$

这个积分并不困难，利用三角函数换元即可, 令 $m = c\sin\theta$，不定积分的原函数是 $c\tan\theta$.

而在火箭内的参考系 Σ' 中

$$\mathrm{d}t' = \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

故同样的加速过程，火箭内的时钟记录的时间为

$$t' = \frac{1}{20}\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{1 - \frac{m^2}{c^2}} = \frac{c}{40}\ln\frac{1 + \sqrt{0.9999}}{1 - \sqrt{0.9999}} = 2.52(\text{年}).$$

$\int_0^v \frac{\mathrm{d}m}{1 - \frac{m^2}{c^2}} = \frac{1}{2}\int_0^v (\frac{1}{1 + \frac{m}{c}} + \frac{1}{1 - \frac{m}{c}})\mathrm{d}m = \frac{c}{2}\ln\frac{c + v}{c - v}.$

题目 6. 一平面镜以速度 v 自左向右运动. 一束频率为 ω_0，与水平成 θ_0 夹角的平面光波自右向左入射到镜面上，求反射光波的频率 ω 及反射角 θ. 垂直入射情况如何？

解答. 这是光在运动镜面上的反射问题. 令镜子沿 Σ 系的 x 轴正向运动，镜面垂直于运动方向. 设镜子静止的参考系 Σ' 中，入射波频率为 ω'，入射角为 θ_i'，由反射定律有 $\theta_r' = \theta_i'$，故入射波矢 $\boldsymbol{k_i'}$ 和反射波矢 $\boldsymbol{k_r'}$ 的 x 分量分别为

$$k_{ix}' = -\frac{\omega'}{c}\cos\theta_i', k_{rx}' = \frac{\omega'}{c}\cos\theta_i',$$

在 Σ 系中，观测到入射波频率为 ω_0，入射角为 θ_0，设反射波频率为 ω，反射角为 θ，即入射波矢 $\boldsymbol{k_i}$ 和反射波矢 $\boldsymbol{k_r}$ 的 x 分量分别为

$$k_{ix} = -\frac{\omega_0}{c}\cos\theta_0, k_{rx} = \frac{\omega}{c}\cos\theta,$$

从 Σ 系到 Σ' 系，入射波的四维波矢变换为

$$k_{ix}' = \gamma(k_{ix} - \frac{v}{c^2}\omega_0), k_{iy}' = k_{iy}, \omega' = \gamma(\omega_0 - vk_{ix}),$$

从 Σ' 系到 Σ 系，反射波的四维波矢变换为

$$k_{rx} = \gamma(k_{rx}' + \frac{v}{c^2}\omega'), k_{ry} = k_{ry}', \omega = \gamma(\omega' + vk_{rx}'),$$

由此可得

$$k_{rx}' = -k_{ix}', \omega = \gamma(\omega' - vk_{ix}') = \gamma^2\omega_0(1 + \beta^2 + 2\beta\cos\theta_0),$$

其中 $\beta = \dfrac{v}{c}$，因为 $0 < \cos\theta_0 \le 1$，可知总有 $\omega > \omega_0$，仅当 $v << c$，才有 $\omega \simeq \omega_0$, 进而有

$$\cos\theta = \frac{2\beta + (1+\beta^2)\cos\theta_0}{1 + \beta^2 + 2\beta\cos\theta_0},$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta_0}{\gamma^2[2\beta + (1+\beta^2)\cos\theta_0]},$$

可见一般情况下，反射角 $\theta \neq \theta_0$，即静止条件下的反射定律对于运动物体不成立. 仅当 $v << c$，才有 $\theta \simeq \theta_0$. 当入射角 $\theta_0 = 0$ 即垂直入射情形，有

$$\omega = \frac{c+v}{c-v}\omega_0, \theta = 0.$$

题目 7. 在洛伦兹变换中，若定义快度 y 为 $\tanh y = \beta$，

(1) 证明洛伦兹变换矩阵可写为

$$a = \begin{pmatrix} \cosh y & 0 & 0 & i\sinh y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\sinh y & 0 & 0 & \cosh y \end{pmatrix},$$

(2) 对应的速度合成公式

$$\beta = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''},$$

可用快度表为 $y = y' + y''$.

解答. 由双曲函数的定义

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{\operatorname{csch} y},$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{1}{\operatorname{sech} y},$$

以及 $\tanh y = \dfrac{\sinh y}{\cosh y}$，若定义快度 y 为 $\tanh y = \beta = \dfrac{v}{c}$，便有

$$\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma,$$

$$\sinh y = \cosh y \tanh y = \beta\gamma,$$

于是，当 Σ' 以速度 v 沿 Σ 的 x 轴运动且相应的坐标轴平行时，洛伦兹变换矩阵

$$a = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

在 Σ 系与 Σ' 系中速度的 x 分量分别为 u_x 和 u_x'，令 $\tanh y = \beta = \frac{u_x}{c}, \tanh y' = \beta' = \frac{u_x'}{c}, \tanh y'' = \beta'' = \frac{v}{c}$, 则速度变换

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}},$$

即

$$\beta = \frac{u_x}{c} = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''},$$

可写成

$$\tanh y = \frac{\tanh y' + \tanh y''}{1 + \tanh y' \tanh y''} = \tanh\left(y' + y''\right),$$

即 $y = y' + y''$.

题目 8. 电偶极子 $\boldsymbol{p_0}$ 以速度 v 作匀速运动，求它产生的电磁势和场 $\varphi, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$.

解答. 在 $\boldsymbol{p_0}$ 静止的参考系 Σ' 中，仅观察到它的标势 φ'，或电场 $\boldsymbol{E}'$:

$$\varphi' = \frac{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{R}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}\ \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\frac{3(\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{R}')\boldsymbol{R}'}{R'^5} - \frac{\boldsymbol{p_0}}{R'^3}], \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{0},$$

其中，R' 和 $\boldsymbol{R}'$ 分别是从 $\boldsymbol{p_0}$ 到场点的距离与矢径：

$$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \boldsymbol{R}' = x'\boldsymbol{e_x} + y'\boldsymbol{e_y} + z'\boldsymbol{e_z},$$

令 $\boldsymbol{p_0}$ 沿 Σ 系的 x 轴运动，由四维势变换 $A_\mu = a_{\nu\mu}A'_\nu$，得 Σ 系中的电磁势为

$$A_{//} = \gamma(A'_{//} + \frac{v}{c^2}\varphi') = \gamma\frac{v}{c^2}\varphi', A_\perp = 0,$$

$$\varphi = \gamma(\varphi' + vA'_{//}) = \gamma\varphi',$$

又由电磁场量的变换 $F_{\lambda\tau} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F'_{\mu\nu}$，即

$$\boldsymbol{E}_{//} = \boldsymbol{E}'_{//}, \boldsymbol{B}_{//} = \boldsymbol{B}'_{//},$$

$$\boldsymbol{E}_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}')_{\perp}, \boldsymbol{B}_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{B}' + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}')_{\perp},$$

则在 Σ 系观察到的电磁场为

$$\boldsymbol{E}_{//} = \boldsymbol{E}'_{//}, \boldsymbol{B}_{//} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{E}_{\perp} = \gamma \boldsymbol{E}'_{\perp}, \boldsymbol{B}_{\perp} = \gamma(\frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E}')_{\perp},$$

设 $t = 0$ 时 $\boldsymbol{p_0}$ 刚好经过 Σ 系的原点，此时场点坐标的变换为 $x' = \gamma x, y' = y, z' = z$，因此在利用上面的式子计算动系的场时，其中的 R' 和 $\boldsymbol{R}'$ 应当换成

$$R' = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}, \boldsymbol{R}' = \gamma x \boldsymbol{e_x} + y \boldsymbol{e_y} + z \boldsymbol{e_z}.$$