2024 秋 代数拓扑 期末考试

授课老师：俞建青

在本试卷中 R 为含幺交换环。

1. (15 points)
   (1.1) 写出单纯复形的定义。
   (1.2) 对于单纯复形，K, L 和连续映射
   $$f : |K| \to |L|$$
   写出 f 存在单纯逼近的条件。
   (1.3) 定义单纯复形 K 为
   $$K = \{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{0\}$$
   求 K 的单纯同调 $\mathrm{H}_p(K; R)$，$p \in \mathbb{Z}$。
2. (25 points)
   (2.1) 对于连续映射 $f, g : S^n \to S^n$，若对任意 $x \in S^n$, 都有 $f(x) \neq g(x)$。求证: $f(x)$ 与 $-g(x)$ 同伦。
   (2.2) 证明：任何连续映射 $\mathbb{RP}^{2k} \to \mathbb{RP}^{2k}$ 都有不动点。
   (2.3) 构造一个没有不动点的连续映射 $\mathbb{RP}^{2k+1} \to \mathbb{RP}^{2k+1}$。
   (2.4) 构造 CW 复形 $X = D^{2025} \bigcup_g S^{2024}$，其中粘贴映射
   $$g : S^{2024} \to S^{2024}$$
   满足 $\deg g = m$。求 $\mathrm{H}_p(X; R)$，$p \in \mathbb{Z}$。
   (2.5) 对于任何连续映射 $h : S^{2024} \times S^{2024} \to \mathbb{CP}^{2024}$，求证 $\deg h = 0$。
3. (20 points)
   (3.1) 若 $X_1 \subseteq X$ 是 X 的收缩，证明：边缘映射
   $$\partial_* : \mathrm{H}_p(X, X_1; R) \to \mathrm{H}_{p-1}(X_1; R)$$
   满足 $\partial_* = 0$ 且复形
   $$0 \to \mathrm{H}_p(X_1; R) \to \mathrm{H}_p(X; R) \to \mathrm{H}_p(X, X_1; R) \to 0$$
   是正合和可裂的。
   (3.2) M 是紧流形，证明 M 不能收缩到 ∂M。
4. (20 points)
   (4.1) 对于拓扑空间 X，若任何 X 的道路连通分支都不是紧的，证明：
   $$\mathrm{H}^0_c(X; R) = 0$$

(4.2) U_i 是满足 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_n \subseteq \cdots$ 的 X 中开集，证明：

$$\varinjlim_i \mathrm{H}_c^p(U_i;R) = \mathrm{H}_c^p(\bigcup_i U_i;R)$$

5. (20 points) M 是紧致 R-定向的 n-维带边流形，边界为 ∂M。设 $\operatorname{Int} M = M - \partial M$。记 $\mu_M \in \mathrm{H}_n(M,\partial M;R)$ 为定向类。

(5.1) 求证：利用 $\operatorname{Int} M$ 上的 Poincaré duality 证明如下的同构：

$$\mathrm{H}^p(M,\partial M;R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-p}(M;R) : x \mapsto x \cap \mu_M$$

(5.2) 证明 Lefschetz Duality：

$$\mathrm{H}^p(M;R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{n-p}(M,\partial M;R) : x \mapsto x \cap \mu_M$$

(5.3) 若 M 是可缩的，且 R 是 PID，证明：

$$\mathrm{H}^p(\partial M;R) = \begin{cases} R & p = 1, n-1 \\ 0 & p \neq 0 \text{ 或} n-1 \end{cases}$$