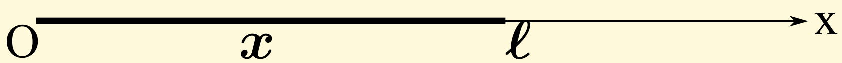
第 12 章 Fourier 分析

一维杆状物体的热流问题 即在一个长度为 l 的长杆上, 两端保持零度, 初始的温度分布为 $f(x)$, 随着时间的演化, k 是比热系数, 求 t 时刻的温度分布 $T(x,t)$.



该问题的数学模型为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial T}{\partial t}, \quad T = T(x,t) & & (1)\\
T(0,t) = T(\ell,t) = 0, \quad (t > 0) & \text{（边界条件）} & (2)\\
T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell & \text{（初始条件）} & (3)
\end{cases}
$$

分离变量法 设时间变量与位置变量是分离的:

$$T(x,t)=\varphi(x)\psi(t).$$

将此代入 (1) 式 得到

$$\varphi''(x)\psi(t)=k^2\varphi(x)\psi'(t)$$

即

$$\frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}. \tag{4}$$

因为 x 与 t 是独立的变量, 所以 (4) 式表明

$$\frac{\varphi''(x)}{k^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=-\lambda,$$

其中 λ 是常数, 根据温度变化的特点, 有 $\lambda>0$. 因此

$$\varphi''(x)+\lambda k^2\varphi(x)=0, \tag{5}$$

$$\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. \tag{6}$$

当 $k=1$ 时, (5) 式的通解为

$$\varphi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}x+c).$$

由边界条件 (2) 知 $c=0$, $\sqrt{\lambda}\ell=n\pi$, $(n=1,2,\cdots)$

$$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2. \tag{7}$$

将 (7) 代入 (6) 式, 得到

$$\psi_n(t)=\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t\right).$$

因此, 方程 (5), (6) 有一组解:

$$\varphi_n(x)=b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad \psi_n(t)=\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t\right).$$

所以

$$T_n(x,t)=b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\ n=1,2\cdots$$

是一列满足 (1), (2) 的解.

因为方程 (1) 是线性的, 所以 (1) 的通解为

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{8}$$

再根据初始条件 (3), 应有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x. \tag{9}$$

因此, 只要存在一列常数 $\{b_n\}$ 使得 (9) 成立, 则 (8) 就是所求问题的解.

问题 函数 $f(x)$ 是否一定可以表示为 (9) 式右端的级数? 如果可以有这样的表示, 那么怎样求系数 b_n ?

§12.1 函数的 Fourier 级数

12.1.1 周期函数与三角函数的正交性

周期函数 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 且存在 $T>0$ 使得

$$f(x+T)=f(x),\quad \forall\, x\in(-\infty,+\infty),$$

则称 $f(x)$ 是一个周期函数, T 是 $f(x)$ 的一个周期.

1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 nT $(n\in\mathbb{Z})$ 也是.

2) 若 $f(x)$ 在有限区间上可积, T 是它的周期, 则

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx.$$

3) 若 $f(x)$ 在 $(-\ell,\ell)$ 上有定义, 则

$$F(x)=\begin{cases} f(x-2n\ell), & (2n-1)\ell<x<(2n+1)\ell \\ \frac{f(\ell)+f(-\ell)}{2}, & x=(2n+1)\ell, \end{cases}$$

$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2ℓ 为周期的函数.

4) 若 $f(x)$ 在 $[0,\ell)$ 上有定义, 则

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\ell] \\ f(-x), & x\in[-\ell,0] \end{cases}$$

是 $(-\ell,\ell)$ 上偶函数, 按 3) 中的方法可以将它延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上, 成为以 2ℓ 为周期的偶函数.

5) 若 $f(x)$ 在 $(0,\ell)$ 上有定义, 则

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\ell) \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\ell,0) \end{cases}$$

是 $(-\ell,\ell)$ 上奇函数, 按 3) 中的方法可以将它延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上, 成为以 2ℓ 为周期的奇函数.

6) **三角函数的正交性**: 设 $\mathrm{C}[-\pi,\pi]$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数全体. 对于 $f,g\in\mathrm{C}[-\pi,\pi]$, 定义

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx, \tag{10}$$

则 $\langle f,g\rangle$ 是 $\mathrm{C}[-\pi,\pi]$ 上一个内积: 即

1° $\langle f,f\rangle\geqslant 0$, 且 $\langle f,f\rangle=0\iff f=0$ 正性

2° $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$ 对称性

3° $\langle c_1f_1+c_2f_2,g\rangle=c_1\langle f_1,g\rangle+c_2\langle f_2,g\rangle$ 线性

注, 在 Riemann 可积函数空间 $\mathrm{R}[-\pi,\pi]$ 中同样可以按此方式定义内积, 但 $\langle f,f\rangle=0\iff f\overset{a.e.}{=}0$.

若 $\langle f,g\rangle=0$, 则称 f 与 g 是正交的.

按照上面定义的内积, 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

是正交函数系, 即其中任意两个不同的函数是正交的. 事实上, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \delta_{mn}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \delta_{mn}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0, \tag{13}$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

12.1.2 周期函数的 Fourier 级数

若函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可以展开成三角级数, 即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{14}$$

则根据级数理论及三角函数的正交性, 有

$$\begin{aligned}\langle f(x),\cos kx\rangle &= \frac{a_0}{2}\langle 1,\cos kx\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\langle\cos nx,\cos kx\rangle+b_n\langle\sin nx,\cos kx\rangle\right)\\ &= a_k,\quad k=0,1,\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f(x),\sin kx\rangle &= \frac{a_0}{2}\langle 1,\sin kx\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\langle\cos nx,\sin kx\rangle+b_n\langle\sin nx,\sin kx\rangle\right)\\ &= b_k,\quad k=1,2,\cdots\end{aligned}$$

因此有

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ \ k = 0, 1, \cdots\ , \tag{15}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ \ k = 1, 2, \cdots\ , \tag{16}$$

定义 1 设 $f(x) \in \mathrm{R}[-\pi, \pi]$. 称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big), \tag{17}$$

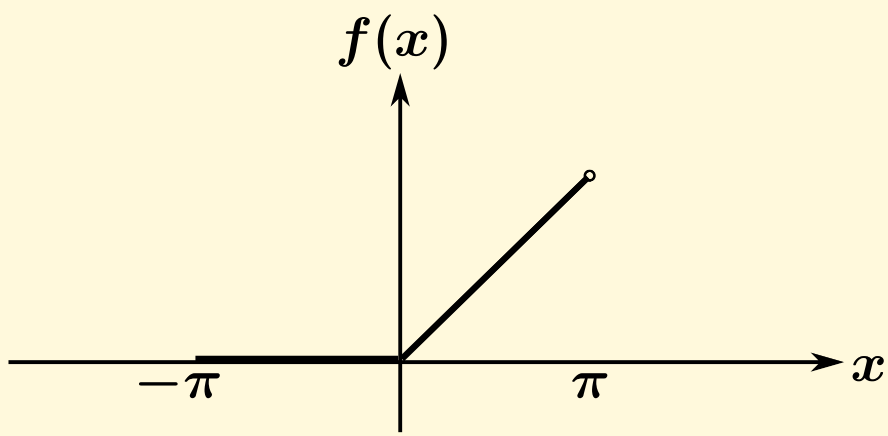
为 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 其中 a_n, b_n 由 (15), (16) 表示, 称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数. 当 $f(x)$ 的 Fourier 级数由 (17) 式表示时, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big).$$

例 1 **求周期为 2π 的函数**

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \leqslant x<0 \\ x, & 0 \leqslant x<\pi\end{cases}$$

的 Fourier **级数**.



解 首先计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

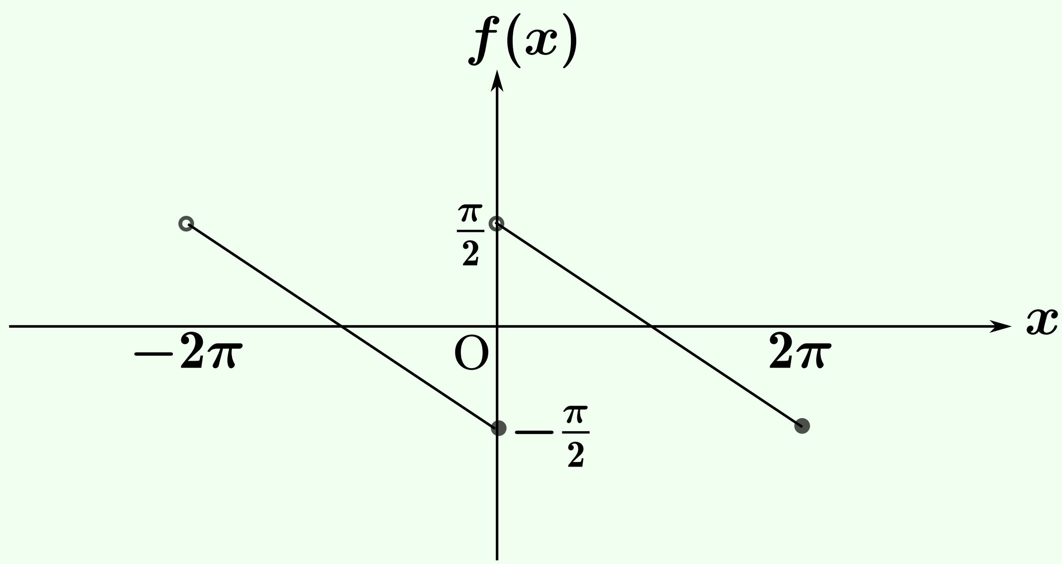
所以有

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

例 2 求周期为 2π 的锯齿函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x\leqslant 2\pi\\ f(x-2n\pi), & 2n\pi<x\leqslant 2(n+1)\pi, n \text{ 是整数}\end{cases}$$

的 Fourier 级数.



解 直接计算, 有

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\cos nx\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

所以有

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$