

2023 ~ 2024 学年数分B1期末考试参考答案

一、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 36 分)

(1) 求不定积分 $\int |x| dx$.

解: 原式 =
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \end{cases} + C.$$

(2) 求不定积分 $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$.

解: 由 $\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$, 原式 = $-2 \ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \ln|x-1| + C$.

(3) 求定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 + x^3}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$.

解: 原式 = $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2(1 - \sqrt{1-x^2})}{1 - (1-x^2)} dx = 2 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 2 - \frac{\pi}{2}$.

(4) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{4n} \sec^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$.

解: 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

(5) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

解: 原式 = $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{2}$.

(6) 求 $(1+x^2) \ln(1+x^2)$ 的 Maclaurin 级数, 并求其收敛半径.

解: 原式 = $(1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2(n+1)} = x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} x^{2n}$. (4分)

收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/(n-1)n}} = 1$. (6分)

二、(10 分) 求常微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 的通解.

解: 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. 故齐次方程的通解为 $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. (4分)

根据非齐次项特点, 可设原方程有特解 $y^* = x \cdot (ce^x)$. 代入得:

$ce^x(x+2-3(x+1)+2x) = e^x \Rightarrow c = -1 \Rightarrow y^* = -xe^x$. (8分)

故所求通解为 $y = y_h + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x, c_1, c_2$ 为任意常数. (10分)

三、(12分) 已知曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($0 \leq x \leq 1$).

(1) 求曲线的长度;

(2) 求由给定曲线和直线 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ 围成的平面图形绕X轴旋转一周所得立体的体积.

$$\text{解: (1) } s = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

$$(2) V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{2 + e^{2x} + e^{-2x}}{4}\right) dx = \frac{\pi}{8} (4 + e^2 - e^{-2}).$$

注: 每问6分, 每个公式给2分.

四、(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$ 的收敛域与和函数.

解: 收敛半径为 $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{2n-1}} = 1$, 收敛域为 $[-1, 1)$. (2分) 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.
 $x \in [0, 1)$ 时, 令 $x = t^2$ ($t \geq 0$), 则

$$S(t^2) = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \Rightarrow \left(\frac{S(t^2)}{t}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-2} = \frac{1}{1-t^2}.$$

$$\text{由 } S'(t^2)|_{t=0} = 0 \text{ 可得: } S(t^2) = t \int_0^t \frac{1}{1-u^2} du = \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \Rightarrow S(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$$

(6分)

$x \in [-1, 0)$ 时, 令 $x = -t^2$ ($t > 0$), 则

$$S(-t^2) = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} t^{2n-1} \Rightarrow \left(\frac{S(-t^2)}{t}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{2n-2} = -\frac{1}{1+t^2}.$$

$$\text{由 } S'(t^2)|_{t=0} = 0 \text{ 可得: } S(-t^2) = -t \arctan t \Rightarrow S(x) = -\sqrt{-x} \arctan \sqrt{-x}.$$

$$\text{综合得, 和函数为 } S(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, & x \in [0, 1) \\ -\sqrt{-x} \arctan \sqrt{-x}, & x \in [-1, 0) \end{cases}. \quad (10\text{分})$$

五、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导函数连续, $f(0) = f(1) = 0$. 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq 4 \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

证明: 设 $|f(x)|$ 的最大值点为 x_0 , 不妨设 $x_0 \neq 0, 1$ (否则 $f(x) \equiv 0$, 结论显然成立).

由Lagrange中值定理, $\exists \xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 1)$, s.t.

$$\begin{cases} f(x_0) - f(0) = f'(\xi_1) x_0 \\ f(1) - f(x_0) = f'(\xi_2) (1 - x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)}{x_0} \\ f'(\xi_2) = \frac{-f(x_0)}{1-x_0} \end{cases} \quad (3\text{分})$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_0^1 |f''(x)| dx &\geq \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)| dx \geq \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx \right| = |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)| \\ &= \left| \frac{f(x_0)}{x_0} + \frac{f(x_0)}{1-x_0} \right| = \frac{|f(x_0)|}{x_0(1-x_0)} \geq 4 |f(x_0)| = 4 \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|. \quad (8\text{分}) \end{aligned}$$

六、(14分) 设 $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} (n \geq 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$;

(2) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p \geq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 和.

证明: (1) 显然 u_n 单调递减且有下界 0, 故 $\{u_n\}$ 收敛. (2分)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. 当 } n > N \text{ 时, } \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n} < \varepsilon. \text{ 故当 } n > N \text{ 时,}$

$$0 < u_n = \int_0^\varepsilon \frac{dt}{(1+t^2)^n} + \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} < \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^n} < \varepsilon + \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n} < 2\varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. (5分)

注: 在成功计算极限的情形下, 第一句可以是多余的.

(2) $\{u_n\}$ 单调递减趋于 0, 由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛 (7分); 且当 $n \geq 2$ 时,

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} \geq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1} (1-2^{1-n}) \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 综合得, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 条件收敛. (10分)

(3) 由比较判别法知, 只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛. (11分)

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \frac{t}{(1+t^2)^n} \Big|_0^1 - \int_0^1 t \cdot (-n) \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{1}{2^n} + 2n \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n(u_n - u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) u_n + \frac{1}{2n \cdot 2^n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n}{2n} + \frac{1}{2n \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_1 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}.$$

$$\text{令 } n \rightarrow \infty, \text{ 并由 } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln 2 \text{ 得 } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k} = 2u_1 + \ln 2 = \frac{\pi}{2} + \ln 2. \quad (14分)$$

七、(10分)证明: (1) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$ 在 $(0, 1]$ 上一致收敛.

$$(2) \int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

证明: (1) $\max_{x \in (0, 1]} |x \ln x| = \frac{1}{e}$. 因为 $\left| \frac{(-x \ln x)^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{e^n n!}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n n!}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别

法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x \ln x)^n}{n!}$ 在 $(0, 1]$ 上一致收敛. (4分)

$$(2) \int_0^1 x^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x \ln x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x \ln x)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx.$$

积分与无穷求和可交换次序是因为函数项级数在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性. (7分)

令 $I_{m,n} = \int_0^1 x^m \ln^n x dx$, 则

$$I_{m,n} = \int_0^1 \frac{\ln^n x}{m+1} d(x^{m+1}) = \frac{1}{m+1} \left(x^{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^{m+1} \frac{n \ln^{n-1} x}{x} dx \right) = \frac{-n}{m+1} I_{m,n-1}$$

$$= \frac{-n}{m+1} \cdot \frac{-(n-1)}{m+1} I_{m,n-2} = \dots = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} I_{m,0} = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

故 $\int_0^1 x^n \ln^n x dx = I_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$. 代入得

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}. \quad (10分)$$