中国科学技术大学数学科学学院

2019 ～ 2020 学年第 1 学期期中考试答案

一、计算下列极限或导数(每题 7 分，共 35分)

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^3(1+x)}{1-\cos\left(\sqrt{x-\sin x}\right)}$.

解：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^3(1+x)}{1-\cos\left(\sqrt{x-\sin x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(x-\sin x)/2}\cdots\cdots 3\text{分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-(x-x^3/6+o(x^3))}=12\cdots\cdots 4\text{分}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

解：

$$\frac{n^2}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n^2}{n^2+1}\cdots\cdots 2\text{分}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\cdots\cdots 4\text{分}$$

由夹逼原理 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=1$。$\cdots\cdots$1分

3.$y=\dfrac{6x^2}{3x-1}$,计算$y^{(n)}$.

解：$y=(2x+\dfrac{2}{3})+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3x-1}\cdots\cdots$1分

$y'=2-\dfrac{2}{(3x-1)^2}\cdots\cdots$2分

$y^{(n)}=\dfrac{2(-1)^n3^{n-1}n!}{(3x-1)^{n+1}}\cdots\cdots$4分

4.已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-xf(x)}{x^2}=1$, 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-f(x)}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-xf(x)+2x-\ln(1+2x)}{x^2}$(3分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\dfrac{2}{1+2x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(1+2x)}=2\cdots(3\text{分})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-xf(x)}{x^2}=3\cdots(1\text{分})$$

5.$f(x)$在点$x=a$二阶可导，计算

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right).$$

解：

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f'(a)(x-a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)(f(x)-f(a))}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o((x-a)^2)-f(a)-f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)(f(x)-f(a))}\cdots\cdots(3分)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f''(a)}{2}+o(1)}{f'(a)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{f''(a)}{2(f'(a))^2}\cdots\cdots(4分)$$

二、(本题 8分)设$x=t+\arctan t,\ y=\sin t$, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(1+t^2)\cos t}{2+t^2}\cdots\cdots(4分)$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{[2t\cos t-(1+t^2)\sin t](2+t^2)-2t(1+t^2)\cos t}{(2+t^2)^2}=\frac{2t\cos t-(1+t^2)(2+t^2)\sin t}{(2+t^2)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{[2t\cos t-(1+t^2)(2+t^2)\sin t](1+t^2)}{(2+t^2)^3}\cdots\cdots(4分)$$

三、(本题 10 分)证明：$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

解：令$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$,

$f'(x)=2x\ln x+\dfrac{(^2}{x}-1)-2(x-1)=2x\ln x-\dfrac{(x-1)^2}{x}=\dfrac{2x^2\ln x-(x-1)^2}{x},\cdots\cdots(2分)$

当$0<x<1$时，$f'(x)<0,\ f'(1)=0.\cdots\cdots(2分)$

当$x>1$时, 令$g(x)=2x^2\ln x-(x-1)^2, g'(x)=4x\ln x+2>0$, 所以$g(x)>g(1)=0$,即$f'(x)>0,\cdots\cdots(4分)$

可以得出函数$f(x)$在$x=1$左减右增，$x=1$是最小值点，所以$f(x)\geqslant f(0)=0$. $\cdots\cdots(2分)$

四、(本题 10 分)设$f(x)$在$[0,1]$可导，$x\in[0,1]$时， $f(x)>0$, 且$f(0)=1, f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明：存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

证：令$F(x)=x-\dfrac{1}{f(x)}$, 由已知条件$F(0)=-1, F(1)=-1$, $F(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，由Rolle定理，$\exists\xi\in(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$,即 $1+\dfrac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0$, 所以$f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

五、(本题 6分)设函数$f(x)$有二阶导数，且满足$f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=2$, 证明：$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\leqslant -16$.

证：设最大值点为x_0, $f(x_0)=2, f'(x_0)=0$,将$f(x)$在x_0展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2=2+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\cdots\cdots(2分)$$

存在$\xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1)$使得

$$0 = f(0) = 2 + \frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2, \qquad 0 = f(1) = 2 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - x_0)^2 \cdots\cdots (2分)$$

如果$0 < x_0 < 1/2$ 则$f''(\xi_1) = -\dfrac{4}{x_0^2} < -16$,

如果$1/2 \leqslant x_0 < 1$ 则$f''(\xi_2) = -\dfrac{4}{(1 - x_0)^2} \leqslant -16$,

所以$\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f''(x) \leqslant -16 \cdots\cdots (2分)$.

六、单项选择题 (每题 3 分，共 15 分)

1.A 2.C 3.D 4.B 5.D

七、填空题(每题 4 分，共 16分)

1. $\underline{y = 2x + 1}$, 2. $\underline{\dfrac{(x+y)^2}{2 + (x+y)^2}}$ 3. $\underline{\ln 2}$ 4. $\underline{2\ln^2 3}$