§9.7 微分形式

设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域, $f: V \to \mathbb{R}$ 是一个可微函数, 则 f 在点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的微分是

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\mathrm{d}x_2 \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\mathrm{d}x_n,$$

它是 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的线性组合, 系数是相应于各变量的一阶偏导数. 但对于给定的 V 上的函数 $A_1(x), A_2(x), \cdots, A_n(x)$, 线性组合

$$\omega = A_1(x)\mathrm{d}x_1 + A_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + A_n(x)\mathrm{d}x_n \tag{9.1}$$

不一定是某函数的微分. 为了研究函数的微分, 我们要研究形如 (9.1) 的微分形式. 我们把所有形如 (9.1) 的微分形式作为一个整体(空间)来研究, 要看看在这个空间中是否可以定义运算.

类似于线性空间, 首先可以定义数乘和加法运算. 设 $\lambda(x)$ 是 V 上的函数,

$$\omega_1 = A_1(x)\mathrm{d}x_1 + A_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + A_n(x)\mathrm{d}x_n$$
$$\omega_2 = B_1(x)\mathrm{d}x_1 + B_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + B_n(x)\mathrm{d}x_n,$$

定义数乘运算:

$$\lambda(x)\omega_1 = \lambda(x)A_1(x)\mathrm{d}x_1 + \lambda(x)A_2(x)\mathrm{d}x_2 + \cdots + \lambda(x)A_n(x)\mathrm{d}x_n,$$

和加法运算:

$$\omega_1+\omega_2 = (A_1(x)+B_1(x))\mathrm{d}x_1+(A_2(x)+B_2(x))\mathrm{d}x_2+\cdots+(A_n(x)+B_n(x))\mathrm{d}x_n.$$

显然, 按照数乘和加法运算形如 (9.1) 的微分形式全体是一个线性空间.

能不能定义微分形式的乘法呢? 这要看 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 之间能否定义乘积.

9.7.1 微分形式的空间

为了简单起见, 只讨论三维空间的情况, 即 $V \subset \mathbb{R}^3$. 设 $f: V \to \mathbb{R}$ 是一个三元可微函数, 则 f 的微分是

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

为了定义微分形式的乘积, 定义

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0,$$

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

称 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 为 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的外积, 并规定外积满足结合率和分配率. 从上面的定义看外积也满足反对称性.

$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 也被定义好了. 则有

$$(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x = 0.$$

考虑微分形式的运算之后, 微分形式可以分为几类:

零次微分形式:

$$V\text{上可微函数全体}.$$

一次微分形式: 形如

$$A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z,$$

二次微分形式: 形如

$$A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

三次微分形式: 形如

$$D\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

其中 A, B, C, D 是 V 上的可微函数.

各类微分形式都形成线性空间. 不同类的微分形式不定义加法.

9.7.2 微分形式的外积

1° 两个一次微分形式的外积. 设

$$\lambda_1 = A_1\mathrm{d}x + B_1\mathrm{d}y + C_1\mathrm{d}z, \quad \lambda_2 = A_2\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y + C_2\mathrm{d}z,$$

则有

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \wedge \lambda_2 &= (A_1\mathrm{d}x + B_1\mathrm{d}y + C_1\mathrm{d}z) \wedge (A_2\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y + C_2\mathrm{d}z) \\
&= A_1B_2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + A_1C_2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + B_1A_2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + B_1C_2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C_1A_2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C_1B_2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \\
&= (B_1C_2 - C_1B_2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (C_1A_2 - A_1C_2)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + (A_1B_2 - B_1A_2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

2° 三个一次微分形式的外积. 设

$$\lambda_1 = A_1\mathrm{d}x + B_1\mathrm{d}y + C_1\mathrm{d}z, \quad \lambda_2 = A_2\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y + C_2\mathrm{d}z,$$
$$\lambda_3 = A_3\mathrm{d}x + B_3\mathrm{d}y + C_3\mathrm{d}z.$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \wedge \lambda_2 = {} & (B_1C_2 - C_1B_2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (C_1A_2 - A_1C_2)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ & + (A_1B_2 - B_1A_2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 \wedge \lambda_2 \wedge \lambda_3 = {} & \Big(A_3(B_1C_2 - C_1B_2) + B_3(C_1A_2 - A_1C_2) \\ & + C_3(A_1B_2 - B_1A_2)\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ = {} & \Big((A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2) \cdot (A_3, B_3, C_3)\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ = {} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

特别, 当 $u, v, w \in C^1(V)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}v &= \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}w &= \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}w = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

3° 一次微分形式与二次微分形式的外积. 设

$$\lambda = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z, \quad \omega = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

则有

$$\lambda \wedge \omega = (AP + BQ + CR)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

9.7.3 微分形式的外微分

微分形式 ω 的外微分是从 ω 到比 ω 高一次的微分形式的映射:

$$\mathrm{d}: \ \omega \to \mathrm{d}\omega.$$

具体定义如下:

1° 设 f 是零次微分形式, 即, $f \in C^1(V)$, 则

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

2° 设 ω 是一次微分形式,

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z, \quad P, Q, R \in C^1(V),$$

则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

3° 设 ω 是二次微分形式,

$$\omega = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \quad P, Q, R \in C^1(V),$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

4° 设 ω 是三次微分形式,

$$\omega = P\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \quad P \in C^1(V),$$

则

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0.$$

Poincaré 引理

引理 1 (Poincaré 引理) 设 ω 是一个微分形式, 其系数具有二阶连续偏导数, 则有

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

证明 设 $\omega = f$ 是一个零次微分形式, 则

$$\mathrm{d}\omega = f'_x\mathrm{d}x + f'_y\mathrm{d}y + f'_z\mathrm{d}z.$$

所以

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = 0.$$

设 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 是一个一次微分形式, 则

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= 0\end{aligned}$$

若 ω 是一个二次微分形式, 则 $\mathrm{d}\omega$ 是三次微分形式. 于是也有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

总之, 无论 ω 是零次, 一次, 二次, 或者三次微分形式, 都有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

引理 2 (Poincaré **引理之逆**) 设 ω 是一个微分形式. 若有 $\mathrm{d}\omega = 0$, 则 ω 是一个恰当微分形式, 即, 存在微分形式 θ 使得

$$\omega = \mathrm{d}\theta.$$

例 1 设 $\omega = yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, 则

$$\mathrm{d}\omega = (x - x)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y - y)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (z - z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

根据 Poincaré 引理之逆, ω 是恰当的. 事实上, 对于 $\theta = xyz$ 有 $\omega = \mathrm{d}\theta$.

例 2 设 $\omega = (x^2 - yz)\mathrm{d}x + (y^2 - zx)\mathrm{d}y + (z^2 - xy)\mathrm{d}z$, 则

$$\mathrm{d}\omega = (-x - (-x))\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (-y - (-y))\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (-z - (-z))\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

根据 Poincaré 引理之逆, ω 是恰当的. 事实上, 取 $\theta = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz$, 就有 $\omega = \mathrm{d}\theta$.

9.7.4 微分形式在高维空间的推广

微分形式在高维空间 $\mathbb{R}^n$ 的推广如下:

0 次形式就是 n 元可微函数的全体.

一次形式就是 $\mathrm{d}x_i$, $i = 1, \cdots, n$ 的线性组合

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\mathrm{d}x_i$$

二次形式是 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 的线性组合

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

推而广之, p 次形式就是 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ 的线性组合

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

p 次形式的全体 V^p 构成一个 $\binom{n}{p}$ 维的空间.

而 n 次形式就是

$$a(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

这里, 外积的运算遵守下列原则

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

所有系数都是空间 E 中区域 Ω 上的有连续偏微商的函数. 因此, 一般地, 一个 p 次形式 ω_p 和一个 q 次形式 ω_q 的外积是一个 $p+q$ 次形式

$$\omega_q \wedge \omega_q \in V^{p+q}$$

所定义的外微分 "d", 是一个保持线性和数乘的映射

$$\mathrm{d}: \quad V^p \longrightarrow V^{p+1}, \quad p = 0, 1, \cdots, n-1.$$