2018 年春季学期《代数结构》期末试题

Edited by Lyncien

2018.06.27

1.

（1）$6x-4y=2$的整数解。

（2）$\Sigma=\{A,B,C,D\}$，Σ^+是非空行，给出Σ^+的归纳定义。Σ^+可数吗？

2. $<G, *>$是群，a是 22 阶元，b是 7 阶元，$a^{8x-12}=e$，$b^x=b$。求x模 77 的解。

3. $\{2,3,6,12,24,36\}$

（1）作出 Hasse 图。

（2）$\{2,3,6,12\}$的最大元、最小元、极大元、极小元、最大下界、最小上界。

4.

（1）$(1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4)=?$

（2）证明$\{(1\ 2),(1\ 3\ 4)\}$的生成子群是 4 阶对称群S_4。

5. $f:A\to B$，定义A上的关系

$$xRy \Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

证明：R是A上的等价关系。

6. 证明：循环群的同态像也是循环群。

7.

（1）$<G, *>$ 是群，$|G|\geq 2, \forall a\in G, a^2=e$，则存在整数$n$使得$|G|=2^n$。

（2）$<A, \oplus, *, 1, 0>$是布尔代数，$a+b=(a*b')\oplus(b*a')$，则$<A, +>$是交换群。

（3）$<A, \oplus, *, 1, 0>$是有限布尔代数，利用（1）（2）证明$|A|=2^n$。

8. $<R, +, *>$是环，$|R|\geq 3$，$\forall a\in R$, $a^2=a$，则R中有零因子。

代数结构 2019.9 考试试卷

by MacGuffin

1.【9 分】已知存在一些正整数 n，满足：
(1)$2^n - n$ 是 3 的整数倍；
(2)$3^n - n$ 是 5 的整数倍；
(3)$5^n - n$ 是 2 的整数倍。
求同时满足条件 (1)(2)(3) 的 n 的最小值？

2.【10 分】证明：若两个正整数 a,b 互素，则存在正整数 m,n，使得 $a^m + b^n \equiv 1 (mod\, ab)$。

3.【9 分】计算下列置换的运算：
(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3$$

4.【11 分】设 N 是正整数集，定义 N 上的二元关系 $R = \{\langle x, y\rangle | x, y \in N \wedge x + y \text{是偶数}\}$
(1) 证明 R 是 N 上的一个等价关系
(2) 求该等价关系确定的等价类集合

5.【12 分】设 $A = \{a, b, c, d\}$,A 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：
$$R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$
$$R_2 = I_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$$
其中 I_A 为 A 上的恒等关系
(1) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即是否具有自反性，不自反性，对称性，反对称性和传递性)；
(2) 试求出 $R_1 \circ R_2, R_1^+ \text{和} R_2^+$(传递闭包)

6.【13 分】集合 S 上运算 * 满足结合律，H 和 K 为 S 的非空子集，$< H, * >$ 和 $< K, * >$ 为群, 且群 H,K 除了单位元以外无相同元素，对于群 H,K 内的任意元素 $h \in H$和$k \in K$有$h * k = k * h$. 若 $HK = \{h * k | h \in H, k \in K\}$ 是 S 的子集

(1) 证明 G=HK 关于乘法 * 构成一个群。

(2) 证明 H,K 都是 G 的正规子群。

(3) 证明商群 G/H 与 K 同构。

7.【12 分】设 $< G, * >$ 是一个群，

$$H = \{a | a \in G\text{且对于所有}b \in G, a * b = b * a\}$$

证明 $< H, * >$ 是正规子群。

8.【13 分】已知实数集 R 对于普通的加法和乘法是一个含幺环 (乘法存在单位元)，对于任意 $a, b \in R$，定义 $(1) a \oplus b = a + b - 1 (2) a \otimes b = a + b - ab$ 证明 R 关于 $\oplus$和$\otimes$ 也构成一个含幺环。

9.【11 分】$Q[x]$ 是有理数集 Q 上多项式全体，Δ 为正整数，$S = \{a + b\sqrt{\Delta} | a \in Q, b \in Q\}$，定义 $\Psi : Q[x] \to S, \Psi(f(x)) = f(\sqrt{\Delta})$, 证明 Ψ 为满环同态映射，求 $Ker\Psi$。

注. 题目中表示关系使用的符号 $\langle a,b\rangle$, 与课本中有序二数组 (a,b) 等价.

1. 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R\subseteq A\times A$, 且 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}$. 求 R 的自反闭包 $r(R)$、对称闭包 $s(R)$ 和传递闭包 $t(R)$.

2. 设 $A=\{1,2,\cdots,20\}$, $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 5\}$, 证明 R 为 A 上的等价关系, 求商集合 A/R.

3. 已知偏序集 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$, 其中

$$A=\{a,b,c,d,e\},\preccurlyeq=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}.$$

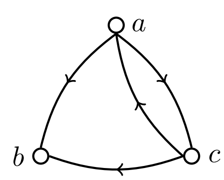
画出偏序集的哈斯图, 并指出 A 的最大元、最小元、极大元、极小元.

4. 设 $A=\{a,b,c\}$, $R\subseteq A\times A$, R 的关系矩阵为

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

写出关系 R 的集合表达式, 画出对应的关系图.

5. 设 $A=\{a,b,c\}$, 写出下面关系的集合表达式和关系矩阵.



$G(R)$

6. 给出集合 $\{1,2,3,4\}$ 上的关系, 它们分别具有如下性质:

a) 自反、对称、不传递;

b) 不是自反的、对称、传递;

c) 自反、反对称、不传递;

d) 自反、对称、传递;

e) 自反、反对称、传递.

中国科学技术大学

2020—2021 学年第 2 学期考试试卷

考试科目: 代数结构得分:__________

学生所在系:___________ 姓名:__________ 学号:___________

1. (16 分)(1)求解下列同余方程组

$$\begin{cases} x = 1\ (mod\ 5) \\ x = 5(\ mod\ 6) \\ x = 4\ (mod\ 7) \\ x = 10\ (mod\ 11) \end{cases}$$

(2)计算$\phi(7800)$

2.(12 分)设集合 A={1,2,3,4},R 是集合 A 上的关系,R={(1,2),(2,1),(2,3),(3,4),(4,1)}, 求 R 的传递闭包和 R^2。

3.(15 分)R^*是非零实数集合,$x, y \in R^*$,定义 R^*上的关系 S:$xSy \Leftrightarrow x \cdot y > 0$,

(1) 证明:S 是 R^*上的等价关系,并写出所有等价类;

(2) 如果将 R^*改为实数集合 R,那么 S 还是 R 上的等价关系吗?为什么?

4. (15 分)对部分序集<{3,5,9,15,24,45}, |>, 回答以下问题:

(1) 画出 Hasse 图,求极大元和极小元,存在最大元和最小元吗?

(2) 找出{3,5}的所有上界,如果存在,求{3,5}的最小上界;

(3) 找出{15,45}的所有下界,如果存在,求{15,45}的最大下界。

5.(11 分)设 H 是群 G 的非空子集。证明:H 是 G 的子群的充分必要条件是:对任意的 a,b∈H,有$a^{-1}b \in H$。

6.(11 分)设 f 是群 G 到G'的同构映射,$b \in G$。证明:b 与 f(b)的阶相同。

7. (10 分)试证明:具有 3 个或更多元素的链(线性序集)不是有补格。

8.(10分)设f是环R到环R'的同态满射,I是R的理想,证明:f(I)=R' $\Leftrightarrow$ I+Kerf=R.

（装订线内不要答题）

中国科学技术大学计算机学院
2022 年 春季 学期考试试卷

课程名称： 代数结构 **课程编号：** 011103

开课院系： 计算机学院 **考试形式：** 闭卷

姓 名： ________ **学 号：** ________ **专 业：** ________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总 分
得 分										

1.【8 分】求解线性同余方程：$21x \equiv 39(mod\ 117)$

2.【13 分】设$m \geq 2$，a为正整数，且$(m,a)=1$，证明：

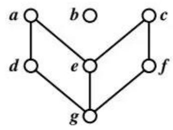
(1) 存在正整数$d \leq m-1$，使得$m|a^d-1$；

(2) 设d_0是满足(1)的最小正整数d，那么$m|a^h-1(h \geq 1)$的充要条件是$d_0|h$。

3.【12 分】(1) 计算置换的乘积 : (12345)(23)

(2) 写出三次对称群S_3的所有子群；写出S_3关于子群$H=\{(1),(23)\}$ 的所有左右陪集。

4.【8 分】已知某部分序集$\langle A, \rho\rangle$的 Hasse 图如下图所示，分别写出集合A和部分序ρ的表达式，并求部分序集$\langle A, \rho\rangle$的最大元、最小元、极大元、极小元。



5.【10 分】设偏序集$\langle A, R\rangle$，$\langle B, S\rangle$，定义$A \times B$上的二元关系T：$(x,y)T(u,v)$当且仅当xRu且ySv。证明：T为偏序关系。

6.【12 分】设H是群G的正规子群，g是G的任一元素，证明：若g的阶与$|G/H|$互素，那么$g \in H$。

7.【12 分】设G和G'分别是阶数为m和n的循环群（$m \geq n$），则f是G到G'的满同态映射的充要条件是n$|m$。

8.【15 分】$Z[x]$为多项式环，(n)表示$Z[x]$的主理想且$n \geq 2$，证明：

(1) $Z[x]/(n)$与$(Z/nZ)[x]$同构；

(2) $Z[i]/(1+i)$与$Z/2Z$同构（i为虚数）。

9.【10 分】设R为环，$I_1,I_2,\ldots,I_n$为R的理想，当$i \neq j$时，$I_i+I_j=R$，证明：$I_1+I_2I_3\ldots I_n=R$。

2023 春代数结构期末考试卷

2023 年 6 月 28 日

题目 1. 解下列同余方程组（14 分）：

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

题目 2. $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $\gcd(m, n) = 1$，求证：$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$（10 分）。

题目 3. 有两个置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,求 $\sigma\tau, \sigma^2\tau, \tau^{-1}\sigma\tau$（10 分）。

题目 4. R 是定义在 $A \times A$ 上的二元关系，其中 A 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的子集。$(a, b) \overset{R}{\sim} (c, d)$ 当且仅当 $a + d = b + c$（10 分）。

（1）求证 R 是 $A \times A$ 上的等价关系；

（2）当 $A = \{1, 2, 3\}$ 时，求商集 $(A \times A)/R$。

题目 5. （1）设 G 为一有限群，证明 G 中阶大于 2 的元素个数为偶数；

（2）在（1）的条件下加上 $|G|$ 为偶数，证明 G 中必有 2 阶元。（14 分）

题目 6. G 为一个群，证明 G 没有非平凡子群当且仅当 $G = \{e\}$ 或者 G 为素数阶循环群（10 分）。

题目 7. 设 H 是群 G 的正规子群，且 $[G : H] = m$。求证：$\forall x \in G, x^m \in H$（12 分）。

题目 8. 设 G 为一个群，定义 G 的中心 $Z(G)$ 为：$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G, xg = gx\}$（12 分）。

（1）证明 $Z(G)$ 是 G 的正规子群；

（2）若 G 是交换群，证明 $Z(G) = G$；

（3）若 $G/Z(G)$ 是循环群，证明 $Z(G) = G$。

题目 9. 设 R 是一个环，S 是 R 的子集，而 I 是 R 的理想且 $I \subset S$（8 分）。

（1）若 S 是 R 的子环，证明 S/I 是 R/I 的子环。

（2）若 S 是 R 的理想，证明 $(R/I)/(S/I) = R/S$。

中国科学技术大学计算机学院
2024 年 春季 学期考试试卷

课程名称：代数结构　　课程编号：011103

开课院系：计算机学院　　考试形式：闭卷

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题　号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	总　分
得　分											

（装订线内不要答题）

1. （10 分）证明： 2 是 13 的一个原根，并解同余方程 $4x^9 \equiv 7 \pmod{13}$。
2. （10 分）已知 A={1，2，3，4，5}上二元关系 R={(1，2)，(2，3)，(3，4)，(4，3)，(2，5)}。
   （1） R 具有哪些性质？
   （2） 求 R 的自反闭包、传递闭包和 R^2。
3. （15 分）（1） 设 m 是正整数，a 和 b 是整数，如有整数$d \geq 1$，则$a \equiv b \pmod{m}$ $\Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$。
   （2） 证明：若 m 与 n 互素，则$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$。
4. （10 分）对每个正整数 n，用 S_n表示 n 的所有正因子的集合，例如 S_6={1，2，3，6}。则
   （1） 证明$\langle S_n, | \rangle$是格。
   （2） 对于 n=4，6，8，12，试给出 $\langle S_n, | \rangle$的哈斯图。
   （3） 当 n 为何值时，$\langle S_n, | \rangle$是线性序，为什么？
5. （15 分）设 A={1，2，3，4，5}，<P(A)，⊕>构成群，其中 P(A)是集合 A 的幂集，⊕为集合的对称差。
   （1） 求群<P(A)，⊕>的单位元，以及 P(A)中任意元素的逆元；
   （2） 求解群方程：{1，3}⊕X={3，4，5}；
   （3） 令 B={1，4，5}，求由 B 生成的循环子群 <B>。
6. （10 分）设<R，+，·> 是 Z 上 2 阶矩阵环，A 是元素为偶数的所有 2 阶矩阵组成的集合，证明 A 是<R，+，·>的理想，并求商环 R/A 的阶。
7. （10 分）设 f 是群 G_1到某个交换群 G_2的群同态，H 是 G_1的子群。证明：若 H 包含 Kerf，则 H 是 G_1的正规子群。
8. （10 分）证明：奇数阶群所有元素之积等于单位元。
9. （10 分）设群 G 只含有限多个子群，f 是 G 到自身的满同态，证明 f 是 G 的自同构。