

复分析第一次习题课

黄天一
USTC

更新：2024 年 3 月 14 日

目录

1 作业讲解	1
2 补充习题	10
3 一些补充内容	16
3.1 黎曼球的进一步讨论	16
3.2 多值函数与黎曼面简介	17

1 作业讲解

作业 1.1 (习题 1.1.5) 设 $|a| < 1$, 证明: 若 $|z| = 1$, 则 $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = 1$.

证明. 注意到 $\bar{z}z = |z|^2 = 1$, 所以

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{z}z-\bar{a}z} \right| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} \frac{1}{|z|} = 1.$$

作业 1.2 (习题 1.2.6) 证明: 三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

证明. 不妨设 z_1, z_2, z_3 两两不同. 那么 z_1, z_2, z_3 共线等价于存在实数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得 $z_1 - z_3 = \lambda(z_2 - z_3)$. 这又等价于

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}.$$

整理可得, 上式即等价于

$$0 = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & \bar{z}_1 - \bar{z}_3 \\ z_2 - z_3 & \bar{z}_2 - \bar{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 - z_3 & \bar{z}_1 - \bar{z}_3 & 0 \\ z_2 - z_3 & \bar{z}_2 - \bar{z}_3 & 0 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

作业 1.3 (习题 1.2.10) 证明: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明等式的几何意义.

证明. 直接计算可得

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (|z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2) + (|z_1|^2 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2) \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

该式说明平行四边形的对角线长度的平方和等于各边长度的平方和.

作业 1.4 (习题 1.2.14) 设 L 是由方程 $az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0$ 所确定点的轨迹, 其中 $a, d \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$. 证明:

1. 当 $a = 0, \beta \neq 0$ 时, L 是直线.
2. 当 $a \neq 0, |\beta|^2 - ad > 0$ 时, L 是一个圆周, 并求出它的圆心和半径.

证明. 1. 此时 L 方程为 $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0$. 将 $z = x + iy, \beta = a + ib$ 代入可得在实坐标下 L 的方程为 $ax + by + d = 0$, 由 $\beta \neq 0$ 可得 a, b 不同时为零, 所以 L 是直线.

2. 此时 L 的方程可整理为

$$L: \left| z + \frac{\beta}{a} \right|^2 = \frac{|\beta|^2 - ad}{a^2}.$$

所以 L 是一个圆周, 圆心为 $-\frac{\beta}{a}$, 半径为 $\frac{\sqrt{|\beta|^2 - ad}}{|a|}$.

作业 1.5 (习题 1.2.18) 证明:

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^n}.$$

证明. 多项式 $(z+1)^n - 1$ 的所有零点为

$$z_k = -1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

其模为 $|z_k| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$. 注意到该多项式可整理为

$$(z+1)^n - 1 = z^n + nz^{n-1} + \cdots + nz.$$

所以由韦达定理可得, 该方程的所有非零根之乘积为

$$z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n.$$

两边取模即可得

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

作业 1.6 (习题 1.5.9) 证明: 若 E 是闭集, F 是紧集, 则存在 $z_0 \in E, w_0 \in F$, 使得 $d(E, F) = |z_0 - w_0|$. 将 F 换成闭集后是否还存在这样的 z_0 和 w_0 ?

证明. 我们记

$$\rho = d(E, F) = \inf_{(z,w) \in E \times F} |z - w|.$$

根据定义可得, 存在数列 $z_n \in E$ 和 $w_n \in F$, 使得 $\rho \leq |z_n - w_n| < \rho + \frac{1}{n}$. 由于 F 是紧集, 所以有界列 $\{w_n\}$ 存在收敛子列 $\{w_{\tilde{n}_k}\}$, 其极限 w_0 属于 F . 此外, 设 w_n 模的一致界为 M , 则有 $|z_n| \leq M + \rho + 1$ 对任意 n 成立, 所以 $\{z_n\}$ 也是有界列, 它也存在收敛子列 $\{z_{\tilde{n}_k}\}$, 并且由 E 是闭集可得该子列收敛于某点 $z_0 \in E$. 结合 $\rho \leq |z_{\tilde{n}_k} - w_{\tilde{n}_k}| < \rho + \frac{1}{\tilde{n}_k}$, 令 $k \rightarrow \infty$ 即可得 $|z_0 - w_0| = \rho$.

如果换成闭集则不然. 比如设 $E = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z = 1\}$, $F = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$, 则 E, F 都是闭集且不相交, 但 $d(E, F) = 0$.

作业 1.7 (习题 1.6.1) 满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么? 如果是域, 说明它是单连通域还是多连通域.

1. $\operatorname{Re} z = 1$.
2. $\operatorname{Im} z < -5$.
3. $|z - i| + |z + i| = 5$.
4. $|z - i| \leq |2 + i|$.
5. $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{6}$.
6. $|z| < 1, \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}$.
7. $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 2$.
8. $0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4}$.

证明. 1. 为一条竖直直线, 不是域.

2. 为水平直线 $\operatorname{Im} z = -5$ 下方的半平面, 是单连通域.

3. 为以 $i, -i$ 为焦点, 长轴长度为 5 的椭圆周. 不是域.

4. 为闭圆盘 $\overline{B(i, \sqrt{5})}$, 不是域.

5. 为从 1 出发, 与正实轴夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 但不包含 1 的射线. 不是域.

6. 为如下图1所示的弓形域, 是单连通域.

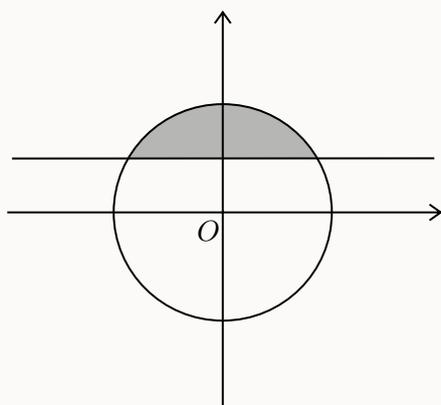


图 1

7. 该式等价于

$$|z - 1|^2 \leq 4|z + 1|^2 \Leftrightarrow 3|z|^2 + 5(z + \bar{z}) + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \left| z + \frac{5}{3} \right|^2 \geq \frac{16}{3}.$$

所以该点集即为开圆盘 $B\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 的补集, 是闭集, 而不是域.

8. 设 A 为复平面上 i 点, B 为复平面上 $-i$ 点. 我们要求的是复平面上所有的点 P , 使得 \overrightarrow{BP} 到 \overrightarrow{AP} 的有向角大于 0 且小于 $\frac{\pi}{4}$. 首先, 该角大于零当且仅当 P 位于虚轴左侧. 另一方面, 考虑以 $C = -1$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆周, 如图2所示. 那么圆心角 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$. 根据圆周角定理, 位于虚轴左侧的 P 满足 $\angle APB < \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\angle ACB$, 当且仅当 P 位于圆周的外侧. 综上所述, 待求的点集为

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |z + 1| > \sqrt{2}\}.$$

这是单连通域.

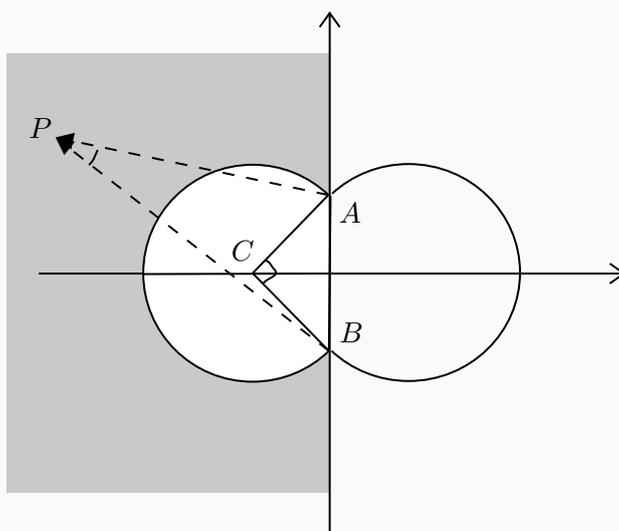


图 2

作业 1.8 (习题 1.7.3) 证明: 若 E 是紧集, f 在 E 上连续, 则 $f(E)$ 也是紧集. 将紧集换成闭集, 结论是否成立?

证明. 只需证 $f(E)$ 自列紧. 任取 $f(E)$ 中的数列 $w_n = f(z_n)$, $z_n \in E$, 则由 E 是紧集可得 z_n 存在子列 z_{n_k} , 收敛于 E 中某点 z_0 . 结合 f 是连续函数可得 $w_{n_k} = f(z_{n_k})$ 收敛于 $f(E)$ 中一点 $f(z_0)$, 即证.

换成闭集未必成立. 例如, $E = [1, +\infty)$ 是 \mathbb{C} 中的闭集, 但 E 上的连续函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 把 E 映为 $(0, 1]$, 这不是闭集.

作业 1.9 (习题 2.1.4) 设区域 G 和区域 D 关于实轴对称. 证明: 如果 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数, 那么 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 是 G 上的全纯函数.

证明. 直接计算可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{f(\bar{z} + \bar{h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \right)} = \overline{f'(\bar{z})}.$$

最后一步由函数 $w \mapsto \bar{w}$ 的连续性可得.

注 很简单的习题, 但这个结论是后续一个大定理: Schwarz 对称延拓定理的基本引理.

作业 1.10 (习题 2.2.2) 设 $f \in H(D)$, 并且满足下列条件之一:

1. $\operatorname{Re} f(z)$ 是常数.
2. $\operatorname{Im} f(z)$ 是常数.
3. $|f(z)|$ 是常数.
4. $\arg f(z)$ 是常数.
5. $\operatorname{Re} f(z) = (\operatorname{Im} f(z))^2$, $z \in D$.

那么 f 是一常数.

证明. 下面我们设 $f = u + iv = r e^{i\theta}$.

1. 若 u 恒为常数, 则 $v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$, 所以 v 也恒为常数, f 恒为常数.
2. 若 v 恒为常数, 则 $u_x = v_y = 0$, $u_y = -v_x = 0$, 所以 u 也恒为常数, f 恒为常数.
3. 若 r 恒为零, 自然有 f 恒为零. 若 r 恒为正数, 由 $r^2 = u^2 + v^2$ 恒为常数可得

$$0 = uu_x + vv_x = uu_x - vv_y, \quad 0 = uu_y + vv_y = vu_x + uv_y.$$

在区域任一点处上式确定了 u_x, u_y 满足的线性方程组, 其系数行列式为 $u^2 + v^2 = r^2$, 处处非零, 所以上式只有零解, 即 u 恒为常数. 由第 1 问可得 f 恒为常数.

4. 若 θ 恒为常数, 则存在实常数 λ 使得 $u = \lambda v$, 所以

$$0 = u_x - \lambda v_x = u_x + \lambda u_y, \quad 0 = u_y - \lambda v_y = -\lambda u_x + u_y.$$

在区域任一点处上式确定了 u_x, u_y 满足的线性方程组, 其系数行列式为 $1 + \lambda^2$, 处处非零, 所以上式只有零解, 即 u 恒为常数. 由第 1 问可得 f 恒为常数.

5. 对 $u = v^2$ 两边求导可得

$$0 = u_x - 2vv_x = u_x + 2vu_y = 0, \quad 0 = u_y - 2vv_y = -2vu_x + u_y = 0.$$

在区域任一点处上式确定了 u_x, u_y 满足的线性方程组, 其系数行列式为 $1 + 4v^2$, 处处非零, 所以上式只有零解, 即 u 恒为常数. 由第 1 问可得 f 恒为常数.

作业 1.11 (习题 2.2.3) 设 $z = x + iy$, 证明 $f(z) = \sqrt{xy}$ 在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 但 f 在 $z = 0$ 处不可微.

证明. 计算可得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x| \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{z=0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0 \cdot |\Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0.$$

所以 f 在 $z = 0$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程. 但是当 $z = x + iy$ 满足 $x = y$ 时, 有

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy} = \frac{1}{1 + i} \frac{|x|}{x}.$$

上式在 $x \rightarrow 0$ 时的极限不存在, 所以 f 在 $z = 0$ 处不是复可微的.

注 这是一个相当重要的反例. 这告诉我们必须一点处实可微和 Cauchy-Riemann 方程同时成立才能推出复可微, 缺一不可. 去年期中有一题, 很多同学因为忽视了这一点导致被判错, 我把这题列在下面.

习题 1.1 (去年期中) 设 D 为区域, $f \in C(D)$ 恒非零. 如果 $f^2 \in H(D)$, 那么 $f \in H(D)$.

证明. 当时很多同学只验证了 f 满足 Cauchy-Riemann 方程就断言 f 全纯, 这当然是不对的. 本题应当按照定义验证 f 处处复可微. 任给 $z_0 \in D$, 则

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)^2 - f(z_0)^2}{z - z_0} \frac{1}{f(z) + f(z_0)}.$$

注意到 f 处处非零, 且 $f^2 \in H(D)$, 所以由上式可得

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2f(z_0)} \frac{d}{dz} (f(z)^2) \Big|_{z=z_0}.$$

注 其实这题 f 恒非零的条件是多余的, 不过暂时还没法处理这种情况. 等到学完唯一性定理和 Morera 定理就可以试试写下这时的证明了.

作业 1.12 (习题 2.2.5) 设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. 证明:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} e^{-i\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

证明. 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 计算可得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

由此计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} e^{-i\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

作业 1.13 (习题 2.2.9) 设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f = u + iv \in C^1(D)$. 证明:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

特别地, 当 $f \in H(D)$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2.$$

给出上面等式的几何意义.

证明. 首先由定义可得

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{u_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - u_y}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{u_x - v_y}{2} + i \frac{v_x + u_y}{2}.$$

由此计算可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 &= \left(\frac{u_x + v_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{v_x - u_y}{2} \right)^2 - \left(\frac{u_x - v_y}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_x + u_y}{2} \right)^2 \\ &= u_x v_y - u_y v_x = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

几何意义: 若 f 为从 D 到 G 的全纯映射, 则 $|f'(z)|^2$ 等于面积微元的放大倍数, 并且保定向. 换言之, 如果 $dA = dx \wedge dy$ 是 D 的有向面积元, $d\tilde{A} = d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}$ 是 G 的有向面积元, 则

$$d\tilde{A} = |f'(z)|^2 dA.$$

注 这个结论其实有个更深刻的几何意义: 复流形总是可定向的. 了解过微分流形的同学看看能不能理解这一点?

作业 1.14 (习题 2.2.12) 设 D, G 是域, $\varphi: D \rightarrow G$ 是全纯函数. 证明: 若 u 是 G 上的调和函数, 则 $u \circ \varphi$ 是 D 上的调和函数.

证明. 不妨设 u 是实值调和函数, 不然分解为实部虚部即可. 只需证明: 任给 $z \in D$, $u \circ \varphi$ 在 z 附近调和, 记 $w = \varphi(z)$. 我们设 $r > 0$ 使得 $B(w, r) \subset G$, 那么在单连通域 $B(w, r)$ 上, 实值调和函数 u 存在共轭调和函数 v , 即 $f = u + iv \in H(B(w, r))$. 由此可得 $f \circ \varphi$ 在 z 的邻域 $\varphi^{-1}(B(w, r))$ 内全纯, 所以其实部 $u \circ \varphi$ 在 z 附近调和, 即证.

注 用共轭调和函数写证明一定要注意“实值调和”和“单连通”这两个细节. 像这样通过局部取圆盘邻域, 把一般域上的问题转化为单连通区域上的问题的手法是很常见的, 在后面应用 Morera 定理时往往还会用到. 本题当然也可以直接计算证明, 具体见补充习题 2.4.

作业 1.15 (习题 2.2.13) 设 u 是域 D 上的实值调和函数, 并且 u 的梯度恒不为零¹. φ 是 $u(D)$ 上的实函数. 证明: $\varphi \circ u$ 是 D 上的调和函数, 当且仅当 φ 是线性函数.

注 u 必须保证是实值才行. 不然, 任给 D 上的非常值全纯函数 u , u 当然也调和. 这时定义 $\varphi(w) = \operatorname{Re}(w^2)$, 则 φ 既不复线性, 也不实线性, 但 $\varphi \circ u = \operatorname{Re}(u^2)$ 是全纯函数的实部, 当然调和.

证明. 计算可得

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi \circ u) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'(u(z))u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi'(u(z))u_y) \\ &= \varphi''(u(z))(u_x^2 + u_y^2) + \varphi'(u(z))\Delta u \\ &= \varphi''(u(z))(u_x^2 + u_y^2). \end{aligned}$$

结合 $|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2$ 恒不为零即可得, 在 $u(D)$ 上恒成立 $\varphi''(t) = 0$, 所以 φ 为线性函数.

作业 1.16 (习题 2.3.2) 设 f 是域 D 上的全纯函数, 且 $f'(z)$ 在 D 上不取零值, 试证:

1. 对每一个 $u_0 + iv_0 \in f(D)$, 曲线 $\operatorname{Re} f(z) = u_0$ 和曲线 $\operatorname{Im} f(z) = v_0$ 正交.
2. 对每一个 $r_0 e^{i\theta_0} \in f(D) \setminus \{0\}$, $-\pi < \theta_0 \leq \pi$, 曲线 $|f(z)| = r_0$ 与曲线 $\arg f(z) = \theta_0$ 正交.

证明. 1. 记 γ 为曲线 $\operatorname{Re} f(z) = u_0$ 的像, Γ 为曲线 $\operatorname{Im} f(z) = v_0$ 的像. 那么 $f(\gamma)$ 包含于曲线 $\operatorname{Re} w = u_0$, $f(\Gamma)$ 包含于曲线 $\operatorname{Im} w = v_0$, 由此可得 $f(\gamma)$ 和 $f(\Gamma)$ 正交. 又因为 $f'(z)$ 恒不为零, 所以由保角性可得 γ 与 Γ 也正交.

2. 记 γ 为曲线 $|f(z)| = r_0$ 的像, Γ 为曲线 $\arg f(z) = \theta_0$ 的像. 那么 $f(\gamma)$ 包含于曲线 $|w| = r_0$, $f(\Gamma)$ 包含于曲线 $\arg w = \theta_0$, 由此可得 $f(\gamma)$ 和 $f(\Gamma)$ 正交. 又因为 $f'(z)$ 恒不为零, 所以由保角性可得 γ 与 Γ 也正交.

¹这个条件也可以弱化为 u 在每点附近都不是局部常值的. 从下面的证明可以看到, 只要证明满足 $u_x = u_y = 0$ 的点 z 处仍然成立 $\varphi''(u(z)) = 0$. 由于 u 在 z 处非局部常值, 故存在 D 中序列 z_n 收敛于 z , 使得 $u_x^2 + u_y^2$ 在 z_n 处都不为零. 这样就必然有 $\varphi''(u(z_n)) = 0$, 进而由连续性可得 $\varphi''(u(z)) = 0$.

作业 1.17 (习题 2.3.3) 设 f 在 $B(0,1) \cup \{1\}$ 上全纯, 并且

$$f(B(0,1)) \subset B(0,1), f(1) = 1.$$

证明: $f'(1) \geq 0$.

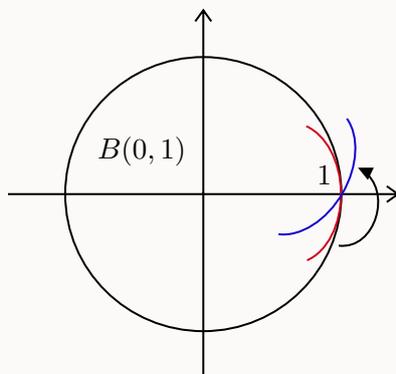


图 3

注 我们先从几何角度分析. 考虑 $f'(1) \neq 0$ 的情况, 此时 $f(z)$ 在 $z = 1$ 处是保角的. 如果 $\arg f'(1) \neq 0$, 那么它就会将过点 1 处的曲线旋转一定角度. 如图3所示, 我们取一段包含在 $B(0,1)$ 内, 以 1 为端点, 且足够“接近边界”的曲线. 在 f 的作用下, 这段曲线局部来看被旋转了一定角度, 跑到了 $B(0,1)$ 外面. 但 $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$, 所以这段曲线在 f 下的像仍应位于圆盘内, 这就导出了矛盾. 下面我们给出严格的证明.

证明. 由 f 在 1 处复可微且 $f(1) = 1$ 可得, 对 $B(0,1)$ 内位于 1 附近的点, 成立

$$f(z) = 1 + f'(1)(z - 1) + o(|z - 1|).$$

由 $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$ 可得 $|f(z)| < 1$, 因此

$$1 > |f(z)|^2 = 1 + 2 \operatorname{Re}(f'(1)(z - 1)) + o(|z - 1|).$$

设 $z - 1 = re^{i\theta}$, 则有

$$\operatorname{Re}(f'(1)e^{i\theta}) + \frac{o(r)}{r} < 0.$$

这里 θ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. 令 $r \rightarrow 0$, 即可得

$$\operatorname{Re}(f'(1)e^{i\theta}) \leq 0, \forall \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

设 $\varphi = \arg f'(1) \in (-\pi, \pi]$, 则 $\cos(\varphi + \theta) \leq 0, \forall \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 由此可得 $\varphi = 0$, 因此 $f'(1) = |f'(1)| \geq 0$.

习题 1.2 (史济怀 2.3.4) 设 $g \in H(B(0,1))$, 且存在 $z_0 \in B(0,1) \setminus \{0\}$, 使得 $f(z_0) \neq 0, f'(z_0) \neq 0$, 且 $|f(z_0)| = \max_{|z| \leq |z_0|} |f(z)|$, 那么

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} > 0.$$

证明. 本题是前一个作业题的推论. 我们考虑函数 $g(z) = \frac{f(zz_0)}{f(z_0)}$, 那么 $g \in H(\overline{B(0,1)})$, 并且 $g(1) = 1$. 另一方面, 任取 $z \in B(0,1)$, 都有 $|zz_0| < |z_0|$, 由条件可得 $|g(z)| \leq 1^2$. 对 $g(z)$ 应用前一题的结论可得 $g'(1) \geq 0$, 亦即

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \geq 0.$$

又因为 $z_0, f'(z_0)$ 都非零, 所以上式取严格大于号.

2 补充习题

习题 2.1 (史济怀习题 1.1.6) 设 $|a| < 1, |z| < 1$, 证明:

- $1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$, 进而 $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$.
- $\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|} \leq \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq \frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}$.

证明. 1. 直接整理可得

$$\begin{aligned} 1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 &= \frac{(1-\bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2) - (|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$

2. 考虑函数 $f(t) = \frac{\alpha+t}{\beta+t}$, 其中 $\alpha < \beta$ 为实数. 则当 $t > \max\{-\alpha, -\beta\}$ 时, $f(t)$ 是单调递增的 (即糖水不等式). 由 $|z| < 1, |a| < 1$ 可得 $(1-|a|^2)(1-|z|^2) > 0$, 整理可得 $|z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2$. 所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 &= \frac{|z|^2 + |a|^2 - \bar{a}z - a\bar{z}}{1 + |a|^2|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z}} \leq \frac{|z|^2 + |a|^2 + 2|a||z|}{1 + |a|^2|z|^2 + 2|a||z|} = \left(\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|} \right)^2. \\ \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 &= \frac{|z|^2 + |a|^2 - \bar{a}z - a\bar{z}}{1 + |a|^2|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z}} \geq \frac{|z|^2 + |a|^2 - 2|a||z|}{1 + |a|^2|z|^2 - 2|a||z|} = \left(\frac{|z|-|a|}{1-|a||z|} \right)^2. \end{aligned}$$

注 我们将映射 $\varphi_a: z \mapsto \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ 称为 Möbius 变换. 根据第 1 问, 当 $|a| < 1$ 时, φ_a 是从 $B(0,1)$ 映到 $B(0,1)$ 的全纯映射. 此外, φ_a 其实还是双射: 计算可得

$$w = \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \Rightarrow z = \frac{a-w}{1-\bar{a}w},$$

故 φ_a 的逆映射即为自身. 所以 φ_a 是 $B(0,1)$ 上的全纯自同构³, 而且根据作业 1.1 可得, Möbius 变换将 $\partial B(0,1)$ 映成 $\partial B(0,1)$. 事实上, 我们以后会学到: $B(0,1)$ 上所有全纯自同构构成的群即为

$$\text{Aut}(B(0,1)) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z} : a \in B(0,1), \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

²尽管前一个作业题要求值域要是 $B(0,1)$, 不过从证明过程可见, 改成 $\overline{B(0,1)}$ 也是可以的.

³设 D 为区域, 称 φ 是 D 上的全纯自同构, 是指: (1) $\varphi: D \rightarrow D$ 为双射, (2) $\varphi \in H(D)$, (3) $\varphi^{-1} \in H(D)$. 可以看到这与拓扑同胚和微分同胚的定义十分类似, 但不同的是: 我们在第四章会学到, 这里第 (3) 条其实是多余的, 这是全纯函数专有的优美性质.

此外, Möbius 变换也是 Blaschke 乘积的基本组成部分.

习题 2.2 (关于连通性的习题) 1. 若 $E \subset \mathbb{C}$ 是连通集, 那么其闭包 \bar{E} 也是连通集.

2. 如果 D 是 \mathbb{C} 中的有界单连通域, 那么 ∂D 是连通的. 如果 D 是无界单连通域结论是否一定成立?

证明. 1. 如若不然, 则存在非空无交集 A, B , 使得 $\bar{E} = A \cup B$, 且 $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$. 这时 $E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$ 为无交并, 并且 $(A \cap E) \cap \overline{B \cap E} = \overline{A \cap E} \cap (B \cap E) = \emptyset$. 如果 $A \cap E = \emptyset$, 那么 $E \subset B$, 所以 $\bar{E} \subset \bar{B}$, 进而 $A \subset \bar{B}$. 但非空集 A 与 \bar{B} 无交, 矛盾! 所以 $A \cap E$ 非空, 类似可得 $B \cap E$ 也非空, 这就与 E 的连通性矛盾了.

2. 如若不然, 则 $\partial D = E \cup F$ 为非空集的非交并, 且 $E \cap \bar{F} = \bar{E} \cap F = \emptyset$. 注意到 ∂D 是有界闭集, 所以 $\bar{E}, \bar{F} \subset \partial D$, 进而 $\partial D = \bar{E} \cup \bar{F}$. 如果存在 $z \in \bar{E} \cap \bar{F} \subset \partial D$, 那么同时有 $z \notin F$ 且 $z \notin E$, 但这与 $z \in \partial D$ 矛盾. 所以 \bar{E} 和 \bar{F} 无交. 综上, 我们可以不妨设一开始的 E, F 是无交的有界闭集, 不然用各自的闭包替换即可. 这样, 存在一条 Jordan 曲线 γ , 使得 E 包含于 γ 的内部区域 G_1 , 而 F 包含于 γ 的外部区域 G_2 ⁴.

若 $\gamma \cap D \neq \emptyset$, 注意到 $\gamma \cap \partial D = \emptyset$, 以及无交并关系 $\mathbb{C} = D \sqcup \partial D \sqcup (\bar{D})^c$, 所以 $\gamma = (\gamma \cap D) \cup (\gamma \cap \bar{D}^c)$. 注意到

$$\bar{D} \cap \bar{D}^c = \emptyset, D \cap (\bar{D})^c = D \cap D^c = \emptyset,$$

所以由 γ 的连通性可得, 只能有 $\gamma \cap \bar{D}^c = \emptyset$. 再结合 $\gamma \cap \partial D = \emptyset$ 即可得 $\gamma \subset D$. 又因为 D 单连通, 所以 γ 的内部 G_1 也包含于 D , 从而 $E \subset \partial D$ 是 D 的子集, 矛盾!

如果 $\gamma \cap D \neq \emptyset$, 那么有 $D = (D \cap G_1) \cup (D \cap G_2)$. 由 G_1, G_2 的定义可得 $\bar{G}_1 \cap G_2 = G_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$, 所以结合 D 的连通性可得 $D \subset G_1$ 或 $D \subset G_2$. 不妨设前者成立, 那么 $\bar{D} \subset \bar{G}_1$, 从而 ∂D 与 G_2 无交, 但 $F \subset \partial D$ 是 G_2 的非空子集, 矛盾! 综上所述, ∂D 是连通集.

如果去掉有界的条件, 则未必成立. 例如考虑带状域 $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, 它是单连通集, 但边界是两条平行直线, 不是连通集.

注 关于连通性还有一个注记. 同学们在数分里可能学过另外一个定义:

定义. 称 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是不连通的, 是指存在 E 的子空间拓扑意义下的非空开集 A, B , 使得 $A \cap B = \emptyset$, 且 $E = A \cup B$. 这里, 称 A 是 E 中子空间拓扑意义下的开集, 是指存在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $A = U \cap E$. 然后把不连通集以外的所有子集称为连通集.

其中如果把 A, B 换成子空间拓扑下的闭集, 得到的定义是等价的. 我们可以断言这个定义与书上的定义等价. 不妨把书上的定义称为第 (I) 类连通, 这里的定义称为第 (II) 类连通.

(I) \Rightarrow (II): 如果 E 不是第 (II) 类连通的, 则设 $E = A \cup B$, 其中 A, B 为子空间拓扑下非空

⁴如果寻根究底的话, 这句话肯定是需要证明的, 但它真的很直观, 而且我估计只能搞出一个很拓扑的证明, 所以我们就暂且不求甚解吧. 注意到去掉紧性是做不到这一点的, 因为两个集合可能会贴贴, 比如 $B(0, 1)$ 和 $B(2, 1)$, 这时候没有这么好的分离性质.

无交的开集, 即存在开集 U, V , 使得 $A = E \cap U, B = E \cap V$. 因为 U 包含于闭集 V^c , 所以也有 $\bar{U} \subset V^c$, 因此 $\bar{A} \cap V = \emptyset \Rightarrow \bar{A} \cap B = \emptyset$. 类似可得 $A \cap \bar{B} = \emptyset$, 所以 E 不是第 (I) 类连通的.

(II) \Rightarrow (I): 如果 E 不是第 (I) 类连通的, 则设 $E = A \cup B$, 其中 A, B 非空无交且 $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. 首先自然有 $A \subset \bar{A} \cap E$. 任取 $z \in \bar{A} \cap E$, 有 $z \in E$ 且 $z \notin B$, 所以 $z \in A$. 综上所述 $A = \bar{A} \cap E$ 是子空间拓扑下的闭集, 类似可得 B 也是, 因此 E 不是第 (II) 类连通的, 证毕.

习题 2.3 (去年期中) 设 $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z - 1$ 为实系数多项式, 如果 $P(z)$ 的零点都不属于单位圆盘 $B(0, 1)$, 计算 $P(1)$ 的值.

证明. 设 z_1, \cdots, z_n 是 $P(z)$ 的全部零点, 那么 $|z_k| \geq 1$ 对所有 $k = 1, \cdots, n$ 成立. 又由韦达定理可得 $|z_1 \cdots z_n| = 1$, 所以有 $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$. 另一方面, 注意到 $P(0) = -1$ 而 $\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, 由零点定理可得 $P(z)$ 存在正实数根, 而模为 1 的正实数只能是 1, 所以 $P(1) = 0$.

习题 2.4 (复可微的判定) 讨论下列函数的复可微性.

1. $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$.
2. $f(z) = \arg z, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

证明. 1. 首先, 若记 $z = x + iy$, 则 $f(z) = x^2$ 是实可微的. 直接计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 = \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re} z.$$

所以 f 的复可微点集为整个虚轴.

2. 设 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$, 其中 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$. 考虑 z 趋于 z_0 的两种路径:

- $z = r_0 e^{i\theta} (-\pi < \theta \leq \pi), \theta \rightarrow \theta_0$. 此时

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{\theta - \theta_0}{e^{i(\theta - \theta_0)} - 1} = \frac{1}{z_0} \left(\frac{\cos(\theta - \theta_0) - 1}{\theta - \theta_0} + i \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\theta - \theta_0} \right)^{-1}.$$

由此即可得差商沿该路径的极限为 $\frac{1}{iz_0} \neq 0$.

- $z = r e^{i\theta_0}, r \rightarrow r_0$. 此时 $f(z) - f(z_0)$ 恒等于零, 从而差商恒等于零.

综上所述 $f(z) = \arg z$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上处处不复可微.

习题 2.5 (半个 Cauchy-Riemann 方程) 设 $z_0 = x_0 + iy_0$ 属于区域 D , 且 $f = u + iv$ 是 D 上的函数. 证明: 如果极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 存在, 那么偏导数 $u_x(x_0, y_0), v_y(x_0, y_0)$ 存在且相等.

证明. 整理可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \operatorname{Re} \frac{(f(z) - f(z_0))(\bar{z} - \bar{z}_0)}{|z - z_0|^2} \\ &= \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(x - x_0) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

由题设可得, 上式在 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的二元极限存在, 设为 A . 若分别令 (x, y) 沿路径 $y = y_0$ 和 $x - x_0$ 趋近于 (x_0, y_0) , 可得极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

都存在, 并且值均为 A . 由此即证.

习题 2.6 (涉及复微分的计算题) 设 D, G 是 \mathbb{C} 中的域.

1. 设 $u \in C^2(G)$, $\varphi: D \rightarrow G$ 为全纯函数. 证明: $\Delta(u \circ \varphi) = (\Delta u \circ \varphi) \cdot |\varphi'|^2$.
2. 设 $f \in H(D)$ 为恒非零的函数. 证明: 对任意 $p > 0$, 都有

$$\Delta|f(z)|^p = p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

注 我们需要回顾下复微分的一些基本内容. 在引入记号 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 后, 注意到 $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, 形式上我们可以视 z, \bar{z} 为独立的变量 (当然只能是形式上, 不然真正独立的话, 函数就成 \mathbb{C}^2 上的了). 这时候复变函数 $f(z)$ 可以视为 $f(z, \bar{z})$. 对于复合函数 $f \circ g$, 我们可以视为 $f(g(z, \bar{z}), \overline{g(z, \bar{z})})$. 类似于二元函数的复合求导法则, 我们有如下的公式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) \frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g\right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}. \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g\right) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

此外, 根据定义, 可以验证如下的等式:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}}, \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial g}{\partial z}}.$$

回忆在数分里, 对于二元函数 $f(x, y)$, 我们定义过一阶形式 $df = f_x dx + f_y dy$. 类似地, 如果定义 $dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$, 那么也有

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

这是一阶微分形式不变性在复微分情形下的自然延伸.

证明. 1. 根据调和算子的复微分形式, 计算可得

$$\begin{aligned} \Delta(u \circ \varphi) &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (u \circ \varphi) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ \varphi \right) \varphi' \right) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ \varphi \right) \varphi' + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi'}{\partial \bar{z}} \\ &= \left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} \circ \varphi \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \varphi' \\ &= (\Delta u \circ \varphi) |\varphi'|^2. \end{aligned}$$

2. 考虑函数 $u(w) = |w|^p$, 则 u 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上是无穷阶实可微的. 计算可得

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{w} \partial w} (w \bar{w})^{\frac{p}{2}} = 4 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \bar{w}^{\frac{p}{2}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial w} w^{\frac{p}{2}} \right) = p^2 |w|^{p-2}.$$

结合第一问可得

$$\Delta|f(z)|^p = \Delta(u \circ f)(z) = p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

注 从证明过程可以看到, 如果 p 是正偶数, 那么 $u(w) = |w|^p$ 在 \mathbb{C} 上无穷阶实可微, 从而这时第 2 问可以去掉 f 恒非零的限制. 我们回忆微分方程里学过如下定理:

定理. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为区域, $u \in C^2(D)$ 为 D 上的次调和函数, 即 $\Delta u \geq 0$, 那么只要 u 非常数, 则不可能在 D 内取得最大值. 特别地, 如果 D 是有界域, 且 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 次调和, 那么

$$\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u.$$

现在如果给定 \mathbb{C} 中区域 D , 以及 $f \in H(D)$. 那么根据第 2 问可得 $|f(z)|^2$ 是 D 上的次调和函数. 所以根据上述定理, 只要 f 非常数, 则 $f(z)$ 不会在 D 内取得最大模. 对于 D 有界且 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ 的情况, 则有

$$\max_{\bar{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|.$$

上面得到的结果称为全纯函数的最大模定理, 这里是借助次调和函数的最大值定理给出的证明. 在第四章, 我们会学习如何只从全纯函数的性质入手来证明这个重要的定理.

习题 2.7 (史济怀习题 2.2.18) 证明: 若 $u(x, y)$ 是 x, y 的调和多项式, 则

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)$$

是 \mathbb{C} 上的全纯函数, 并且对任意 $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$.

注 来讲讲这题的动机. 给定 \mathbb{C} 上的调和函数 u , 根据共轭调和函数的存在性, 我们知道存在整函数 f , 使得 $\operatorname{Re} f = u$. 现在可以形式上用 u 简单地表达出 f , 最终的结果并不会含有积分. 注意到 $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, 形式上, 我们可设 $\overline{f(z)} = g(\bar{z})$. 这样有

$$u(x, y) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} = \frac{f(x + iy) + g(x - iy)}{2}.$$

不妨设 $f(0)$ 为实数 (不然减掉一个常数就好, 反正最终的 f 本来就可以相差一个纯虚数), 并且假设 u 中的实变量可以替换为复变量, 那么

$$u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{f(z) + g(0)}{2} = \frac{f(z) + u(0, 0)}{2}.$$

这其实就是本题的最终结果. 这题就是针对 u 为多项式的情形给出严格证明.

证明. 全纯性是显然的, 下面证明 $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. 设

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{jk} x^j y^k, \quad a_{jk} \in \mathbb{R}.$$

代入 $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ 可得

$$u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{jk} \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^j \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^k \triangleq u(0, 0) + u_1(z) + \overline{u_1(z)} + u_2(z, \bar{z}).$$

其中, $u(0, 0) = a_{00}$ 为常数项, $u_1(z)$ 是关于 z 的实系数多项式, $u_2(z, \bar{z})$ 是每项都与 z, \bar{z} 有关的实系数多项式. 由展开式可得

$$u_1(z) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{jk} \left(\frac{z}{2}\right)^j \left(\frac{z}{2i}\right)^k - u(0, 0).$$

$$u_2(z, \bar{z}) = \sum_{j,k=1}^{m+n} b_{jk} z^j \bar{z}^k.$$

由于 u 是调和函数, 所以

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \bar{z}} = \sum_{j,k=1}^{m+n} jk b_{jk} z^{j-1} \bar{z}^{k-1}.$$

这说明 $jk b_{jk} = 0 \Rightarrow b_{jk} = 0, \forall 1 \leq j, k \leq m+n$, 所以 u_2 恒为零. 因此

$$u(x, y) = u(0, 0) + u_1(z) + \overline{u_1(z)}.$$

由 $u_1(z)$ 的定义式可得

$$u_1(z) = u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0) = \frac{f(z) - u(0, 0)}{2}.$$

代回即可得

$$u(x, y) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} = \operatorname{Re} f(z).$$

习题 2.8 (单值分支) 设 $F(z) = \sqrt[3]{z^2(1-z)}$, $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$. 证明: F 可以在 D 内取出全纯的单值分支. 如果 f 是 F 在 $(0, 1)$ 上岸取正值的单值分支, 计算 $f(-2)$ 和 $f'(-2)$.

证明. 任取 D 中一条逆时针定向的简单闭曲线 γ , 只需证明 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} F(z)$ 是 2π 的整数倍. 注意到 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1-z) = 2\pi$, 所以

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} F(z) = \frac{2}{3} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z + \frac{1}{3} \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1-z) = 2\pi.$$

即证. 下计算 $f(-2)$ 和 $f'(-2)$.

首先由定义可得 $|f(z)| = |z|^{\frac{2}{3}} |1-z|^{\frac{1}{3}}$, 所以 $|f(-2)| = \sqrt[3]{12}$. 我们选取从 $\frac{1}{2}$ 的上岸到 -2 的简单曲线 C , 如图4所示. 那么有 $\Delta_C \operatorname{Arg} z = \pi$, $\Delta_C \operatorname{Arg}(1-z) = 0$. 所以

$$\Delta_C \operatorname{Arg} F(z) = \frac{2}{3} \Delta_C \operatorname{Arg} z + \frac{1}{3} \Delta_C \operatorname{Arg}(1-z) = \frac{2\pi}{3}.$$

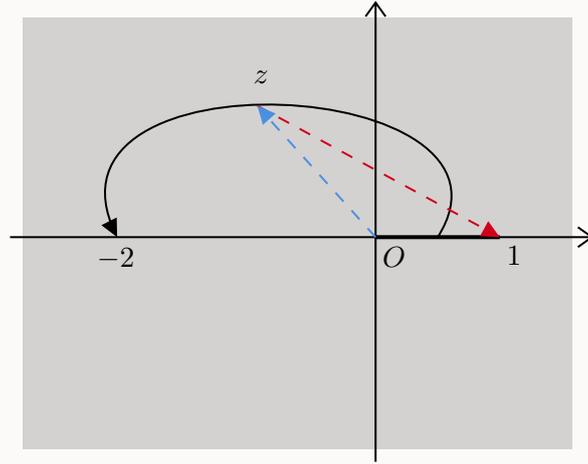


图 4

由于 f 在 $(0, 1)$ 上岸取正值, 辐角为零, 所以 $\arg f(-2) = \frac{2\pi}{3}$. 综上可得 $f(-2) = \sqrt[3]{12}e^{i\frac{2\pi}{3}}$. 另一方面, 由定义可得 $f(z)^3 = z^2(1-z)$, 两边求导可得

$$3f(z)^2 f'(z) = 2z - 3z^2.$$

代入 $z = -2$ 以及 $f(-2)$ 的值, 可得

$$f'(-2) = \frac{16}{3 \times 12^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

3 一些补充内容

3.1 黎曼球的进一步讨论

回忆我们曾构造过 \mathbb{R}^3 中的单位球面 S^2 与扩充复平面 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 之间的一一对应, 即球极投影. 现在我们希望借助这个对应关系, 引入 \mathbb{C}_∞ 上的度量结构, 进而导出 \mathbb{C}_∞ 上的拓扑.

首先注意到 S^2 作为 \mathbb{R}^3 的子集, 自然继承了欧氏度量, 即两点间的线段距离. 现在我们任取 $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, 它们的球面像记为 $Z = (x_1, x_2, x_3), W = (y_1, y_2, y_3) \in S^2$. 一个很自然的定义是 $d(z, w) \triangleq |Z - W|$. 根据球极投影的一一性不难验证 d 是正定、对称的, 并且满足三角不等式, 所以 d 确实是 \mathbb{C}_∞ 上的度量. 下面我们计算 d 的显式表达式.

如果 z, w 都是复数, 那么根据球极投影表达式可得

$$\begin{aligned} d(z, w) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \sqrt{2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)} \\ &= \sqrt{2 \left(1 - \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \frac{w + \bar{w}}{1 + |w|^2} - \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)} \frac{w - \bar{w}}{i(1 + |w|^2)} - \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2} \right)} \\ &= \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}. \end{aligned}$$

另一方面, 自然有 $d(\infty, \infty) = 0$. 且对于 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$d(z, \infty) = \sqrt{2 - 2x_3} = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

这样就得到了度量空间 (\mathbb{C}_∞, d) , 这同时导出了 \mathbb{C}_∞ 上的度量拓扑. 这时, \mathbb{C}_∞ 和 \mathbb{S}^2 作为两个拓扑空间, 它们是同胚的. 所以 \mathbb{C}_∞ 也是紧致的.

下面我们来看看一个新的空间. 在几何学基础里, 我们学习过实射影平面 \mathbb{RP}^2 , 它定义为 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 在等价关系

$$\vec{X} \sim \vec{Y} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ 使得 } \vec{X} = \lambda \vec{Y}$$

下的等价类全体. 此外我们知道, \mathbb{RP}^2 还可以视为将单位球面 \mathbb{S}^2 的每对对径点“粘合为”一个点得到的空间, 亦即 $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / (\vec{X} \sim -\vec{X})$. 现在类似地引入复射影直线 \mathbb{CP}^1 . 它定义为 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 在等价关系

$$(z, w) \sim (\xi, \zeta) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \text{ 使得 } (z, w) = \lambda(\xi, \zeta)$$

下的等价类全体. 在 \mathbb{CP}^1 上, 有自然诱导的商拓扑. 现在我们希望刻画 \mathbb{CP}^1 的拓扑结构, 比如: 我们知道在拓扑意义下 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{C} 是相同的, 那么是否 \mathbb{RP}^2 和 \mathbb{CP}^1 也是相同的?

我们下面要推导的是一个重要的结论: 复射影直线 \mathbb{CP}^1 与黎曼球 \mathbb{S}^2 是拓扑同胚的, 这样, 它与 $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / (\vec{X} \sim -\vec{X})$ 在拓扑意义下也是不相同的⁵. 注意到我们已说明了 \mathbb{C}_∞ 与 \mathbb{S}^2 同胚, 只需要验证 \mathbb{C}_∞ 和 \mathbb{CP}^1 同胚就好. 而映射是相当自然的:

$$\varphi: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}_\infty, [z : w] \mapsto \frac{z}{w}.$$

这里我们约定 $\frac{1}{0} = \infty \in \mathbb{C}_\infty$. 因为 \mathbb{CP}^1 的拓扑比较复杂, 这里我们只验证 φ 是个双射.

1. 良定性: 首先 z, w 不能全为零, 所以 $\frac{w}{z}$ 是有意义的. 另一方面, 如果 $[z : w] = [\xi : \zeta]$, 那么存在非零复数 λ 使得 $z = \lambda\xi, w = \lambda\zeta$, 所以 $w/z = \zeta/\xi$.
2. 满射: 首先 $\varphi([1 : 0]) = \infty$, 并且任给复数 $z \in \mathbb{C}$, 有 $\varphi([z : 1]) = z$.
3. 单射: 如果 $w/z = \zeta/\xi$, 若都等于 ∞ , 则 $z = \xi = 0$, 这时 $[0 : w] = [0 : \zeta]$. 若都为复数, 则取 $\lambda = w/\zeta$ 为非零复数, 从而 $(z, w) = \lambda(\xi, \zeta)$.

从上面的证明可以看到, \mathbb{CP}^1 也是复平面 \mathbb{C} 的一点紧致化, 其中 \mathbb{CP}^1 的“无穷远点”就是 $[1 : 0]$ 这一点. 回忆在几何学基础里学过, \mathbb{RP}^2 中的所有无穷远点构成了无穷远直线 $\{[x : y : 0] : x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{R}_\infty \cong \mathbb{S}^1$, 实际上 \mathbb{RP}^2 也可以等价定义为平面 $\mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C})$ 在加上 \mathbb{RP}^1 后的紧致化. 这也是 \mathbb{RP}^2 与 \mathbb{CP}^1 的相似点.

3.2 多值函数与黎曼面简介

这一节我们从多值函数的角度简要介绍一下黎曼面的概念, 这也正是黎曼最初引入黎曼面的动机. 囿于同学们目前的知识所限, 本节正文以描述和图示为主, 不会涉及到严格的定义.

⁵这里其实也是比较直观的感受, 毕竟我们没严格证黎曼球和那个粘合后的空间不同胚. 如果想认真真证明, 一个经典的方法是利用定向性: \mathbb{CP}^1 作为复流形是可定向的, 而 \mathbb{RP}^2 则不然.

黎曼面的定义源于对多值函数的单值化, 我们可以从多值函数 $\text{Log } z$ 谈起. 对于指数函数 e^z , 我们知道, 对任意整数 k , $D_k = \{z \in \mathbb{C} : 2k\pi < \text{Im } z < 2k\pi + 2\pi\}$ 是 e^z 的单叶性域, 并且 e^z 把 D_k 一一地映为 $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. 并且, e^z 把 $\text{Im } z = 2k\pi$ 的上岸映为正实轴的上岸, 把 $\text{Im } z = 2k\pi + 2\pi$ 的下岸映为正实轴的下岸. 现在 we 希望通过调整 e^z 的像集为合适的集合 S , 使之成为 \mathbb{C} 到 S 的一一映射, 进而 $\text{Log } z$ 就是 S 到 \mathbb{C} 的一一映射了, 这就完成了多值函数的单值化.

这个过程怎么实现? 我们可以把所有 D_k 映过去的像视为可数个去掉割线 $[0, \infty)$ 的复平面, 对应为 $\Omega_k (k \in \mathbb{Z})$. 注意到 D_k 的上边界与 D_{k+1} 的下边界是相同的, 均为 $\text{Im } z = 2k\pi + 2\pi$. 为了保证 $e^z : \mathbb{C} \rightarrow S$ 有最基本的连续性, 所以我们将 Ω_k 的切口上边沿与 Ω_{k+1} 的切口下边沿粘合在一起. 这样得到的“曲面” S 是符合要求的⁶. 注意这里的切口指的是正实轴 $(0, \infty)$, 我们不会把 0 这一点也粘进去, 因为 0 并不在 e^z 的值域中.

上面给“曲面”打了引号, 这是因为 S 并不是我们熟知的 \mathbb{R}^3 中的欧氏曲面: 它并不能很好地嵌入 \mathbb{R}^3 中. 这种新的曲面被起名为黎曼曲面, 或者简称黎曼面. 尽管如此, 为方便直观感受, 我们还是可以大致画出 S 的图像, 如图5所示. 这里每一层的圆盘都代表对应的 Ω_k .

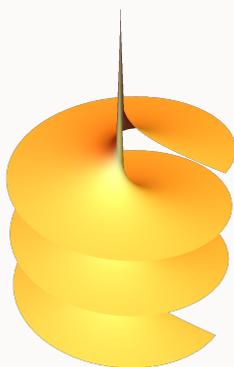


图 5: $\text{Log } z$ 黎曼面的三维图示, 是群头像的薯塔喵

或者, 有一种简记的办法: 如果我们把所有的 Ω_k 叠放在一起, 从正实轴方向来看, 可以简画为可数个中间断掉的直线, 左边表示下边沿, 右边表示上边沿. 而我们又要粘接 Ω_k 的切口下边沿和 Ω_{k+1} 的切口下边沿, 所以我们将第 k 条直线的左半段与第 $k+1$ 条直线的右半段连接起来, 这就是所得 $\text{Log } z$ 的黎曼面 S 的简单图示, 如图6.

对于上述 $\text{Log } z$ 的黎曼面, 我们把每个 Ω_k 称为一个叶, 那么 $\text{Log } z$ 的黎曼面有着可数多个

⁶这里有个问题, 什么叫把上边沿和下边沿粘合? 可以这样通俗理解: 从集合来看, 有

$$S = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k \sqcup \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} L_k.$$

这里 L_k 为可数个正实轴 $(0, \infty)$. 任给一点 $x_0 \in L_k$, 当 $z \in \Omega_k$ 从割线下方趋近于 $x_0 \in (0, \infty)$ 时, 最终的极限即为 $x_0 \in L_k$; 而当 $z \in \Omega_{k+1}$ 从割线上方趋近于 $x_0 \in (0, \infty)$ 时, 最终的极限也为 $x_0 \in L_{k+1}$. 可以看到, L_k 就对应直线 $\text{Im } z = 2k\pi + 2\pi$ 在 e^z 下的像, 这就保证了 e^z 连续、一一地把 \mathbb{C} 映为 S .

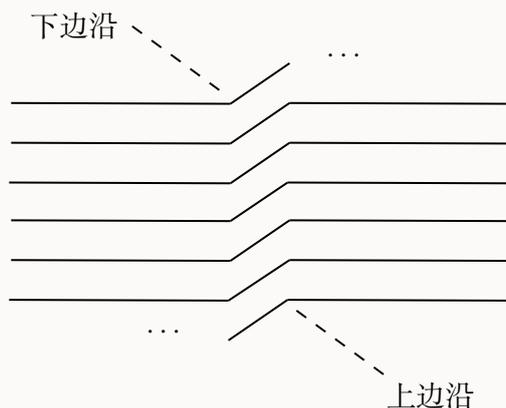


图 6: $\text{Log } z$ 黎曼面的简单图示

叶, 所以我们也称 $\text{Log } z$ 的反函数 e^z 是一个可数叶函数⁷. 这样可以解释一个定义上的问题: 为什么在复变函数里, 要称单射为单叶函数? 这是因为单叶函数的反函数是个单值函数, 它的黎曼面只有一叶. 而任给复数 w , 在函数 e^z 下有可数个原像, 正等于黎曼面的叶数. 值得指出的是, 尽管我们是先选定了 e^z 的若干单叶性域, 再构造 $\text{Log } z$ 的黎曼面, 但 $\text{Log } z$ 的黎曼面 (在黎曼面同构意义下) 是唯一的, 不依赖于单叶性域的选取. 特别地, 黎曼面的叶数也是取决于函数本身的.

对于更一般的多值函数, 我们可以类似上述过程构造对应的黎曼面. 一般的方法是: 先考虑该多值函数的反函数 $f(z)$, 并把 $f(z)$ 的定义域划分为 $f(z)$ 的若干个单叶性域, 使得每个单叶性域的像都是去掉若干条割线的复平面 (称之为 $f(z)$ 的基本域), 然后把把这些单叶性域的像按照对应的边沿粘接起来. 下面给一些其他的例子.

例 3.1 考虑幂函数 z^n , $n \geq 2$ 为正整数. 其反函数为多值函数 $z^{\frac{1}{n}}$. 由于角状域

$$D_k = \left\{ z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, \frac{2k\pi}{n} < \theta < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

是 z^n 的单叶性域, 像域均为 $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, 分别记为 Ω_k . 注意到 D_k 的上边射线被映为正实轴下边沿, 而下边射线被映为正实轴上边沿, 所以将 Ω_k 的割线下边沿和 Ω_{k+1} 的割线上边沿粘接起来, 就可以得到 $z^{\frac{1}{n}}$ 的黎曼面. 特别地, 我们要粘接 Ω_{n-1} 的割线下边沿和 Ω_0 的割线上边沿. 黎曼面的大致图像如下所示, 它有 n 个叶.

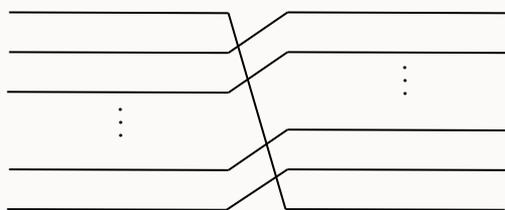


图 7: $z^{\frac{1}{n}}$ 黎曼面的简单图示

值得指出的是: 这个黎曼面并不包含 0 在 z^n 下的像. 这是因为任给非零复数 w , 在函数 z^n 下都恰有 n 个原像. 唯独 0 在 z^n 下只有一个原像 $z = 0$, 这样的点是不好的, 其原像个数与我

⁷如果视 e^z 为 \mathbb{C} 到 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的复叠映射, 那么它在拓扑意义下也是可数多叶的, 这是比较本质的性质. 事实上, 在黎曼曲面课程中, 研究黎曼曲面上全纯映射的复叠性质是一个基础而重要的课题.

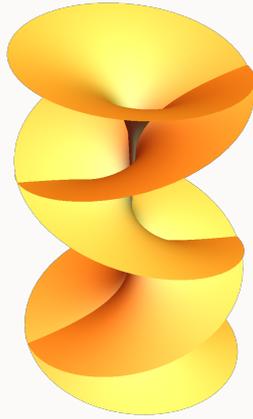


图 8: $z^{\frac{1}{n}}$ 黎曼面的三维图示

们的黎曼面叶数并不吻合, 所以绘制黎曼面时不会考虑这样讨厌的点. 不过有一点比较好: 黎曼面理论中发现, 对于一般的全纯映射, 这样的点 (往往称为分歧点) 不会太多, 其构成的点集一定是离散的.

例 3.2 考虑余弦函数 $\cos z$, 其反函数是多值函数 $\operatorname{Arccos} z$. 其表达式为

$$\operatorname{Arccos} z = i \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

我们考虑带状域 $D_k = \{z \in \mathbb{C} : k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi\}$, 其中 k 为整数. 由于

$$\cos z - \cos w = 2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{w-z}{2},$$

故 D_k 是 $\cos z$ 的单叶性域. 下面求解 D_k 在 $\cos z$ 下的像. 我们注意到 $\cos z$ 可以拆解为 Rokovsky 函数 $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ 和指数函数 e^{iz} 的复合. 当 k 为偶数时, 有如下的映射关系:

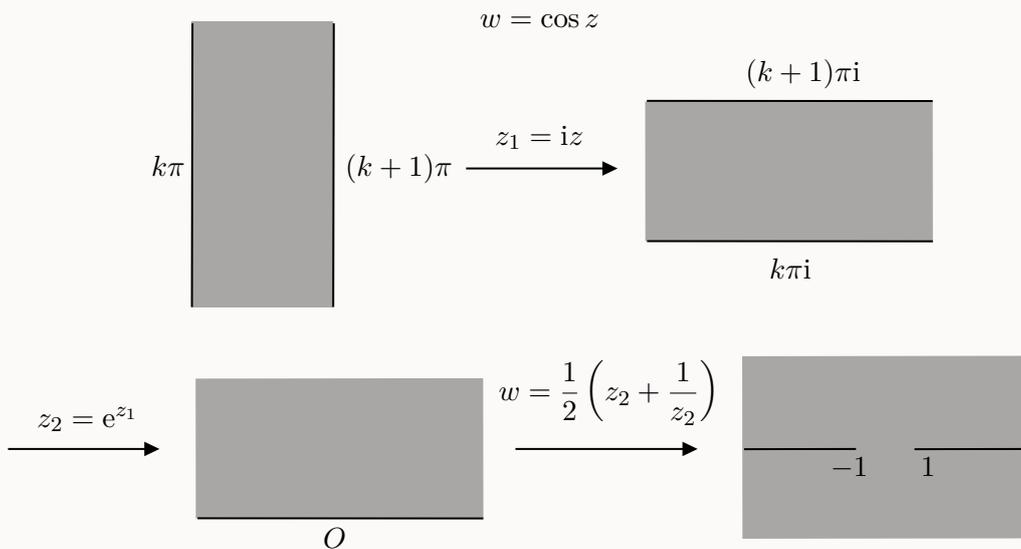


图 9

追踪可得 $w = \cos z$ 把 D_k 的左边界映为割线 $[1, +\infty)$, 其中左边界的上半段被映为割线的下边沿, 下半段被映为切口的上边沿. 而右边界被映为割线 $(-\infty, -1]$, 其中右边界的上半段被映为割线的下边沿, 下半段被映为切口的上边沿. 类似地, 如果 k 为奇数, 可得像域是相同的, 但此时 $w = \cos z$ 把 D_k 的左边界映为割线 $(-\infty, -1]$, 其中左边界的上半段被映为割线的上边沿, 下半段被映为切口的下边沿. 而右边界被映为割线 $[1, +\infty)$, 其中右边界的上半段被映为割线的上边沿, 下半段被映为切口的下边沿. 综上所述, 可以绘制出 $\text{Arccos } z$ 的黎曼面:

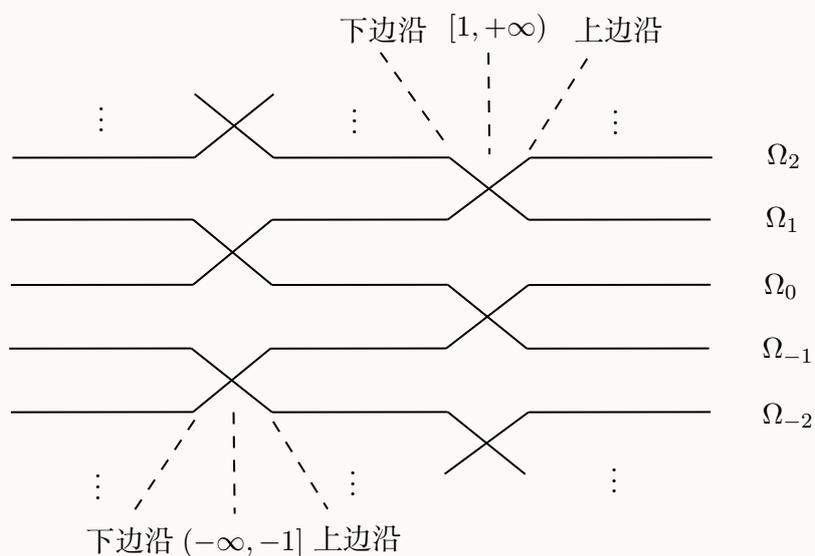


图 10: $\text{Arccos } z$ 黎曼面的简单图示

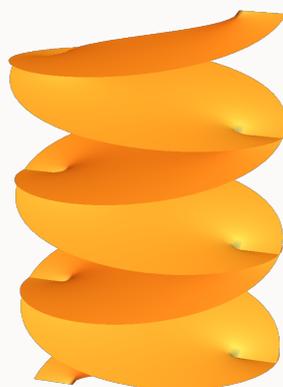


图 11: $\text{Arccos } z$ 黎曼面的三维图示

这里, 由于每个基本域在 $w = \cos z$ 下的像 $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ 具有两条割线, 所以在简单图示里我们要绘制出两个切口.