

中国科学技术大学
2023—2024学年第二学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分

所在院系 姓名 学号

考试时间: 2024 年 6 月 21 日下午 14:30–16:30; 可使用简单计算器

一、(30分, 每小题3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

(1) 设事件 A 和 B 相互独立且 $P(A) = P(B)$, 若 $P(A \cup B) = 0.64$, 则 $P(A) =$ _____.

(2) 已知现在的电子邮件里有一半是垃圾邮件, 而某软件能以 99% 的概率正确识别垃圾邮件, 但也会以 5% 的概率误将常规邮件识别为垃圾邮件. 若一封电子邮件被该软件识别为垃圾邮件, 则它其实为常规邮件的概率是_____.

(3) 设 x, y 为任意给定的实数, 对独立的随机变量 X, Y , 下列中不一定正确的是()
(A) 若 $P(Y = y) > 0$, 则 $P(X \leq x | Y = y) = P(X \leq x)$ (B) X^2 与 Y^2 相互独立
(C) 随机事件 $\{X = x\}$ 与 $\{Y = y\}$ 相互独立 (D) X 与 Y 不相关

(4) 将 n 根短绳的 $2n$ 个端头随机两两连接, 以 a_n 表示最终所连成圈的个数的期望 (注意圈也可由多根绳子构成), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / \ln n) =$ ()
(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

(5) 设 X, Y 为相互独立且服从均匀分布 $U(0, 1)$ 的随机变量. 若分别记随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$, $W = \min\{X, Y\}$, 则协方差 $\text{Cov}(Z, W) =$ _____.

(6) 设随机变量 X_n 服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, X_n/n 依概率收敛到_____.

(7) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 且以 \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差, 则下列统计量中服从 F 分布的是()
(A) $(n-1)\bar{X}^2/S^2$ (B) $n\bar{X}^2/S^2$ (C) $(n+1)\bar{X}^2/S^2$ (D) \bar{X}^2/S^2

(8) 对一给定总体的某个参数的无偏估计, 下述表述一定正确的是()
(A) 无偏估计优于有偏估计 (B) 无偏估计的个数至多有限个
(C) 无偏估计一定存在 (D) 若总体期望存在但未知, 则样本均值为无偏估计

(9) 已知一设备生产出的零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个产品, 测得样本均值和样本标准差分别为 20 厘米和 0.1 厘米, 则方差 σ^2 的置信系数为 0.9 的置信区间为_____ (精确到小数点后三位).

(10) 设 Z_n 为服从 χ_n^2 分布的随机变量, 若在 3×5 列联表独立性检验中, 由样本求得的检验统计量的值为 z_0 , 则该假设检验的 p 值大约为().
(A) $P(Z_8 \geq z_0)$ (B) $P(Z_8 \leq z_0)$ (C) $P(Z_{14} \geq z_0)$ (D) $P(Z_{14} \leq z_0)$

二、(18分) 设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为 $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}, x, y > 0$.

(1) 分别求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$.

(2) 通过计算说明在给定 $X = x (x > 0)$ 的条件下 Y 服从指数分布, 并指出参数.

(3) 计算期望 $EY, E[Y|X]$ 和 $E[XY]$.

三、(18分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且分别服从参数为 λ 和 μ 的指数分布. 记随机变量 $Z = \min\{X, Y\}$.

(1) 试求概率 $P(Z = X)$.

(2) 试求随机变量 $W = \max\{X - Y, 0\}$ 的分布函数 $F_W(w)$.

(3) 问 Z 是否与示性变量 $I_{\{X < Y\}}$ (亦即与随机事件 $\{X < Y\}$) 独立? 需写出证明过程.

四、(20分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为抽自总体 X 的一组简单随机样本, 且 X 的概率密度函数为 $f(x; \theta) = -\theta^x \ln \theta \cdot I_{(0, \infty)}(x)$, 其中 $0 < \theta < 1$ 为一未知参数.

(1) 试求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$.

(2) 试求 $h(\theta) = (\ln \theta)^{-1}$ 的最大似然估计 \hat{h} .

(3) 上一小题中, 估计量 \hat{h} 是否为无偏估计? 证明你的结论.

(4) 试求常数 $b > 0$, 使得对任一实数 x , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\sqrt{n}(\hat{h} - (\ln \theta)^{-1})}{b} \leq x \right) = \Phi(x)$$

成立, 其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数.

五、(14分) 从甲乙两班中随机抽取部分同学, 获得他们的《概率论与数理统计》期末考试成绩如下:

甲	85	72	94	69	88	87	64	74	63	86	99	91	82
乙	93	96	70	82	71	99	84	95	78	68	77	88	

假设甲班和乙班的学生成绩独立地分别服从 $N(\mu_1, 195)$ 和 $N(\mu_2, 120)$ 分布, 其中 μ_1, μ_2 均未知.

(1) 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 对如下检验问题做出决策:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 = -1.8.$$

(2) 在 H_1 成立条件下计算上述检验的功效函数值.

附录 上分位数: $u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.645, u_{0.1} = 1.285, u_{0.2} = 0.845, u_{0.3} = 0.525, t_{23}(0.05) = 1.7139, t_{23}(0.025) = 2.0687, t_{24}(0.05) = 1.7109, t_{24}(0.025) = 2.0639, \chi_{15}^2(0.05) = 24.996, \chi_{15}^2(0.95) = 7.261, \chi_{15}^2(0.10) = 22.307, \chi_{15}^2(0.90) = 8.547$

(完)

参考答案

一、 每小题 3 分.

$\frac{2}{5}$ $\frac{5}{104}$ D B $\frac{1}{36}$ 1 B D [0.006, 0.021] A

二、 每小题 6 分.

(1) 由联合密度和边缘密度的关系可知(注: 变量取值范围缺失或出错, 一处扣 1 分),

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} x e^{-x(y+1)} dy = e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$f_2(y) = \int_0^{\infty} x e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{(y+1)^2}, \quad y > 0.$$

(2) 由条件密度函数公式和 (1), 可知在 $X = x > 0$ 的条件下 Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{x e^{-x(y+1)}}{e^{-x}} = x e^{-xy}, \quad y > 0,$$

即此时 Y 的条件分布是参数为 x 的指数分布.

(3) 由 (1) 可知, $EY = \int_0^{\infty} \frac{y}{(y+1)^2} dy = \infty$, 即期望 EY 不存在. 而由 (2) 及指数分布的性质可知, 对任一 $x > 0$, 有 $E[Y|X = x] = \frac{1}{x}$, 故 $E[Y|X] = \frac{1}{X}$. 再由全期望公式,

$$E[XY] = E[E(XY|X)] = E[XE(Y|X)] = E\left[X \cdot \frac{1}{X}\right] = 1.$$

上述结果也可由 $E[XY] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy f(x, y) dx dy$ 直接计算得出.

三、 每小题 6 分.

(1) 易知 $P(Z = X) = P(X < Y)$, 故由连续型全概率公式可知

$$P(Z = X) = \int_0^{\infty} P(Y > x|X = x) f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

(2) 首先由 (1) 可知, $P(W = 0) = P(X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. 而对任一 $w > 0$,

$$P(W > w) = P(X - Y > w) = \int_0^{\infty} P(X > y + w) \mu e^{-\mu y} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \mu e^{-\lambda(y+w) - \mu y} dy = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda w}.$$

从而, 分布函数 $F_W(w)$ 为 (注意下式的完整性, 不完整至少扣 1 分)

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0; \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, & w = 0; \\ 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda w}, & w > 0. \end{cases}$$

(3) 独立. 我们只需证明对任一 $z > 0$, 事件 $\{Z > z\}$ 与 $\{X < Y\}$ 相互独立即可. 由

$$P(X < Y, Z > z) = P(z < X < Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)z} = P(X < Y) \cdot P(Z > z),$$

即知结论成立. (结论 2 分, 证明过程 4 分.)

四、 每小题 5 分.

(1) 由于总体期望

$$EX = \int_0^{\infty} -x\theta^x \ln \theta dx = -\frac{1}{\ln \theta},$$

可知 θ 的矩估计 $\hat{\theta} = \exp\{-1/\bar{X}\}$, 其中 \bar{X} 为样本均值.

(2) 先求 θ 的最大似然估计. 由似然函数 $L(\theta) = -\theta^{\sum_{i=1}^n X_i} (\ln \theta)^n$ 知对数似然函数为

$$l(\theta) = -\ln \theta \sum_{i=1}^n X_i - n \ln \ln \theta.$$

令

$$\frac{\partial l}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{\theta \ln \theta} = 0,$$

再化简可得 $\bar{X} + \frac{1}{\ln \theta} = 0$. 由此可知, θ 的最大似然估计也为 $\exp\{-1/\bar{X}\}$. 从而, $h(\theta) = (\ln \theta)^{-1}$ 的最大似然估计 $\hat{h} = -\bar{X}$.

(3) 为无偏估计. 这是因为由 (1) 和 (2) 可知,

$$E[\hat{h}] = -E[\bar{X}] = -EX = (\ln \theta)^{-1}.$$

(4) 由独立同分布场合下的中心极限定理(或 Lindeberg-Lévy CLT)可知 $b = \sqrt{\text{Var}(X)}$. 而由

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} -x^2 \theta^x \ln \theta dx = \frac{2}{\ln^2 \theta}$$

及 (1) 可知, $\text{Var}(X) = 1/(\ln^2 \theta)$. 故 $b = -(\ln \theta)^{-1}$.

五、 每小题 7 分.

(1) 首先通过计算可以得到两班成绩的样本均值分别为 $\bar{x} = 81.0769$, $\bar{y} = 83.4167$. 在原假设 H_0 成立条件下, 检验统计量

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{195}{13} + \frac{120}{12}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{5} \sim N(0, 1).$$

故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 拒绝域为 $T < -u_{0.05} = -1.645$. 代入数值后计算可得 $T = -0.4679 > -1.645$, 从而我们应接受 H_0 .

(2) 在备择假设 H_1 成立下, 检验统计量 $T \sim N(-1.8, 1)$, 故功效函数值为

$$\begin{aligned} P_{H_1}(T < -u_{0.05}) &= P_{H_1}\left(\frac{\bar{x} - \bar{y}}{5} < -u_{0.05}\right) \\ &= P_{H_1}\left(\frac{\bar{x} - \bar{y} + 1.8}{5} < \frac{1.8}{5} - 1.645\right) \\ &= \Phi(-1.285) \\ &= 1 - \Phi(1.285) \\ &= 0.1. \end{aligned}$$