线性代数B1期中复习及知识点整理

卓展鹏

2024 年 5 月 4 日

1 考试中可以使用的定理及命题

老师上课讲过的定理、书本上的定理(包括命题、推论等)一定是可以直接用的.一般来说,例题的结论是不能直接使用的.

定理: 对线性方程组进行初等变换,方程组的解不改变.类似的,对线性方程组的增广系数矩阵做初等变换,对应的线性方程组的解不变.

定理: (P74)矩阵的加法与数乘具有如下性质:
(1)加法交换律
(2)加法结合律
(3)零矩阵存在
(4)负矩阵存在
(5)数乘左分配律
(6)数乘右分配律
(7)数乘结合律
(8)数乘单位元存在

定理: (P77)矩阵的乘法具有如下性质:
(1)乘法结合律
(2)乘法单位元存在(即单位阵I_n)
(3)左分配律
(4)右分配律
(5)关于数乘结合

定理: (P79)对任意的n阶可逆方阵A, B,都有
(1)$(A^{-1})^{-1} = A$.
(2)$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
(3)$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

定理: (P81)矩阵的转置运算具有如下性质:
(1)$(A + B)^T = A^T + B^T$.
(2)$(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
(3)$(AB)^T = B^T A^T$.
(4)$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

定理: (P81)矩阵的迹有如下性质:
(1)$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.
(2)$tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.
(3)$tr(A^T) = tr(A), tr(\bar{A}) = tr(\bar{A})$.
(4)$tr(AB) = tr(BA)$.

定理: (P84)矩阵的分块运算具有如下性质:
(1)设$A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{r\times s}$,则 $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r\times s}$.
(2)设$A = (A_{ij})_{r\times s}$,则 $\lambda A = (\lambda A_{ij})_{r\times s}$.
(3)设$A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{s\times t}$,则 $AB = (C_{ij})_{r\times t}$,其中 $C_{ij} = \Sigma_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj}$.
(4)设$A = (A_{ij})_{r\times s}$,则 $A^T = (A_{ji}^T)_{s\times r}$.
(5)设$A = (A_{ij})_{r\times s}$,且每个 A_{ii}是方阵,则 $tr(A) = \Sigma_{i=1}^{r} tr(A_{ii})$.
(6)当$A_1, \cdots, A_r$都可逆时,$(diag(A_1, \cdots, A_r))^{-1} = diag(A_1^{-1}, \cdots, A_r^{-1})$.

定理: (P87)设A为 n阶方阵，则

$$det(A) = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki} = \Sigma_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} M_{ki}, \forall k$$

类似的,行列式也可以按照列展开.

定理: (P89)行列式具有如下性质:
性质1:行列互换,行列式不变.即 $det(A) = det(A^T)$
性质2:用一个数乘以行列式的一行(或一列)相当于用这个数乘以行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质4:如果行列式中有两行(或两列)相同,那么行列式为0.

性质5:如果行列式中有两行(或两列)成比例,那么行列式为0.

性质6:把一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式不变.

性质7:对换行列式中两行(列)的位置,行列式反号.

定理: (P93)设A为 n阶方阵，则

$$det(A) = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}$$

.

定理: (P95)设A, B是n阶方阵,则

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

.

定理: (P96)设$A = (A_{ij})$为 n阶方阵,引入

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

.其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式,称A^*为A的伴随方阵.则

$$A^*A = AA^* = det(A)I$$

.

定理: (P97)方阵A可逆的充要条件为$det(A) \neq 0$,且当A可逆时,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}A^*$$

.

定理: (P101)当系数矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$的行列式不等于零时,方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

有唯一解

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\tfrac{\Delta_1}{\Delta}, \tfrac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, \tfrac{\Delta_n}{\Delta})$$

其中$\Delta = det(A)$,Δ_i是将A的第i列换成$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$后所得到的方阵的行列式,$i = 1, 2, \cdots, n$.

定理: (P103)对矩阵做初等行变换相当于在矩阵的左边乘上一个相应的初等方阵;对矩阵做初等列变换,相当于在矩阵的右边乘上一个相应的初等方阵.

定理: (P104)对任意的矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$,存在一系列m阶初等方阵$P_1, \cdots, P_s$与n阶初等方阵$Q_1, \cdots, Q_t$,使得

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中$r = rank(A) \geqslant 0$.

定理: (P105)对任意的矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$,存在 m阶可逆方阵P与n阶可逆方阵Q,使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中$r = rank(A) \geqslant 0$.

定理: (P105)方阵A可逆的充要条件是A可以分解为一系列初等方阵的乘积.

定理: (P109)设A, B是$m\times n$矩阵,则A与B相抵的充要条件是$rank(A) = rank(B)$.

定理: (P109)设A是$m\times n$矩阵,P, Q分别是m, n阶可逆方阵,则$rank(PAQ) = rank(A)$.

命题: (P110)$rank(A^T) = rank(A)$.

命题: (P110) $rank \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$.

引理: (P110)设A是$m\times n$矩阵,P, Q分别是m, n阶初等方阵.若A的所有k阶子式都为零,则PA与AQ的所有k阶子式也为零.

定理: (P110)矩阵的非零子式的最大阶数等于矩阵A的秩.

定理: (P119) 设$a_1, a_2, \cdots, a_m \in F^n$是一组给定的$n$维数组向量.则集合

$$< a_1, a_2, \cdots, a_m >= \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m | \lambda_i \in F, i = 1, 2, \cdots\}$$

是F^n的子空间,称为由向量组$a_1, a_2, \cdots, a_m$生成的子空间.

定理: (P121) 给定向量组$a_1,\cdots,a_m\in F^n, m\geqslant 2$.则$a_1,\cdots,a_m$线性相关当且仅当$\exists i\in\{1,2,\cdots,m\}$,满足

$$<a_1,\cdots,a_m>=<a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_m>.$$

.

定理: (P122) 给定向量组$a_1,\cdots,a_m\in F^n, m\geqslant 2$.则$a_1,\cdots,a_m$线性相关当且仅当存在不全为零的常数$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,使得

$$\Sigma_{i=1}^m\lambda_i a_i=0$$

.

定理: (P122) 给定向量组$S_1=\{a_{i_1},\cdots,a_{i_k}\}$是向量组$S=\{a_1,\cdots,a_m\}$的一个子集.如果 S_1线性相关,则S也线性相关;如果S线性无关,则S_1也线性无关.

定理: (P122) 设$a_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in F^n, i=1,2,\cdots,m$.用$A$表示以$a_1,\cdots,a_m$为行构成的$m\times n$阶矩阵.则$a_1,\cdots,a_m$线性相关当且仅当关于$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$的齐次线性方程组

$$A^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=0$$

有非零解.

推论: (P123)设 $a_1,\cdots,a_m\in F^n$是一组数组向量.则
(1)若$m>n$,则$a_1,\cdots,a_m$必然线性相关.
(2)若$m=n$,则$a_1,\cdots,a_m$线性相关当且仅当 $det(A)=0$.

定理: (P124)设 $a_i=(a_{i1},\cdots,a_{ir})\in F^r, i=1,2,\cdots,m$.它们的加长向量组为 $b_i=(a_{i1},\cdots,a_{ir},\cdots,a_{in})\in F^n(n>r), i=1,2,\cdots,m$.则有
(1)若$a_1,\cdots,a_m$线性无关,则$b_1,\cdots,b_m$也线性无关.
(2)若$b_1,\cdots,b_m$线性相关,则 $a_1,\cdots,a_m$也线性相关.

定理: (P124)设 $a_1,\cdots,a_m\in F^n$为一组列向量,$A=(a_1,\cdots,a_m)$是以$a_1,\cdots,a_m$为列构成的$n\times m$阶矩阵.A经过一系列的初等行变换为矩阵$B=(b_1,\cdots,b_m)$.则
(1)$a_1,\cdots,a_m$线性相关(无关)当且仅当$b_1,\cdots,b_m$线性相关(无关).
(2)$a_{i_1},\cdots,a_{i_r}$为 $a_1,\cdots,a_m$的极大无关组当且仅当 $b_{i_1},\cdots,b_{i_r}$为 $b_1,\cdots,b_m$的极大无关组.

定理: (P127)向量组 $a_1,\cdots,a_m$与$b_1,\cdots,b_l$等价当且仅当

$$<a_1,\cdots,a_m>=<b_a,\cdots,b_l>$$

定理: (P127)一个向量组与它任何一个极大无关组等价.

推论: (P127)向量组的任何两个极大无关组彼此等价.

定理: (P127)设 $a_1,\cdots,a_m\in F^n$.则 $a_{i_1},\cdots,a_{i_r}$是$a_1,\cdots,a_m$的一个极大无关组,当且仅当$a_{i_1},\cdots,a_{i_r}$线性无关且

$$<a_{i_1},\cdots,a_{i_r}>=<a_1,\cdots,a_m>$$

.

定理: (P128)若两个分别线性无关的向量组$\{a_1,\cdots,a_r\},\{b_1,\cdots,c_s\}$等价,则$r=s$.

推论: (P128)若 $a_{i_1},\cdots,a_{i_r}$与 $a_{j_1},\cdots,a_{j_s}$是 $a_1,\cdots,a_m$的两个极大无关组,则$r=s$.

定理: (P129)设向量$a_1,\cdots,a_r\in F^n$,向量$b_1,\cdots,b_s\in F^n$,则有
(1)$a_1,\cdots,a_r$线性无关当且仅当 $rank(a_1,\cdots,a_r)=r$.
(2)$a_1,\cdots,a_r$线性相关当且仅当 $rank(a_1,\cdots,a_r)<r$.
(3)若$\{b_1,\cdots,b_s\}$可以用$\{a_1,\cdots,a_r\}$线性表示,则 $rank(b_1,\cdots,b_s)\leqslant rank(a_1,\cdots,a_r)$.
(4)若$\{b_1,\cdots,b_s\}$与 $\{a_1,\cdots,a_r\}$等价,则 $rank(b_1,\cdots,b_s)=rank(a_1,\cdots,a_r)$.
(5)向量b可以被$\{a_1,\cdots,a_r\}$线性表示当且仅当$rank(a_1,\cdot,a_r)=rank(a_1,\cdots,a_r,b)$.

定理: (P130) 矩阵的行秩等于它的列秩等于矩阵的秩.

推论: (P131) 下列说法等价.
(1)n阶方阵A可逆.
(2)$rank(A) = n$.
(3)A的行向量组线性无关.
(4)A的列向量组线性无关.

推论: (P131) 设$rank(A) = r$,则 A的不等于零的r阶子式所在行(列)构成了 A的行(列)向量的极大无关组.

定理: (P131) 设非空集V是F^n的子空间,则存在线性无关的向量组 $a_1, \cdots, a_r$,使得

$$V = < a_1, \cdots, a_r >$$

.

定理: (P135)在n维数组空间F^n中,下列结论成立:
(1)设$V \subseteq F^n$是r维子空间,则 V中任意$r+1$个向量线性相关.
(2)设V为r维子空间,则V中任意r个线性无关向量为V的一组基.
(3)设U, V是F^n的子空间,且$U \subseteq V$,则 $dim(U) \leqslant dim(V)$.
(4)设U, V是F^n的子空间,且$U \subseteq V$,若 $dim(U) = dim(V)$,则$U = V$.

定理: (P135) 设$V \subseteq F^n$是r维子空间,$a_1, \cdots, a_s \in V$是$s(s < r)$个线性无关的向量.则存在V中的向量$a_{s+1}, \cdots, a_r$,使得$a_1, \cdots, a_r$构成V的一组基.称$a_1, \cdots, a_r$为线性无关组$a_1, \cdots, a_s$的一组基扩充基.

定理: (P136) 设$A \in F^{m \times n}$是$m \times n$阶矩阵,$b \in F^m$是m维列向量.则线性方程组

$$Ax = b$$

有解的充要条件是$rank(A) = rank(A, b)$.线性方程组有唯一解的充要条件是$rank(A) = rank(A, b) = n$.

推论: (P137) 齐次线性方程组

$$Ax = 0$$

一定有解.它有非零解的充要条件是$rank(A) < n$.特别地,若A为n阶方阵,则齐次线性方程组有非零解当且仅当$det(A) = 0$.

定理: (P137) 齐次线性方程组$Ax = 0$的解集V是F^n的子空间,并且$dim(V) = n - rank(A)$.

定理: (P139) 设$V = \{x \in F^n | Ax = 0\}$,$W = \{x \in F^n | Ax = b\}$.则$W = \gamma_0 + V = \{\gamma_0 + \alpha | \alpha \in V\}$,其中 γ_0是$Ax = b$的一个特解.

2 我认为可以直接用的结论

下面这些结论请看情况使用.如果题目就是让你证明这个结论,那肯定是不能用的.如果你使用这个结论之后两行就结束了,那建议不用或者证明后使用.这些限制仅限于解答题,填空题你想用什么结论就用什么结论,没人在乎.所以还是建议尽可能地记住一些结论.在这里列出来的都是我推荐掌握证明方法的结论.

命题: 设准上三角阵$A = (A_{ij})_{k \times k}$的每个对角块$A_{ii}$都是方阵,则有

$$det(A) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{vmatrix} = det(A_{11})det(A_{22}) \cdots det(A_{kk}).$$

命题: 设A, B是n阶方阵,$\lambda \in F$,以下结论成立:
$(AB)^* = B^* A^*$.

命题:

$$rank \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geqslant rank(A) + rank(B)$$

.

命题:

$$rank\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$$

.

命题: 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times p}$,则 $rank(AB) \leqslant min(rank(A), rank(B))$.

命题: $Vandermonde$行列式

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$$

命题: 设A, B是n阶方阵,$\lambda \in F$,以下结论成立:
$(1)(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$.
$(2)det(A^*) = (det(A))^{n-1}$.

命题: 设$A \in F^{m\times n}$,$B \in F^{n\times m}$, $\lambda \in F$,则有

$$\lambda^n det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m det(\lambda I_n - BA)$$

命题: $Frobenius$秩不等式:
设$A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times s}, C \in F^{s\times t}$,则

$$rank(ABC) + rank(B) \geqslant rank(AB) + rank(BC)$$

.

命题: $Sylvester$秩不等式:
设$A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times s}$,则

$$rank(AB) + n \geqslant rank(A) + rank(B)$$

.

命题: $rank(A^TA) = rank(A)$

3 回顾一下过去半个学期我们都学了哪些内容

3.1 Part 1: 线性方程组

本部分的要求如下:
(1)会解低阶的线性方程组
(2)对于低阶的含参线性方程组,根据参数取值讨论方程组解的情况.
(3)了解一般线性方程组解的结构(结合线性空间理论).
(4)$Cramer$法则(一般不会用于计算).

3.2 Part 2: 矩阵初步与相抵标准型

本部分的要求如下:
(1)了解矩阵的定义及基本运算,包括加法,数乘,矩阵乘法,转置,共轭.
(2)知道矩阵逆的求法,能够求出低阶矩阵的逆.
(3)了解矩阵的一些基本量,包括迹,行列式,秩.
(4)了解矩阵的分块运算(我认为这个非常重要).
(5)会计算低阶矩阵的行列式(必考).
(6)会计算低阶矩阵的秩(必考).
(7)了解矩阵的相抵标准型.

3.3 Part 3: 线性空间理论

本部分的要求如下:
(1)了解线性空间的定义,了解子空间的定义.
(2)了解向量组的线性相关与线性无关.
(3)计算有限向量组的秩与极大无关组.
(4)了解线性空间的基与维数,能够计算线性空间的基与维数.
(5)了解一般线性方程组解的结构.
(6)学会将一般线性空间中的向量转化为坐标进行处理.

4 例题

下面这些例题可能显得有些混乱,他们并不是完全按照知识点先后顺序来排列的.

4.1 线性方程组的例题

1.判断命题正确性:若线性方程组有唯一解,则可以用$cramer$法则求解.

错误的.考虑如下方程组:$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ 这个方程组显然有唯一解,但是由于它的系数矩阵不是方阵,所以这里不能使用$cramer$法则求解.

2.判断:$A \in R^{3\times5}, rank(A) = 3$,则 $\exists b \in R^3$,使得$Ax = b$只有唯一解.

错误的.考虑$A = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则无论b取什么值,这里的x_4, x_5都是自由变量,从而不可能有唯一解.

3.已知:$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ bx_1 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 1 - c \end{cases}$.

先解出第一个方程组.得到 $x_1 = x_4 - 2, x_2 = x_4 - 4, x_3 = 2x_4 - 5$.因为两个方程组同解,所以上面得到的解也是第二个方程组的解.代入得到:
$\begin{cases} x_4 - 2 + ax_4 - 4a - 2x_4 + 5 - x_4 = -5 \\ bx_4 - 2b - 2x_4 + 5 - 2x_4 = -3 \\ 2x_4 - 5 - 2x_4 = 1 - c \end{cases}$ 得到$a = 2, b = 4, c = 6$.

4.2 矩阵的例题

1.设$A, B \in R^{3\times3}$, 若$|A| = 2, |B| = 3$,求分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵

记这个分块矩阵为S,由$SS^* = det(S)I_4$可以知道,$S^* = det(S)S^{-1}$.求S^{-1}是

一个比较简单的事,建议记住.$S^{-1}=\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$.$det(S)=(-1)^3det\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=$ 6.所以就得到了$S^*=6\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$.

2.$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$,求第四行各元素的代数余子式的和.

根据行列式的递推定义,这里四行元素代数余子式的和实际上就等于下面的行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

计算即可得到答案是0(二行四行线性相关).
更改:将本题更改为求$3A_{41}-6A_{42}+3A_{43}-4A_{44}$.
只需要计算行列式

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 3 & -6 & 3 & -4\end{vmatrix}$$

即可.不要真的算改编后的这题,因为我没凑数字,算起来可能很痛苦.答案是98.

3.判断:$A\in R^{m\times n},B\in R^{n\times m}$,则$det(AB)=det(BA)$.
错误的.考虑$A=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.则有$det(AB)=1,det(BA)=0$.

4.判断:A,B是同阶实方阵,则$rank(AB)=rank(BA)$.
我个人认为这题比上一题要困难不少.我在构造这题的反例时的思路是这样的:我们还是不希望这个矩阵太复杂,所以从二阶方阵入手.首先,这里A,B中有可逆方阵的时候,原结论一定成立,因为左乘或右乘可逆阵不改变矩阵的秩.其次,A,B中有零矩阵的时候结论显然成立.所以在构造反例时,我们必须

让A,B都是秩为1的矩阵.而我们知道秩为1的矩阵一定可以分解成列向量与行向量的乘积,所以可以从构造向量的角度入手.再考虑一下AB,BA秩的情况.两个不可逆方阵一定不可能乘出一个可逆方阵,所以他们的秩只可能是0或1.所以我们希望$rank(AB)=0,rank(BA)=1$.设$A=x\cdot y^T,B=u\cdot v^T$.那么我们就可以让$y^T\cdot u=0$,选定 y,u后再构造其余的两个向量让$BA\neq 0$.这里我选取的是$y=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},x=v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 此时$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$.

5.$A\in F^{m\times n},B\in F^{n\times m}$.证明: $rank(I_m-AB)+n=rank(I_n-BA)+m$.

考虑如下矩阵,对其做初等变换:

$$\begin{pmatrix}I_m-AB&0\\0&I_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m-AB&0\\B&I_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m&A\\0&I_n-BA\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m&0\\0&I_n-BA\end{pmatrix}$$

所以原命题得证.

6.$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$,求$A^{10}$.

可以发现,这里A的行向量是线性相关的,秩为1,所以我们一定可以把他分解为两个向量的乘积.

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-2&-1\\2&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}$$

这样的话,原问题就转化成了一个我们熟悉的问题了.

$A^{10} = (\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix})^{10} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix})^{9}\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix} = A$

.

7.设n阶方阵$A = \begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\-1&1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&-1&-1&\cdots&1&1\\-1&-1&-1&\cdots&-1&1\end{pmatrix}$,求$det(A), A^{-1}$.

矩阵太复杂了,这里不写了.简单介绍一些步骤.从第二行开始,依次用上一行减去当前行.直至达到最后一行.再从第一行开始,用最后一行加上第一行的一半.至此,我们能够得到$det(A) = 2^{n-1}$.再将前$n-1$行除以2.就得到了A^{-1}.对角线上是 $\frac{1}{2}$,上半三角的副对角线上是$-\frac{1}{2}$,n行1列的元素是$\frac{1}{2}$.

8.设方阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$,$c = tr(A)$.已知$rank(A) = 1$.
(1)证明:$A^2 = cA$.
(2)计算$det(I_n + A)$.

(1)由$rank(A) = 1$知,A中至少有一行不全为0.设第i行不全为0,记$A = \begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}$.则存在一系列常数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,使得$r_j = \lambda_j r_i$,其中$\lambda_i = 1$.于是我们可以对$A$做如下分解:

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} r_i$$

其中

$$r_i = \begin{pmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\end{pmatrix}.$$

那么$A^2=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$.注意到中间两个向量相乘就是一个数,且恰好就是$tr(A)$.所以原命题得证.

(2)先证明一个引理:$det(I_n-AB)=det(I_m-BA)$,其中$A\in R^{n\times m}$,$B\in R^{m\times n}$.

考虑如下矩阵,并做初等变换:

$$\begin{pmatrix}I_n-AB & 0\\ 0 & I_m\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_n-AB & 0\\ B & I_m\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m & A\\ 0 & I_n-BA\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n-BA\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式即得原结论.将这个引理应用到本题,结合(1)中得到的分解,就可以知道

$$det(I_n+A)=det(I_n+\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix})=$$

$$1+\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=1+c$$

4.3 线性空间的例题

本部分例题可能偏基础一点.顺带着复习一下线性空间的基本知识.

1.$\alpha_1=\begin{pmatrix}2&1&3&-1\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\end{pmatrix}^T,\alpha_3=\begin{pmatrix}4&2&6&-2\end{pmatrix}^T,\alpha_4=\begin{pmatrix}4&-3&1&1\end{pmatrix}^T$,求 $rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

对于数组向量来说,他们的秩就是用他们组成的矩阵的秩.所以我们只需要求下面的矩阵的秩.

$$\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\3&-1&2&0\\4&2&6&-2\\4&-3&1&1\end{pmatrix}$$

对它做初等变换

$$\to\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\5&0&5&-1\\0&0&0&0\\10&0&10&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\5&0&5&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以这个矩阵的秩为2,从而原向量组的秩就是2.

2.$\alpha_1=\begin{pmatrix}a&0&c\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}b&c&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&a&b\end{pmatrix}$,线性无关,写出$a,b,c$满足的条件.

三个向量线性无关等价于线性方程组

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3=0$$

只有零解.因为这是一个齐次方程组,所以方程组只有零解等价于系数矩阵的秩不少于变量个数,在这里也就是系数矩阵的秩为3,也就是系数矩阵可逆,也就是系数矩阵的行列式不等于0.所以只需要算一下系数矩阵的行列式即可.

$$\begin{vmatrix}a&0&c\\b&c&0\\0&a&b\end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= 2abc$$

也就是说,只要$abc \neq 0$,这三个向量就不是线性相关的.

3.设$R^{2\times 2}$是实数域上所有 2×2阶矩阵组成的集合,按照矩阵的加法与数乘构成线性空间.

(1)证明:$S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$构成了$R^{2\times 2}$上的一组基.

(2)求基S到自然基$(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$的过渡矩阵$T$.

(3)求$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$在基$S$下的坐标.

(1)$R^{2\times 2}$是一个四维空间,所以这里只需要说明$rank(S) = 4$就可以说明S是$R^{2\times 2}$上的一组基.也就是说,我们只需要证明S中的四个矩阵是线性无关的.我们假设$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$,使得 $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.按照分量分别等于0,我们可以得到四个线性方程

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

解得$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

PS:这里没人真的会去解这个方程组的,所以你需要做的就是把方程列对,然后写上这么一句话就行.

(2)设$S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.我们要求的过渡矩阵$T$满足

$$(X_1, X_2, X_3, X_4)T = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14})$$

那么当然有对应的

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14})T^{-1}$$

所以我们可以先求出(E_{ij})到S的过渡矩阵,然后再求逆即可得到这里的T.
注意到以下等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{12} - E_{21} + E_{22}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{12} + E_{21} - E_{22}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} - E_{12} + E_{21} + E_{22}$$

所以(E_{ij})到S的过渡矩阵$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.求逆即可得到

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(3)首先,这个矩阵在自然基下的坐标显然是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

结合在第2问求到的过渡矩阵,有如下等式:

$$(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3, X_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

所以原矩阵在S下的坐标就是

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,求$rank(A^TA)$.

这题看起来是一个矩阵相关的题目.这里把他放到线性空间这部分是因为用线性空间相关的理论,我们能给出一个更加简便的方法,也给出了一个结论.

法一:直接爆算,我觉得很烦,好处是不用动脑子

法二:$Claim:\ \ rank(A^TA) = rank(A)$.

下面来证明这个结论.由解空间维数与相应矩阵秩的关系,我们只需要证明$A^TAx = 0$与$Ax = 0$同解.

设$A^TAx = 0$的解空间为V_1,$Ax = 0$的解空间为V_2.首先,对$\forall x_0, s.t. Ax_0 = 0$,一定有$A^TAx_0 = A^T0 = 0$.所以$V_2 \subseteq V_1$.

其次,对$\forall x_0, s.t. A^TAx_0 = 0$,左乘$x_0^T$得到

$$x_0^TA^TAx_0 = 0$$

注意到,这是向量Ax_0与自身的点乘,它一定是大于等于0的,并且$x_0^TA^TAx_0 = 0$当且仅当$Ax_0 = 0$.所以 $V_1 \subseteq V_2$.

结合上述,得到了$V_1 = V_2$.所以

$$rank(A^TA) = n - dim(V_1) = n - dim(V_2) = rank(A)$$

对本题来说,$rank(A) = 2$,所以$rank(A^TA) = 2$.

Rmk.可能看到这题的解答的时候会觉得非常的不自然,这是正常的,因为这里的想法来源于后面的内容,矩阵的相合与二次型.但是我个人认为这是一个值得记住的结论.