2024 高等概率论期末考试

杨赛赛

2025.1.2

满分 130 分，第一到五题 20 分，第六题 30 分。

问题 1. 设 X 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ 上的一可积随机变量，而 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{F}$ 的若干子 σ 代数组成的一个 σ 代数族。证明下面一族随机变量是一致可积的：

$$\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] : \mathcal{G} \in \mathcal{L}\}$$

问题 2. 证明一列概率测度 $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ 弱收敛到另一概率测度 μ 当且仅当：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu,\ \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

其中 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的光滑紧支撑函数族。

问题 3. 一列概率测度 $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ 弱收敛到另一概率测度 μ。而 μ_n 对应的特征函数为 ϕ_n，μ 对应的特征函数为 ϕ。证明 ϕ_n 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛到 ϕ。

问题 4. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 为一列随机变量，且 $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2), \forall n \in \mathbb{N}^+$。若存在另一随机变量 X，使得 $X_n \xrightarrow{d} X$。证明 X 存在有限的方差 σ^2，且有 $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, $n \to \infty$。

问题 5. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一列独立同分布的随机变量，且其分布都是均值为 1 的 Poisson 分布。设 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$，对于任何的 $a > 1$，计算如下极限：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \Pr(S_n > na)$$

问题 6. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是一列独立同分布的随机变量，且有：

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

(i) 设 $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ 为另一列独立同分布的随机变量，并且 $\{X_n\}_{n\geq 1}, \{Y_n\}_{n\geq 1}$ 相互独立，证明：

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 2)$$

(ii) 证明 $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$（提示：存在常数 $c > 0$ 使得：$t^2\, \mathbb{E}[X_1^2; |X_1| < 1/t] \leq c(1 - \mathrm{Re}(\phi(t))),\ \forall t \in \mathbb{R}^+$）。

(iii) 证明 $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\Pr} 0$，与 $\mathbb{E}[X_1] = 0$。