4.1 解析函数与调和函数的关系

定义(P69)：如果实函数$u=u(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数，

且在D内满足(二维)Laplace方程：$\Delta u \triangleq \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0,\quad (4.2)$

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

定理1(P70)：设$z=x+\mathrm{i}\,y\in D$，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 D 内解析，

则 $f(z)$的实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$都是 D 内的调和函数.

例如，a，$ax+by$，$(a,b\in R)$，x^2-y^2，$2xy$，及其线性组合都是调和函数.

定义：若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 D 内解析，

则称u和v为在D 内的共轭调和函数.

例 $f(z)=(x^2-y^2)+2\mathrm{i}$, 实部和虚部都是调和函数，

但是除点(0,0)外, 实部和虚部不满足柯西–黎曼方程，

故 $f(z)$处处不解析.

- 对区域 D 内的任意两个调和函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$,

  $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内不一定解析.

问题1：已知 $u(x, y)$是单连通区域D内的调和函数,

那么是否存在 $v(x, y)$, 使得 $u(x, y)+\mathrm{i}\,v(x, y)$在$D$内解析？

答案是肯定的，见下面的定理3.

定理3(P70) 已知(实部)$u(x,y)$是单连通域D内的调和函数, 则D内线积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C, \qquad (4.4)$$

★★★

利用C-R方程熟记

所确定的$v(x,y)$使得$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$在$D$内解析,

其中(x_0,y_0)是D内任意一定点(与(x,y)无关), C是任意实常数.

证明：记 $P=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $Q=\dfrac{\partial u}{\partial x}$. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\overset{\text{条件}}{=}0$, 在$D$内.

故由Green公式可推得, (4.4) 右边线积分值与具体积分路径无关.

故由(4.4)确定一个在D内的二元单值实函数$v(x,y)$, 且

从微积分知识知, $v(x,y)$可微, 且 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

故u, v满足C-R方程, 故 $f(z)=u+\mathrm{i}v$解析. #

定理3(P70)中由实部u得到的解析函数虚部v除去一个实常数外是唯一的, 即得到的解析函数$f(z)$除去一个纯虚常数外是唯一的.

定理3(P70) 已知(实部)$u(x, y)$是单连通域D内的调和函数,则D内线积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C \quad (4.4)$$

$\boxed{\text{用C-R方程记忆}}$ ★★★

使得 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}\, v(x, y)$ 在D内解析,

(x_0, y_0)是D内任意一定点(与(x, y)无关), C是任意实常数.

定理3: $\boxed{\text{解析函数实部} \Rightarrow \text{虚部}}$

定理3'(P71) 已知(虚部)$v(x, y)$是单连通域D内的调和函数, 则D内线积分

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+C \quad (4.5)$$

★★★ $\boxed{\text{用C-R方程记忆}}$

使得 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}\, v(x, y)$ 在D内解析,

(x_0, y_0)是D内任意一定点(与(x, y)无关), C是任意实常数.

定理3': $\boxed{\text{解析函数虚部} \Rightarrow \text{实部}}$ 定理3'的证明与定理3的证明类似.

定理3'(P71)中由虚部v得到的解析函数实部u除去一个实常数外是唯一的, 即得到的解析函数$f(z)$除去一个实常数外是唯一的.

例2'(P71) 求解析函数$f(z)$, 使其虚部$v(x,y)=2x^2-2y^2+x+xy$, 且 $f(0)=1$.

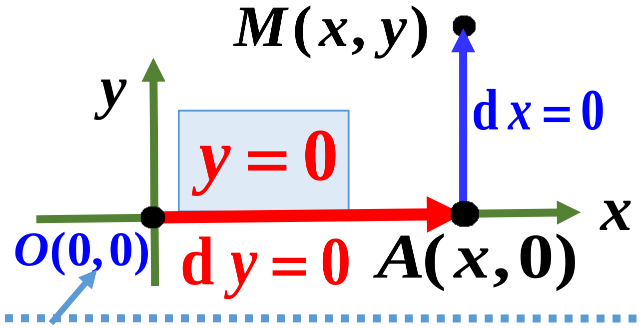
解 首先验证$v(x,y)$是调和函数. $\boxed{\text{如果不是, 则不存在满足要求的解析函数.}}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4x+1+y,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=4,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-4y+x,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-4,\quad \text{故}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\ v\text{调和.}$$

求$f(z)$实部u. 方法1. 利用定理3′ 中公式(4.5)(P 71). $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 选$(x_0,y_0)=(0,0)$,

可取如图所示与xy 轴平行折线积分路径(因定理3'中积分与路径无关),

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+C$$



$$=\int_0^x \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^y\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)\,\mathrm{d}y+C$$

分段积分: OA段 ★★★★★ AM段

(若v在(0,0)不可微, 选其他解析点为起点)

$$=\int_0^x(-4\cdot 0+x)\,\mathrm{d}x+\int_0^y(-4x-1-y)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x \cancel{(-4y+x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^y(-4x-1-y)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\left.\frac{1}{2}x^2\right|_{x=0}^{x=x}+\left.\left(-4xy-y-\frac{1}{2}y^2\right)\right|_{y=0}^{y=y}+C=\frac{1}{2}x^2-4xy-y-\frac{1}{2}y^2+C.$$

$f(z)=\left(\frac{1}{2}x^2-4xy-y-\frac{1}{2}y^2+C\right)+\mathrm{i}(2x^2-2y^2+x+xy)$ (未完成,必须要写成 z 的函数)

$$u(x,y)=\int_0^x \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} \mathrm{d}x+\int_0^y\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)\,\mathrm{d}y+C$$ ★★★★★

$$=\int_0^x(-4\cdot 0+x)\,\mathrm{d}x+\int_0^y(-4x-1-y)\,\mathrm{d}y+C=\left(\frac{1}{2}x^2-0\right)+\left(-4xy-y-\frac{1}{2}y^2-0\right)+C.$$

$$f(z)=\left(\tfrac{1}{2}x^2-4xy-y-\tfrac{1}{2}y^2+C\right)+\mathrm{i}(2x^2-2y^2+x+xy)$$ (必须写成 z 的函数)

$$=C+\mathrm{i}x-y+\left(\tfrac{1}{2}+2\mathrm{i}\right)x^2+\left(-\tfrac{1}{2}-2\mathrm{i}\right)y^2+(-4+\mathrm{i})xy.$$

x, y二次多项式

设 $f(z)=C+a_1z+a_2z^2=a_0+a_1(x+\mathrm{i}y)+a_2(x+\mathrm{i}y)^2$

$$=C+a_1x+\mathrm{i}a_1y+a_2x^2-a_2y^2+\mathrm{i}\,2a_2xy.$$ ★★★★★

比较$f(z)$的x, x^2的系数得$a_1=\mathrm{i}$, $a_2=\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$. 验证其他系数.

故 $f(z)=C+\mathrm{i}z+\left(\frac{1}{2}+2\mathrm{i}\right)z^2$. 由条件求$C$.

$f(0)=\underline{C}=1$, (条件), 故 $f(z)=1+\mathrm{i}z+\left(\frac{1}{2}+2\mathrm{i}\right)z^2$. #

例2' 求解析函数$f(z)$, 使其虚部$v(x,y)=2x^2-2y^2+x+xy$, 且 $f(0)=1$.

例2' 求解析函数$f(z)$，使其虚部$v(x,y)=2x^2-2y^2+x+xy$，且 $f(0)=1$.

解 方法2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-4y+x,$

C只特指常数.

$$u(x,y)=\int(-4y+x)\,\mathrm{d}x=-4xy+\frac{1}{2}x^2\cancel{+C}+\varphi(y),\quad (*)$$

$\boxed{\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial x}\equiv 0.}$

$\varphi(y)$是y 的任意可微函数. 下面只须求$\varphi(y)$. 对(*)两端关于y求导,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)\overset{\text{C-R方程}}{=}-\frac{\partial v}{\partial x}=-4x-1-y,\quad 故\varphi'(y)=-1-y.$$

积分得$\varphi(y)=-y-\frac{1}{2}y^2+C$. 代入(*), 得 $u=-4xy+\frac{1}{2}x^2-y-\frac{1}{2}y^2+C$.

$f(z)=\left(\frac{1}{2}x^2-4xy-y-\frac{1}{2}y^2+C\right)+\mathrm{i}(2x^2-2y^2+x+xy)$(须写成 z 的函数)

$=C+\mathrm{i}x-y+\left(\frac{1}{2}+2\mathrm{i}\right)x^2+\left(-\frac{1}{2}-2\mathrm{i}\right)y^2+(-4+\mathrm{i})xy.$ $\boxed{x,y二次多项式}$

设 $f(z)=C+a_1z+a_2z^2=C+a_1(x+\mathrm{i}y)+a_2(x+\mathrm{i}y)^2$

$=C+a_1x+\mathrm{i}a_1y+a_2x^2-a_2y^2+\mathrm{i}2a_2xy.$ ★★★★★

比较系数得$a_1=\mathrm{i}$, $a_2=\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$. 故 $f(z)=\cdots$,代入 $f(0)=1$求C得$f(z)$.#

将$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$写成$z$的函数时，

若能写成指数式：$f(z)=\mathrm{e}^{\underline{c_0+c_1x+c_2y+c_3x^2+c_4y^2+c_5xy+c_6x^3+c_7y^3+c_8x^2y+c_9xy^2}}$，

$c_j\in\mathbb{C},\ j=1,2,\cdots,$

则令 $\underline{c_0+c_1x+c_2y+c_3x^2+c_4y^2+c_5xy+c_6x^3+c_7y^3+c_8x^2y+c_9xy^2}$

$\underline{=c_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3}=c_0+a_1\underline{(x+\mathrm{i}\,y)}+a_2\underline{(x+\mathrm{i}\,y)}^2+a_3\underline{(x+\mathrm{i}\,y)}^3=$(展开).

比较系数，求a_0,a_1,a_2,a_3，得$f(z)=\mathrm{e}^{c_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3}$.

注意：$z^2=(x+\mathrm{i}\,y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i},$

$z^3=(x+\mathrm{i}\,y)^3=x^3+3x^2\mathrm{i}\,y+3x\mathrm{i}^2y^2+\mathrm{i}^3y^3=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3).$

- 也可以将 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$代入$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$.

例. 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y+x$ 为全平面上的调和函数，

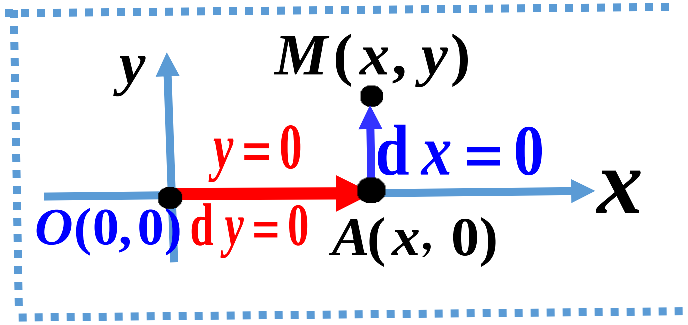
求一解析函数$f(z)$使得$f'(z)$ 的实部为u,且$f(0)=0$.

1)证明: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy+1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$, 故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,

故 $u(x,y)$ 为全平面调和函数.

2)解. 先求$f'(z)$. 设$f'(z)=u+iv$,解析. 方法1用定理3(P63)求$f'(z)$.

取$(x_0,y_0)=(0,0)$, 取如图积分路径，(分段平行于坐标轴),



$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$$

$$=\int_0^x\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0}dx+\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,dy+C$$

$$=\int_0^x(-3\cdot 0^2+3x^2)\,dx+\int_0^y(-6xy+1)\,dy+C=x^3\Big|_{x=0}^{x=x}+(-3xy^2+y)\Big|_{y=0}^{y=y}+C$$

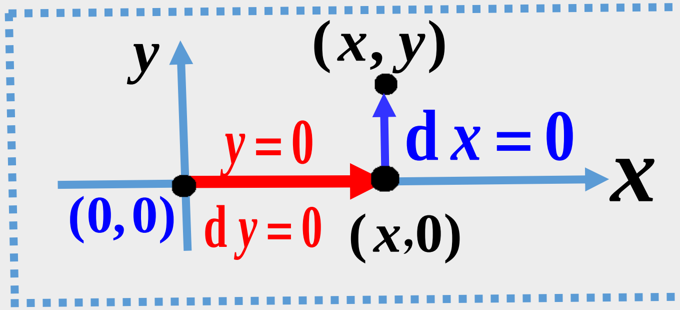
$$=x^3-3xy^2+y+C.$$

$$f'(z)=u+iv=(y^3-3x^2y+x)+i(x^3-3xy^2+y+C)$$

须先将$f'(z)$写成 z 的函数, 再求$f(z)$.

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y+C$$



$$=\int_0^x(-3\cdot 0^2+3x^2)\mathrm{d}x+\int_0^y(-6xy+1)\mathrm{d}y+C=(x^3-0)+(-3xy^2+y-0)+C.$$

$$f'(z)=u+\mathrm{i}v=(y^3-3x^2y+x)+\mathrm{i}(x^3-3xy^2+y+C)$$

$$=\mathrm{i}C+x+\mathrm{i}y+y^3-3x^2y+\mathrm{i}x^3-\mathrm{i}3xy^2.$$

设 $f'(z)=\mathrm{i}C+a_1z+a_3z^3=\mathrm{i}C+a_1(x+\mathrm{i}y)+a_3(x+\mathrm{i}y)^3$

$$=\mathrm{i}C+a_1(x+\mathrm{i}y)+a_3x^3+3a_3x^2\mathrm{i}y+3a_3x\mathrm{i}^2y^2+a_3\mathrm{i}^3y^3.$$

比较系数得 $a_1=1$, $a_3=\mathrm{i}$. 故 $f'(z)=\mathrm{i}C+z+\mathrm{i}z^3$，解析.

积分得 $f(z)=\mathrm{i}Cz+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}\mathrm{i}z^4+C$, $\quad f(0)=C=0$ (条件).

故 $f(z)=\mathrm{i}Cz+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}\mathrm{i}z^4$，C是任意实常数. #

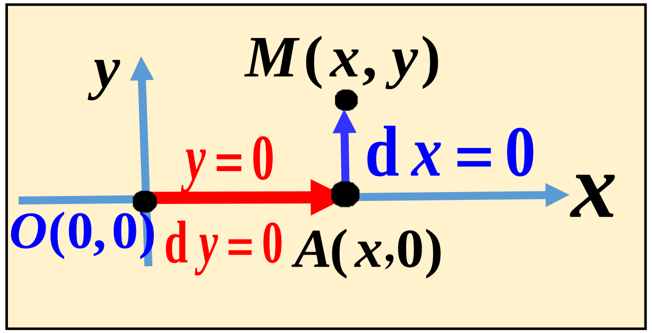
例. 求解析函数$f(z)$使得它的实部和虚部之和为$xy+x-y$, 且$f(1)=i$.

解. 设$f(z)=u+iv$, $u+v=xy+x-y$. (1)

用(1)和C-R方程求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$. 对(1)分别关于$x,y$求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=y+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=x-1. \quad (2)$$

代入C-R方程得 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=y+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=x-1.$



解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}(x+y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}(x-y-2).$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+C=\int_0^x\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x(x+0)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^y(x-y-2)\mathrm{d}y+C=\frac{1}{4}x^2\Big|_{x=0}^{x=x}+\frac{1}{2}\left(xy-\frac{1}{4}y^2-y\right)\Big|_{y=0}^{y=y}+C=\cdots.$$

根据 $v=xy+x-y-u$ 求v, 得 $f(z)$, 须先将$f(z)$写成 z 的函数. #

(参考此PPT的P24-25).

4.2 调和函数的性质和狄利克雷问题

(由3.5中解析函数的性质导出)

本节记$u(x,y)\equiv u(z)$, $v(x,y)\equiv v(z)$, 均表示x,y 的实值函数.

定理4(平均值定理)(P72) 设$u(z)$是闭圆$\bar{D}:|z-z_0|\le R$ 上的调和函数, 即存在区域G(开集), 使得$\bar{D}\subset G$, $u(z)$是G内的调和函数, 则

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C u(z)\,\mathrm{d}s,\qquad C:\ |z-z_0|=R,\qquad (4.6)$$

即调和函数在圆心的值等于它在圆周上的平均值.

证明: $u(z)$在$\bar{D}$上调和, 由P70定理3, 存在$\bar{D}$上的调和函数$v(z)$,

使得 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 是$\bar{D}$上的解析函数.

由3.5中(解析函数)平均值公式(P63), 得 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(z)\,\mathrm{d}s$, 即

即$u(z_0)+\mathrm{i}v(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_C\{u(z)+\mathrm{i}v(z)\}\,\mathrm{d}s$. 比较两边实部得(4.6). #

与3.5节有界域中解析函数最大模原理(P 63)类似, 有界域中调和函数也有极值原理:

定理5(极值原理) 设$u(z)=u(x,y)$ 是一个有界域D 内的调和函数, 且u在闭域$\bar{D}=D+C$上连续, C是D 的边界, u 在$\bar{D}$上不恒等于常数, 则 $u(x,y)$只能在D的边界C上取到在整个闭域$\bar{D}$上的最大值和最小值.

证明: $u(z)$在$\bar{D}$上调和, 由P70定理3, 存在$\bar{D}$上的调和函数$v(z)=v(x,y)$, 使得 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 是$\bar{D}$上的解析函数.

令 $\underline{g_{\pm}(z)=\mathrm{e}^{\pm f(z)}}=\mathrm{e}^{\pm u(z)\pm \mathrm{i}v(z)}$, 解析, $\underline{|g_{\pm}(z)|=\mathrm{e}^{\pm u(z)}}$, 只依赖 u,与v无关.

$g_{\pm}(z)$与$f(z)$一样,在D内解析, 在闭域$\bar{D}$上连续, 不恒为常数.

故对$g_{\pm}(z)$分别应用3.5中最大模原理(P63), 得

$|g_{\pm}(z)|=\mathrm{e}^{\pm u(z)}$都只能分别在边界$C$上取到它们在整个闭域$\bar{D}$ 上的最大值.

故$\pm u(z)$都只能在C上取到它在整个闭域$\bar{D}$ 上的最大值. 故结论成立. #

$|f(z)|=\sqrt{u^2(z)+v^2(z)}$ 与u, v都有关, 若直接对$f(z)$ 用3.5节中最大模原理不能得出u 的最值估计.谁的模只依赖实部u? 令 $g_{\pm}(z)=\mathrm{e}^{\pm f(z)}$.

调和函数的泊松积分公式(由柯西积分公式导出)

P72定理4平均值定理:

调和函数在圆心的值可用圆周上的平均值表示出来.

下面定理6：调和函数在圆内任一点的值也可用圆周上值表示出来.

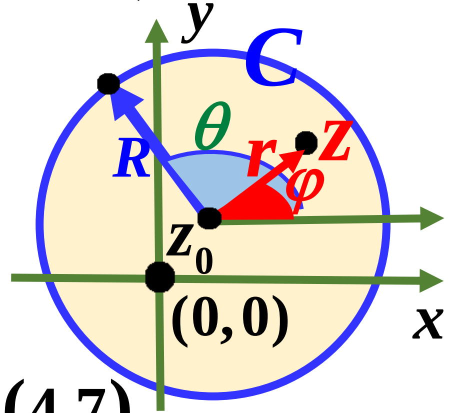
(不是平均值)

定理6(泊松积分公式)(P73)

设$u(z)=u(x,y)$是闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数,

则u在圆内任一点$z=z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\ (0<r<R)$的值

可用u在闭圆边界$C:\ |z-z_0|=R$上的值表示出来:



$$u(z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta. \quad (4.7)$$

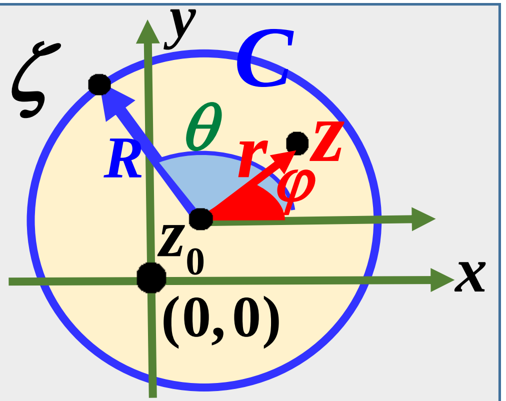
证明:因为$u(z)$是闭圆上$|z-z_0|\le R$上的调和函数, 故由P70 定理3 知,

存在闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数$v(z)=v(x,y)$,

使得$f(z)=u(z)+\mathrm{i}\,v(z)$ 是闭圆$|z-z_0|\le R$上的解析函数.

对$f(z)$利用柯西积分公式(P59定理5), 得$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=$

定理6(泊松积分公式)(P73)



设$u(z)=u(x,y)$是闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数,

则u 在圆内任一点$z=z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,(0<r<R)$的值

可用u 在闭圆边界C : $|z-z_0|=R$上的值表示出来:

$$u(z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\theta.\quad(4.7)$$

证明:由P 70 定理3, 在题中闭圆上, 存在调和函数$v(z)=v(x,y)$,

使得$f(z)=u(z)+\mathrm{i}\,v(z)$ 是闭圆$|z-z_0|\le R$上的解析函数.

对$f(z)$利用柯西积分公式(P 59定理5), 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\cancel{\mathrm{i}}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(\cancel{z_0}+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-(\cancel{z_0}+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})}\cancel{\mathrm{i}}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

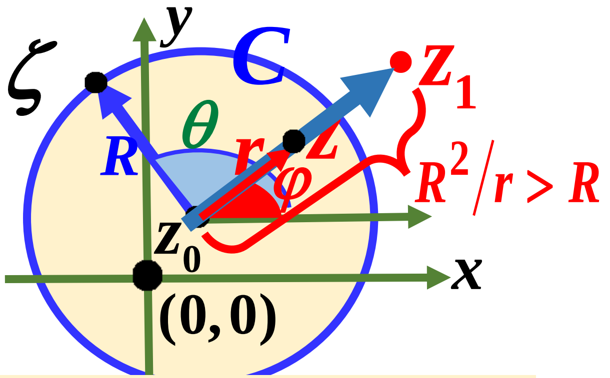
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\frac{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\theta.\quad(4.8)$$

参数法, C : $\zeta=z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, $\zeta'(\theta)=R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

$f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 是闭圆 $|z-z_0|\le R$ 上的解析函数.

对 $f(z)$ 利用柯西积分公式(P59定理5), 得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\theta. \quad (4.8)$$



在圆外取一个与点 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 关于圆周对称的点 $z_1=z_0+\frac{R^2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}$ 在 $|\zeta-z_0|\le R$ 上解析，对它用柯西积分定理(P54定理2), 得

$$0=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{R^2}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\theta. \quad (4.9)$$

$$\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}-\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}=\frac{R^2-Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}-\frac{r^2-rR\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}}{r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+R^2}=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

故 (4.8)−(4.9)后两边取实部得

$$\operatorname{Re} f\left(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left\{f\left(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right\}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta. \ \#$$

P76 第5题 设$u(x,y)$ 是全平面有界的调和函数, 证明$u(x,y)$ 恒等于常数.

证明提示: 与调和函数极值原理即P 72定理5的证明类似.

$u(z) \triangleq u(x,y)$在全平面调和, 由P70定理3, 存在全平面调和函数$v(z)=v(x,y)$,

使得 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 是全平面解析.

令 $\underline{g(z)=\mathrm{e}^{f(z)}=\mathrm{e}^{u(z)+\mathrm{i}v(z)}}$, $|g(z)|=$ ______.

对$g(z)$应用刘维尔定理(P 65 定理7), 得出$g(z)=\mathrm{e}^{f(z)}$恒等于常数,

然后根据 $f(z)=\mathrm{Ln}\,g(z)$, 推导出$u(x,y)=\ln|g(z)|$.

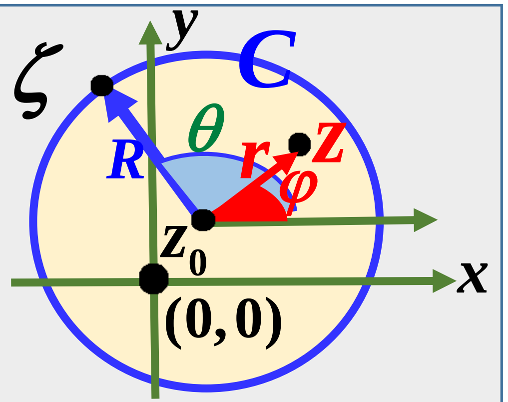
由此推导出题中结论. #

定理6(泊松积分公式)(P73)

设$u(z)=u(x,y)$是闭圆$|z-z_0|\le R$上的调和函数，

则u 在圆内任一点$z=z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,(0<r<R)$的值

可用u 在闭圆边界$C:\ |z-z_0|=R$上的值表示出来：



$$u(z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\,u(z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,\mathrm{d}\theta.\quad(4.7)$$

在一个闭圆上调和的函数有无穷多个，

但是若已知在一个闭圆上调和函数在边界圆周上的值，

则由(P 73)定理6知, 此调和函数在整个圆内的值就唯一确定了.

下面定理7(P74)将告诉我们这样的唯一性结果也可以从圆推广到一般区域.

考虑：Laplace方程Dirichlet问题：

$$(*)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & z\in D,\ D\text{是}xy\text{平面任意有界区域, 其边界记为}C,\\ u(x,y)\big|_C=\varphi(x,y)\big|_C & \text{(给定的已知函数).}\end{cases}$$

定理7(P74) 设u_1和u_2都是有界区域D 内的调和(实值) 函数,

u_1和u_2在有界闭域$\bar{D}=C+D$上连续 (C是D 的边界)，

若$\forall\zeta\in C$, $|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)|\le\varepsilon$, 则

$\forall z\in\bar{D}$, $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$ (整个闭域$\bar{D}$上解的变化也“小”).

证明：令$u=u_1-u_2$, 则因为u_1, u_2在D 内调和，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)=0,$$

即u在D内调和. 又因u_1和u_2在$\bar{D}$上连续, 故u 在$\bar{D}$上连续.

故可以对u用调和函数极值原理(P72定理5), 得

定理7(P74) 设u_1和u_2都是有界区域D 内的调和(实值) 函数，u_1和u_2在有界闭域$\bar{D}=C+D$上连续 (C是D 的边界)，且$\forall\zeta\in C$, $|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)|\le\varepsilon$, 则$\forall z\in\bar{D}$, $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$.

证明：令$u=u_1-u_2$, 因u_1, u_2在D 内调和，故u在D内调和.

又因u_1和u_2在$\bar{D}$上连续，故u 在$\bar{D}$上连续.

故可以对u用调和函数极值原理(P72定理5)，得

最大值：$\max\limits_{z\in\bar{D}}\{u_1(z)-u_2(z)\}=\max\limits_{\zeta\in C}\{u_1(\zeta)-u_2(\zeta)\}\le\varepsilon$,

最小值：$\min\limits_{z\in\bar{D}}\{u_1(z)-u_2(z)\}=\min\limits_{\zeta\in C}\{u_1(\zeta)-u_2(\zeta)\}\ge-\varepsilon$.

因此$\forall z\in\bar{D}$, $|u_1(z)-u_2(z)|\le\varepsilon$. #

定理7隐含着Laplace方程Dirichlet问题唯一性：

定理7(P74) 设u_1和u_2都是有界区域D 内的调和(实值)函数，u_1和u_2在有界闭域$\bar{D}=C+D$上连续（C是D 的边界），且$\forall \zeta\in C, \left|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)\right|\le\varepsilon$, 则$\forall z\in\bar{D}, \quad \left|u_1(z)-u_2(z)\right|\le\varepsilon.$

证明：令$u=u_1-u_2$, 因u_1, u_2在D 内调和，故u在D内调和.
又因u_1和u_2在$\bar{D}$上连续，故u 在$\bar{D}$上连续.
故可以对u用调和函数极值原理(P72定理5)，得…

$$\forall z\in\bar{D}, \quad \left|u_1(z)-u_2(z)\right|\le\varepsilon. \ \#$$

定理7隐含着Laplace方程Dirichlet问题唯一性：

在(P 74)定理7条件下，若$\forall\zeta\in C, \quad u_1(\zeta)=u_2(\zeta)$ $(\varepsilon=0)$, 则

则 $\forall z\in\bar{D}, \ \ u_1(z)=u_2(z).$

作业

P76

4(1), (2), 5

提示: 4(2)原题有打印错误, 改为 "实部 $u = \mathrm{e}^{x}(x\cos y - y\sin y)$, 且 $f(0) = 0$."

P48

18(1)(3)

例. 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y+x$ 为全平面上的调和函数，求一解析函数 $f(z)$ 使得 $f'(z)$ 的实部为 u，且 $f(0)=0$.

也可用另一方法求 $f'(z)$ 的虚部 v. 用柯西–黎曼方程.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(3y^2-3x^2\right),$$

$$v=-\int\left(3y^2-3x^2\right)\mathrm{d}x=-3xy^2+x^3\cancel{+C}+\varphi(y),$$

$\varphi(y)$ 是 y 的任意可微函数. 两端关于 y 求导得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy+\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy+1,$$ 解得 $\varphi'(y)=1$.

积分得 $\varphi(y)=y+C$. 故 $v=-3xy^2+x^3+y+C$.

$$f'(z)=u+\mathrm{i}v=\left(y^3-3x^2y+x\right)+\mathrm{i}\left(x^3-3xy^2+y+C\right)$$

$$=\mathrm{i}C+x+\mathrm{i}y-3x^2y+y^3+\mathrm{i}x^3-3\mathrm{i}xy^2.$$

与前面一样，把 $f'(z)$ 写成 z 的函数, 然后积分得 $f(z)$.

利用 $f(0)=0$，求积分常数.

例. 求解析函数$f(z)$使得它的实部和虚部之和为$xy+x-y$, 且$f(1)=\mathrm{i}$.

解. 设$f(z)=u+\mathrm{i}v$, $u+v=xy+x-y$. (1)

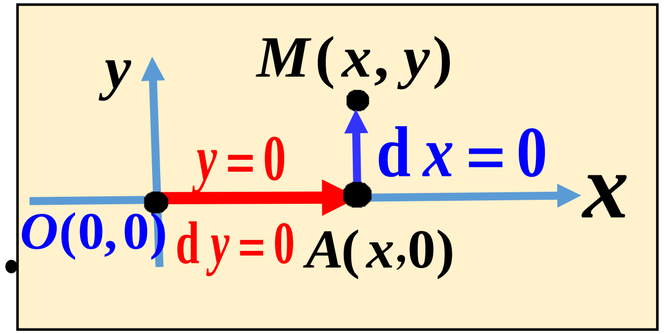
用(1)和C-R方程求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$. 对(1)分别关于$x,y$求偏导得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=y+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=x-1. \quad (2)$$

由C-R方程得$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. 代入(2)得

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=y+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=x-1.$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}(x-y-2)$.

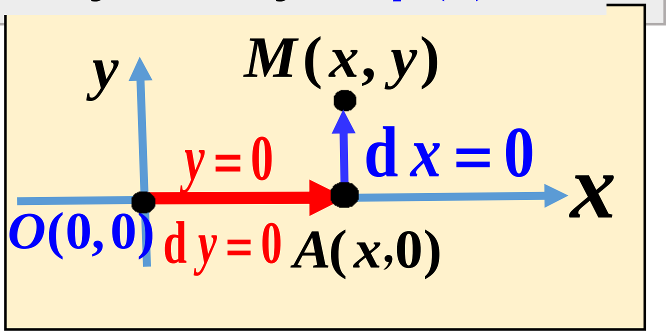


$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+C=\int_0^x\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x(x+0)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^y(x-y-2)\mathrm{d}y+C=\frac{1}{4}x^2\Big|_{x=0}^{x=x}+\frac{1}{2}\left(xy-\frac{1}{4}y^2-y\right)\Big|_{y=0}^{y=y}+C$$

例. 求解析函数 $f(z)$ 使得它的实部和虚部之和为 $xy+x-y$，且 $f(1)=\mathrm{i}$.

$u+v=xy+x-y.$ (1)



$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x(x+0)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^y(x-y-2)\,\mathrm{d}y+C=\frac{1}{4}x^2-0+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}y^2-y-0+C.$$

$$v=xy+x-y-u=\frac{1}{2}xy+x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2-C.$$

故 $f(z)=u+\mathrm{i}v=C(1-\mathrm{i})-y+\mathrm{i}x+\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})xy+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})(x^2-y^2).$

设 $f(z)=C(1-\mathrm{i})+a_1z+a_2z^2=C(1-\mathrm{i})+a_1(x+\mathrm{i}y)+a_2(x+\mathrm{i}y)^2$

$$=C(1-\mathrm{i})+a_1x+\mathrm{i}a_1y+a_2\left(x^2-y^2\right)+2a_2xy\mathrm{i}.$$

比较系数得 $a_1=\mathrm{i},\ a_2=\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})$. 故 $f(z)=C(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}z+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})z^2$.

$f(1)=C(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})=\mathrm{i}$. (条件) 故 $C(1-\mathrm{i})=-\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})$.

故 $f(z)=-\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}z+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})z^2$. #