爱因斯坦求和约定

1.求和约定和哑指标

$S=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j$约定$S=a_ix_i$

2.自由指标

$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,m$简记为$b_i=A_{ij}x_j$,其中 i 为自由指标，j 为哑指标。

3.Kronecker-delta 符号和置换符号（Ricci 符号）

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\1, i=j\end{cases}$$

$$\delta_{ij}a_j=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}a_j=a_i$$

$$\delta_{im}A_{mj}=A_{ij}$$

Ricci 符号

$$\epsilon_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{i2}&\delta_{i3}\\\delta_{j1}&\delta_{j2}&\delta_{j3}\\\delta_{k1}&\delta_{k2}&\delta_{k3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{j1}&\delta_{k1}\\\delta_{i2}&\delta_{j2}&\delta_{k2}\\\delta_{i3}&\delta_{j3}&\delta_{k3}\end{vmatrix}=\begin{cases}1,(ijk)=\text{顺序}\\-1,(ijk)=\text{反序}\\0,\text{其他}\end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{im}&\delta_{in}\\\delta_{jm}&\delta_{jn}\end{vmatrix}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}, l=k$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}=\epsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

4.矢量的基本运算

4.1 矢量点积

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ie_i\cdot b_je_j=a_ib_j\delta_{ij}$$

$$a_ib_i=a_jb_j$$

4.2 矢量叉积

$$e_i\times e_j=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{i2}&\delta_{i3}\\\delta_{j1}&\delta_{j2}&\delta_{j3}\\e_1&e_2&e_3\end{vmatrix}=\epsilon_{ijk}e_k$$

4.3 矢量混合积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

$$e_i\times e_j\cdot e_k=\epsilon_{ijk}$$

欧几里得空间

1.基本概念

1.1 内积与欧几里得空间

欧几里得空间就是定义了内积的实数域 R 上的线性空间 $\mathrm{V}=\mathrm{V}(\mathbf{R})$, 记为$\mathbf{E}(\mathbf{R})$. 其内积是 V 中的两个向量的一种乘积（$\mathbf{a}, \mathbf{b}$），它是一个实数，且满足：

1.对称性：对任意两个向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$，有$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

2.线性性：对任意一个实数λ和任意三个向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$，有$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}),(\boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

3.正定性：对任意一个向量$\boldsymbol{a} \in V$，有$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$，且等号当且仅当$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$时成立

1.2 向量的长度和模

称$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$为向量$\boldsymbol{a}$的长度或模。

1.3 向量间的夹角

称$\theta=\arccos \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot|\mathbf{b}|} \in(0, \pi)$为非零向量$\boldsymbol{a}$与 $\mathbf{b}$ 的夹角。

1.4 正交或垂直

如果$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$，则称$\boldsymbol{a}$与 $\mathbf{b}$ 正交或垂直。

1.5 距离

称$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的距离。

2.基本性质

2.1 双线性性

对任意的实数λ_{i}, μ_{j}和任意向量$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{b}_{j} \in V$，有$\left(\sum \lambda_{i} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}}，\sum \mu_{j} \boldsymbol{b}_{j}\right)=$

$\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j(\boldsymbol{a_i},\boldsymbol{b}_j)$

2.2 对称性

1.$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角等于$\mathbf{b}$与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角

2.$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的的距离等于$\mathbf{b}$与 $\boldsymbol{a}$ 之间的的距离

2.3 正定性

1.对任意一个向量$\boldsymbol{a}$，有$|\boldsymbol{a}| \geq 0$，且等号当且仅当$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$时成立

2.对任意两个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \geq 0$，且等号当且仅当$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$时成立

2.4 齐次性

对任意一个实数λ和任意两个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|, d(\lambda\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}) = |\lambda| \cdot d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

2.5 柯西-施瓦茨不等式

对任意两个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，有$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leq |\boldsymbol{a}| \cdot |\mathbf{b}|$，且等号当且仅当$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$时成立

2.6 三角形不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

3 度量矩阵与内积的坐标-矩阵表示

度量矩阵，称$\boldsymbol{G} = (g_{ij})_{n\times n}$为 n 维欧式空间 V 的内积（，）在基$\{\boldsymbol{a}_n\}$下的度量矩阵或格拉姆矩阵，其中$g_{ij} = (\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)$。

内积的坐标-矩阵表示：设$\{\boldsymbol{a}_n\}$为 n 维欧式空间 V 的一组基，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$在基下坐标分别为$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，则$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{Y}$。

度量矩阵为 n 阶正定的实对称矩阵，即$\boldsymbol{G} \in M_n(\boldsymbol{R}), \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{G}$.亦即$g_{ij} = g_{ji}$,并且满足：对于任意一个向量$\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n}$，有$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{X} \geq 0$，且等号当且仅当$\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$时成立。

设$\{\boldsymbol{a}_n\}$为 n 维欧式空间 V 的一组基，**G** 为 n 阶正定的实对称矩阵，$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\cdot\boldsymbol{X},\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\cdot\boldsymbol{Y}$,则$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{Y}$为 V 上的内积。

集合$\{V上的内积\}$与集合$\{n阶正定实对称矩阵\}$的元素一一对应。

设$\{\boldsymbol{a}_n\}\{\boldsymbol{b}_n\}$为 n 维欧式空间 V 的两组基，过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$，则两组基下度量矩阵相合，即$\widetilde{\mathbf{G}}=\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T}$

狄拉克函数

1.概念

研究一个物理量在空间或时间中分布的密度，但是一些抽象模型不是连续分布于空间或时间中，而是集中在空间中的某一点或者时间中的某一瞬时，为了在数学上理想地表示出这种密度分布，引入了 δ 函数的概念。数学表示为：$\delta(x)=0,(x\neq 0),\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$，上述表达式不规定 δ 函数在 0 点的取值。如果函数不在 0 点取非零值，而在其他地方，可定义：$\delta_a(x)=\delta(x-a)=0,(x\neq a),\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(x)dx=1$。

2.多维 δ 函数

2.1 定义

在多维空间中的 δ 函数定义$\delta(\boldsymbol{r})=\begin{cases}0,\boldsymbol{r}\neq 0\\ \infty,\boldsymbol{r}=0\end{cases},\int\delta(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}=1$，n 维 δ 函数可表示为 n 个一维 δ 函数乘积表示。

2.2 性质

$$\int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)d\boldsymbol{r}=f(\boldsymbol{r}_0)$$

$$\int f(\boldsymbol{r})[\nabla\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)]d\boldsymbol{r}=-\nabla f(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}$$

2.3 位矢的微分

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\nabla^2(\frac{1}{r})=4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

拉梅系数

1.定义

正交曲线坐标系(q_1, q_2, q_3)中，曲线$r = r(x, y, z) = r(q_1, q_2, q_3)$，则$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} dq_3$。

定义$H_i = \left|\frac{\partial r}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$，那么$dr = \sum H_i dq_i$，坐标基矢$\overrightarrow{e_i} = \frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\vec{k}\right)$，弧长$|dr| = \sqrt{ds^2} = \sqrt{\sum {H_i}^2 {dq_i}^2}$，微元体积$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$。

2.物理三度在拉梅系数下的转换

梯度：$\nabla f = grad\, f = \sum \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \overrightarrow{e_i}$。

散度：$\nabla \cdot r = div\, r = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum \frac{\partial (r_i H_j H_k)}{\partial q_i}$。

旋度：$\nabla \times r = rot\, r = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \overrightarrow{e_1} & H_2 \overrightarrow{e_2} & H_3 \overrightarrow{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 r_1 & H_2 r_2 & H_3 r_3 \end{vmatrix}$。

立体角

以观测点为球心，构造一个单位球面；任意物体投影到该单位球面上的投影面积，即为该物体相对于该观测点的立体角。

立体角公式：

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = sin\theta d\theta d\varphi$$
$$\Omega = \iint sin\theta d\theta d\varphi$$

任意定向曲面的立体角:

$$\Omega = \iint \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}$$

立体角的单位:球面度（steradian，sr）,平方度

封闭曲面的立体角:一个完整的球面对于球内任意一点的立体角为 4π sr（对于球外任意一点的立体角为 0 sr）。

顶角为 2θ的圆锥的立体角为一个单位球的球冠，$\Omega = 2\pi(1 - cos\theta)$。

球冠的表面积与半径为球冠边沿到球冠最低点的距离的圆的面积相等。

在单位球中球冠立体角$\Omega = 2\pi(1 - cos\theta)$。

对于任意一个四面体 OABC,其中 O,A,B,C 分别为四面体的四个顶点，从 O 点观察三角形 ABC，记直线夹角分别为α，β，γ，$\mathrm{s} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$，那么

$$\tan(\frac{\Omega}{4}) = \sqrt{\tan(\frac{s}{2})\tan(\frac{s-\alpha}{2})\tan(\frac{s-\beta}{2})\tan(\frac{s-\gamma}{2})}$$

傅里叶变换

性质	时域$x(t)$	频域$X(\omega)$
定义	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ $=\lvert X(\omega)\rvert e^{j\phi(\omega)}$ $=Re(\omega)+jIm(\omega)$
线性	$x_1(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X_1(\omega)$ $x_2(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X_2(\omega)$ $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
奇偶性	$x^*(t)$ 若$x(t)$为实函数,即$x(t)=x^*(t)$	$X^*(-\omega)$ $X(\omega)=X^*(-\omega)$或$X^*(\omega)=X(-\omega)$
对偶性	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
尺度变换	$x(at)\quad a\neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})$
翻转	$x(-t)$	$X(-\omega)$
时移	$x(t\pm t_0)$ $x(at-b)\quad a\neq 0$	$e^{\pm j\omega t_0}X(\omega)$ $\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{b}{a}\omega}$
频移	$x(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$X(\omega\mp\omega_0)$
时域微分	$\frac{d^nx(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^nX(\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
帕斯瓦尔公式	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(\omega)\rvert^2d\omega$
时域卷积	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
频域卷积	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$
频域微分	$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$

信号$x(t)$	傅里叶变换$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}u(t)\quad a>0,a\in R$	$\frac{1}{j\omega+a}$
$g(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<\frac{\tau}{2}\\0 & \lvert t\rvert>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
$Sa(\omega_c t)$	$\frac{\pi}{\omega_c}g(\omega),g(\omega)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\0 & \lvert\omega\rvert>\omega_c\end{cases}$
$e^{-a\lvert t\rvert}\quad a>0$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$
$e^{-(at)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-(\frac{\omega}{2a})^2}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
$te^{-at}u(t)\quad a>0,a\in R$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\quad a>0,a\in R$	$\frac{1}{(j\omega+a)^n}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\quad a>0$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)\quad a>0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$
$\delta_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)\quad\omega=\frac{2\pi}{T_0}$
$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)$

习题课补充

1.近似

在需要做近似时，在没有明确说明需要考虑非简谐效应的情况下，一般做简谐近似，即广义坐标和广义速度保留到二阶项，这是因为：

• 广义坐标和广义动量是同阶小量；

• 势能的二阶项是有意义的最低阶项：势能的零阶项可以通过重新选择势能零点消去，一阶项可以通过将广义坐标选为相对于平衡位置的偏移消去。

一般可以在三个阶段做近似，一是对质点坐标做近似，二是对拉格朗日量做近似，三是对运动方程做近似。在这三个阶段做近似最后得到的运动方程都是一致的，但计算复杂度稍有差别，通常而言越早开始做近似计算越简单。

2.解耦

对于广义坐标$q=(q_1,\cdots,q_s)$，若在平衡位置$q^{(0)}$使得$\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_i^{(0)}}=0$，令$\xi_i=q_i-q_i^{(0)}$，则有$L=T-U=\frac{1}{2}M_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j-\frac{1}{2}K_{ij}\xi_i\xi_j=\frac{1}{2}\dot{\xi}^TM\dot{\xi}-\frac{1}{2}\xi^TK\xi$，其中$M_{ij}=\frac{\partial^2T}{\partial\dot{\xi}_i\partial\dot{\xi}_j},K_{ij}=\frac{\partial^2U}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$，有运动方程$M\ddot{\xi}+K\xi=0,\ddot{\xi}=-M^{-1}K\xi=-\Omega\xi$，有$\xi=A\eta$，满足$\ddot{\eta}+\Omega_d\eta=0$，其中$\Omega_d=diag(\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_s^2)$。求解久期方程及本征矢方程$\begin{cases}det(\omega^2M-K)=0\\(\omega_\alpha^2M-K)A_\alpha=0\end{cases}$，记$\eta_\alpha(t)=\begin{cases}c_\alpha cos\omega_\alpha t+d_\alpha sin\omega_\alpha t,\omega_\alpha^2>0\\c_\alpha t+d_\alpha,\omega_\alpha^2=0\\c_\alpha cosh\Omega_\alpha t+d_\alpha sinh\Omega_\alpha t,\omega_\alpha^2=-\Omega_\alpha^2<0\end{cases}$，则$\xi=\sum_\alpha A_\alpha\eta_\alpha(t)$。

3.微分方程

$y''+py'+q=0$的通解：$y(x)=\begin{cases}C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x},\Delta>0\\(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x},\Delta=0\\e^{\alpha x}(C_1cosh\beta x+C_2sinh\beta x),\Delta<0\end{cases}$，其中$\Delta=p^2-4q,\lambda_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2},\alpha=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\beta=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$。

$y'+P(x)y=Q(x)$的通解：$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$。

可降阶二阶微分方程：$\begin{cases} y'' = f(y,y') \xrightarrow{y'=p} p\dfrac{dp}{dy} = f(y,p) \\ y'' = f(x,y') \xrightarrow{y'=p} p' = f(y,p) \end{cases}$。

二阶欧拉方程：$x^2y'' + pxy' + qy = f(x) \xrightarrow{x=e^t} \frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$。

4.积分

常见的三角函数有理式的积分

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$
$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

对于一般的三角函数有理式的积分

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx \xrightarrow{u=\tan\frac{x}{2}} \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2}{1+u^2}\, du$$

反三角函数的导数及积分见表2。

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\, dx$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x\mathrm{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\mathrm{arcsec} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$x\mathrm{arcsec} x - \sqrt{x^2-1} + C$
$\mathrm{arccsc} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$x\mathrm{arccsc} x + \sqrt{x^2-1} + C$

表 2: 反三角函数的导数、积分表

5.四维梯度与四维散度

四维梯度：

$$\partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = (-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla\phi)$$

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla\phi)$$

四维散度：

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A^i}$$

6.Noether 定理

在连续变换$f: q^\alpha \to q_\epsilon^\alpha \triangleq q_\epsilon^\alpha(q,t;\epsilon)$下，若体系的拉格朗日量$L_\epsilon(q,\dot{q},t) \triangleq L(q_\epsilon,\dot{q}_\epsilon,t)$在该变换下保持不变，即满足$\delta L \triangleq \frac{d}{d\epsilon}L_\epsilon|_{\epsilon=0} = \begin{cases} lim_{\epsilon\to 0}\frac{L_\epsilon - L}{\epsilon}|_{\epsilon=0} \\ \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\delta\dot{q}^\alpha \end{cases} = \frac{d}{dt}F$，则$\Gamma = p^\alpha\delta q^\alpha - F$。若$\Gamma$中还显含任意参数$\boldsymbol{n} = (n_1,\cdots,n_s)$，那么$\Gamma$可以进一步导出 s 个独立的守恒量$\Gamma_k$。

7 微振动

7.1 简谐近似

1.尽早近似：一般可以在三个阶段做近似，一是对质点坐标做近似，二是对拉格朗日量做近似，三是对运动方程做近似。在可能的情况下，尽早开始做近似。

2.用最小量表示：各物理量尽可能用小量（通常为与平衡位置的偏移量）表示。

3.保留最低阶：展开时一般只保留到非零的最低阶项。

7.2 阻尼振动

对于与速度成正比的阻尼力$f =-\alpha\dot{x}$，运动方程$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0, \lambda = \frac{\alpha}{2m}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。通解为$x = \begin{cases} [c_1 cos(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t) + c_2 sin(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t)]e^{-\lambda t}, \lambda < \omega \\ (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}, \lambda = \omega \\ [c_1 exp(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t) + c_2 exp(-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t)]e^{-\lambda t}, \lambda > \omega \end{cases}$

7.3 受迫振动

受外力$F(t)$时，谐振系统的拉格朗日量为$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + xF(t)$，运动方程$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。通解为$x = x_0 + x_1$。

对于周期性的外力，如$F(t) = fcos(\gamma t + \beta)$，则存在形如$x_1 = bcos(\gamma t + \beta)$

的特解，代入得$b=\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}$。

对于一般的外力，使用傅里叶变换法求解。对于$\ddot{x}+\omega^2x=f(t)$，作傅里叶变换，$F[f]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-ist}dt=\bar{f}(s)$，那么微分方程转化为$(\omega^2-s^2)\bar{x}=\bar{f}$，所以$x_1=F^{-1}[\bar{x}]=F^{-1}[\frac{1}{\omega^2-s^2}]*F^{-1}[\bar{f}]=\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)sin[\omega(t-\tau)]d\tau$。

令$\xi=\dot{x}+i\omega x$，解得$x=Acos(\omega t+\varphi)+\frac{Im\xi}{\omega}$。

如果同时存在阻尼力和强迫力，一般形式的解过于复杂，下面仅讨论与速度成正比的阻尼力及周期性的强迫力。考虑如下的运动方程$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega^2x=\frac{f}{m}cos\gamma t$。首先改写成复数形式，求$x_1=Be^{i\gamma t}$形式的特解，$B=\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma)}$，特解为$Re\ Be^{i\gamma t}$。

7.4 多自由度

对于广义坐标$q=(q_1,\cdots,q_s)$，若存在平衡位置$q^{(0)}$使得$\frac{\partial U}{\partial q_i}|_{q_i^{(0)}}=0$，令$x_i=q_i-q_i^{(0)}$，则有$L=T-U=\frac{1}{2}M_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j-\frac{1}{2}K_{ij}x_ix_j=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$，运动方程为$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=0$。代入试探解$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}sin\omega t$，得$(-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{A}=0$，它存在非零解的条件是$det\,(-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})=0$。

在非简并情形下，它有 s 个特征值ω_α^2。将简正频率ω_α代入运动方程可以解出简正模A_α，即$\begin{cases}det\,(-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})=0\\(-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{A}=0\end{cases}$。

存在简并时，求出基础解系并施密特正交化，$A_n=a_n-\sum\frac{A_i^Ta_n}{A_i^TA_i}A_i$。

理论力学（教材）

1 拉格朗日方程

1.1 约束和广义坐标

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_i^e + \boldsymbol{R}_i$$

1.1.1 约束的分类

1.完整约束与非完整约束

完整约束（几何约束）：质点满足约束方程$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N; t) = 0$，也就是说约束仅与与各质点的坐标以及时间参量 t 有关，而与各质点的速度无关。完整约束不仅仅对坐标有约束。如果将完整约束关系式对时间分别求一次或二次导数,就能得到与速度或加速度相关的约束。

自由度：描述一个完整约束体系所需独立参量的数目。

如果约束方程不仅含有坐标和时间，还与速度相关，$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N; \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_N; t) = 0$，则称该约束为微分约束。

有些微分约束具有可积性，能转化为几何约束的形式。这类具有可积性的微分约束仍然属于完整约束。相反,有些微分约束不具有可积性,即不能转化为坐标之间的约束关系，则称其为非完整约束。

微分式$F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz$具有可积性，即该式乘以某积分因子$\phi(x,y,z)$后后能变为全微分$df(x,y,z)$的充要条件是$\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0$。

与完整约束不同,非完整约束的独立参量数和自由度并不一致。

2.定常约束与非定常约束

从约束是否与时间有关的角度来考虑,我们把不显含时间的约束称为定常约束（或稳定约束）,其一般形式的数学表示为$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N; \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_N) = 0$，而

显含时间的约束称为非定常约束（或不稳定约束）。

定常约束体系在另一个有相对运动的参考系中看,可以是非定常约束，但是非定常约束和定常约束的这种转换并非总能进行。

3.双侧约束与单侧约束

质点受约束的确定性也是约束的一个重要方面．如果质点始终不能脱离某约束,即该约束是等式的形式,则称该约束为双侧约束 (或称双面约束、不可解约束);如果质点可以在某一侧脱离约束,即该约束是不等式的形式,则称为单侧约束(或称单面约束、可解约束)。

由于单侧约束中不等式的存在,一般认为它也是一种不完整约束．但与不可积的微分约束不同的是,通过对该约束进一步分析,可以将其从不完整约束中除去。

1.1.2 广义坐标

1.广义坐标

任何一组能完全描述力学体系各部分位形的独立参量。

2.位形空间

对于一个自由度为 s 的约束体系,可以将每一个广义坐标q_α看作抽象空间的一个维度,则这一组广义坐标就张成了一个 s 维空间,称为位形空间。位形空间中的一点$(q_1, q_2, \cdots, q_N)$完全确定了质点系的位形,当力学系统随时间变化时,位形点在位形空间中划出一条曲线轨迹。

3.广义坐标的选取

广义坐标的选取方式原则上可以有无限种。我们一般不会去关心这种无限性,往往选取形式直观简洁、性质简单、能反映体系对称性的一组广义坐标。

4.广义速度

广义坐标对时间的一阶导数称为广义速度，与广义坐标和广义速度相配套的概念还有广义力、广义动量。

1.2 达朗贝尔原理与拉格朗日方程

1.2.1 达朗贝尔原理

1 虚位移

质点在某时刻某位置所假想的能满足约束条件的任意无限小位移,称为该质点在此时此地的虚位移．它与实位移(这里特指实际发生的无限小位移)的区别在于:其一,虚位移的产生不需要时间;其二,虚位移不必是实际发生的,只需满足瞬时约束关系,因而可以有无限多种虚位移。

变分算符δ的运算规则:作用在空间坐标时,与微分算符d(或更一般的∂)的运算规则相同,且与微分算符可以交换顺序;而作用在时间上则为零,即$\delta t = 0$（等时变分）。

定常约束中实位移必是虚位移之一，而非定常约束则不一定。

2.虚功

力在虚位移下所做的假想功称为虚功$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$。

3.理想约束

如果所有约束力在虚位移下所做功之和为零,即$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$，则称该约束为理想约束。例如光滑曲面约束、刚性约束、接触约束。

4.达朗贝尔原理

理想约束条件下，质点系所受主动力和惯性力的总虚功为零，即$\sum_i (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$。

5.虚功原理

理想约束体系的平衡条件是，作用于该体系的所有主动力的虚功之和等于零，即$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$。

1.2.2 由达朗贝尔原理推出拉格朗日方程

1.拉格朗日方程的导出

广义力：$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}$

一般形式的拉格朗日方程：$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$

2.保守体系情形

当所有主动力均为保守力时，有$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$，则$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_\alpha}} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_\alpha} = 0$。如果是能与广义速度无关，那么$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$，L 为拉格朗日量，或称拉格朗日函数，上式即为保守体系的拉格朗日方程。如果保守力与非保守力共存，则将保守力吸收到拉格朗日函数中，非保守力仍用广义力表示，即为$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$。

与牛顿动力学方程相比,拉格朗日方程有下列优点:其一,方程数减少了,简化了求解．其二,牛顿方程分析的对象是力矢量,而保守体系的拉格朗日方程分析的对象是具有能量性质的拉格朗日函数标量(即动能和势能),数学上比较方便,而且不受坐标变换的影响。更加有意义的是,相比于力,能量是各种相互作用的普遍度量．所以拉格朗日方法就不再局限于力学范围,可以应用到物理学的其他领域。

1.3 哈密顿原理与拉格朗日方程

1.3.1 变分法简介

1.泛函

如果某变量 J 不是由某一个变量的特殊取值 x 确定,而是取决于整个函数 y(x)的形式,则 J 被称为 y(x)的泛函,记做 J＝J[y(x)]。通俗而形象地说,泛函是函数的函

数。

2.泛函变分

函数 y(x)称为泛函 J[y(x)]的宗量。定义宗量 y(x)的变分是当自变量 x 固定时这两个函数的差,即$\delta y=y(x)-y'(x)$，这种自变量不变的变分称为等时变分。我们只讨论不动边界问题,即在起、终点所有宗量函数取相同值。泛函 J[y(x)]的变分是指由上述变分δy 所引起的 J 的变化,即$\delta J=J[y(x)+\delta y]-J[y(x)]$。

3.变分的运算规则

4.泛函取极值的条件

泛函 J[y(x)]在$y_0(x)$处取极值的必要条件是 J 在$y_0(x)$处的一阶变分为零$\delta J|_{y=y_0(x)}=0$。

5.欧拉方程

一类常见的一维泛函形式为$\mathrm{J}=\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2}\mathrm{f}(\mathrm{y}(\mathrm{x}),\dot{\mathrm{y}}(\mathrm{x}),\mathrm{x})\mathrm{dx}$，它取极值的必要条件为$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathrm{y}}}-\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}=0$，这就是单宗量的欧拉方程。

最速路径方程：$\begin{cases}x=c_1(\theta-sin2\theta/2)\\ y=c_1sin^2\theta\end{cases}$

1.3.2 由哈密顿原理推出拉格朗日方程

1.哈密顿原理

哈密顿原理：体系从时刻t_1到时刻t_2的实际运动将保证线积分$S=\int_{t_1}^{t_2}Ldt$是运动路径的一个极值，即系统所做运动保证对有固定上下限t_1和t_2的线积分 S 的变分为零，S 称为哈密顿作用量。

2.拉格朗日方程的导出

f 是 s 个独立变量y_a及其导数$\dot{y_a}$的函数的情形，则极值要求$\delta\mathrm{J}=\delta\int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2}\mathrm{f}(y_1(\mathrm{x}),y_2(\mathrm{x}),\cdots y_n(\mathrm{x});\dot{y_1}(\mathrm{x}),\dot{y_2}(\mathrm{x}),\cdots \dot{y_n}(\mathrm{x});\mathrm{x})\mathrm{dx}=0$，最后得到$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y_a}}-\frac{\partial f}{\partial y_a}=$

0，称之为欧拉-拉格朗日微分方程。

对于保守体系,我们能够由哈密顿原理导出拉格朗日方程。这一事实的重要意义在于,以前由达朗贝尔原理导出拉格朗日方程的出发点是牛顿力学;而由哈密顿原理导出拉格朗日方程,完全在分析力学框架内. 这就使我们能够以哈密顿原理而不是牛顿运动定律作为基本假设来建立保守体系的力学,打破了牛顿体系的绝对统治地位. 鉴于由变分为零的条件导出欧拉方程的过程步步可逆,也可以从拉格朗日方程反推哈密顿原理.

3.一般情形的哈密顿原理

对于存在非有势力的体系，哈密顿原理是$\int_{t_1}^{t_2}(\delta L+\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\,\delta q_\alpha)dt=0$，导出一般形式的拉格朗日方程$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$。

4.其他类似原理的简介

1.4 拉格朗日力学的进一步讨论

1.4.1 拉格朗日函数的可加性和非唯一性

1.拉格朗日函数的可加性

假定力学系统由 A 和 B 两部分组成,并且每一部分都是封闭的，在极限情形下,当两部分相距很远,以至于它们之间的相互作用可以忽略不计时,整个系统的总动能和总势能分别趋向加和，因而系统的拉格朗日函数趋向加和。

2.拉格朗日函数的非唯一性

拉格朗日函数可以加上任意一个坐标与时间的函数对时间的全微商,这就是拉格朗日函数的非唯一性。

相对论情形下质点的拉格朗日函数：$\mathrm{L}=\mathrm{m_0c^2}(1-\sqrt{1-\beta^2})-\mathrm{V}$

1.4.2 拉格朗日方程解题实例

弹簧摆：一般情况下的求解太复杂,但当振幅不大时,略去高阶项，则

$$\begin{cases} \ddot{l_1}+\omega^2 l_1=0, l_1=l-l_0-\frac{g}{\omega^2}, \omega^2=k/m \\ (l_0+g/\omega^2)\ddot{\theta}+g\theta=0 \end{cases}$$

1.4.3 拉格朗日方程求平衡问题

一般情形下，$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial q_\alpha}=0$，对于保守体系，$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0$。

平衡问题包括两个方面,其一是体系平衡时各部分的位置,其二是体系平衡时各部分所受约束力．由于拉格朗日方程中不出现约束力,无法直接用此方程求解后一问题．但我们可以将待求约束力所对应的约束解除,从而将该约束力视为主动力。

1.5 拉格朗日方程的运动积分与守恒定律

1.5.1 运动积分

如果完整体系的位形由 s 个独立的广义坐标所规定,则要引入２s 个积分常数，这些常数可以由广义坐标表示，且在运动过程中保持初值，称为运动积分（第一积分、首次积分）。原则上可以用运动积分来取代全部的运动方程从而降低微分方程阶数．即使只找到部分运动积分,原问题也在一定程度上被简化,便于进一步分析．特别是其中的一些运动积分,与时间和空间的均匀性或各向同性有内在联系;而且这些守恒量都具有可加性,即总体系的积分常量等于各个子体系内相应积分量之和,这个性质能方便地用于求解子体系的运动状态。

1.5.2 能量守恒定律

1.导出

如果一个保守力学体系不存在任何特别的时间标记,即具有时间的均匀性，那么$\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-L=const$

2.广义坐标下的动能表达式

粒子均有完整约束时，广义坐标下动能表示：$T=T_2+T_1+T_0=\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial \dot{q_\alpha}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial \dot{q_\beta}}\dot{q_\alpha}\dot{q_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \dot{q_\alpha}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\dot{q_\alpha}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}A_{\alpha\beta}\dot{q_\alpha}\dot{q_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{s}B_\alpha\dot{q_\alpha}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2$

3.广义能量

势能函数不显含广义速度时，$\sum_\alpha \dot{q_\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}-L=T_2-T_0+V=const$，对于定常约束$T_1=T_0=0$，$\mathrm{T+V=const}$，我们将一般情形下的运动积分定义为广义能量，由于拉格朗日量的可加性,体系的广义能量也具有可加性。

对于一个具有时间平移对称性的体系,其广义能量守恒. 如果该体系属于定常约束,则其总能量守恒。具有拉格朗日函数不显含时间这一特性的不仅仅是封闭体系,还可以是外场不随时间变化的非封闭体系．我们把能量守恒的这两类力学体系称为保守系。

1.5.3 动量守恒定律

1.导出

如果一个力学体系不存在任何特别的空间标记,即当其整体在空间平移时,力学性质不变化,则其拉格朗日函数也必须不变。质点系的动量守恒，即$\mathbf{P}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}=\mathrm{const}$。

动量也像能量一样具有可加性. 不同的是,总能量与体系内部质点间的相互作用有关,而总动量矢量与体系内部相互作用无关。当存在外场时,空间均匀性遭到破坏,总动量不再守恒．但如果外场势能可以不依赖于某一个或某两个笛卡儿坐标分量,则相应的总动量分量仍然守恒。

1.5.4 角动量守恒定律

1.导出

当力学体系不存在特殊方向,即做空间转动时,体系的力学性质不变,因而其拉格朗日量也保持不变,这种整体对称性也有相应的守恒定律，即角动量守恒定律，$\mathrm{J}=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}} \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}=\text{const}$。

由表达式形式,角动量也具有可加性,且总角动量矢量与体系内部质点间是否存在相互作用无关．这一守恒定律不仅适用于封闭系统,当存在空间各向同性的外场时,总动量仍然守恒．退一步讲,如果外场不再各向同性,但具有旋转对称轴,则对于该对称轴的转动,系统的拉格朗日函数是不变的,因此系统相对于对称轴的角动量分量与时间无关．

1.5.5 广义动量和循环坐标

拉格朗日函数对广义速度的微商$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}$被称为广义动量．如果完整系统的拉格朗日函数不显含一个广义坐标q_α,则q_α称为循环坐标，此时$p_\alpha=const$。

广义动量不必是线动量,也可以为角动量等其他物理量,一般不具有可加性。

1.6 不独立坐标

1.6.1 平衡问题

1.广义力形式的虚功原理

$\sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha=0$，即体系平衡时$Q_\alpha=0$。

2.准广义力形式的虚功原理

$G_m=\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}}{\partial u_m}$，$\sum_{m=1}^{M} G_m \delta u_m=0$，但由于准广义坐标$u_m$不独立，故$G_m$不一定为 0。

3.拉格朗日乘子

设准广义坐标间有l个完整约束$f_j(u_1,u_2,\cdots,u_M;t)=0$，$\delta f_j=0$，引入$l$个待定常数，可得$\sum_{m=1}^{M}\left(G_m+\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_m}\right) \delta u_m=0$，$\lambda_j$称为拉格朗日乘子。

4.问题开拓

线性非完整约束问题与不独立坐标问题有相同的求解方法，意味着独立坐标的数目不会因为非完整约束的存在而减少，线性非完整约束体系的自由度定义为广义坐标数减去非完整约束的个数。

也可以把描述体系位置和形状所需的最少广义坐标数目称为位形自由度,而将力学体系的独立的坐标变分数目称为运动自由度. 于是每一个完整约束既减少一个位形自由度,也减少一个运动自由度;而每一个非完整约束不减少位形自由度,只减少一个运动自由度。

5.求解

l个完整约束使得 M 个δu_m中仅有 $\mathrm{M}-l$个独立，其余可由之表示。可以找到一组拉格朗日乘子使$G_m+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial u_m}=0$。

6.拉格朗日乘子与广义约束力

还原虚功，$\sum_{m=1}^{M}(G_m+S_m)\delta u_m=0$，其中$S_m=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r_i}}{\partial u_m}$是广义约束力。引入约束力后约束解除，$\delta u_m$独立，则$G_m+S_m=0$，$S_m=\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial u_m}$。

1.6.2 不独立坐标拉格朗日方程

$$\frac{\partial T}{\partial u_m}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{u_m}}+G_m+\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial u_m}=0$$

2 拉格朗日方程的应用

2.1 两体的碰撞与散射

2.1.1 两题系统概述

两个相互作用质点组成的封闭体系称为两体系统,两体系统的运动问题称为两体问题。两体问题有三大类型:其一是束缚态问题,所谓束缚态是指两个粒子不

会无限分离,之间的距离总保持有限；其二是俘获和衰变问题；其三是碰撞与散射问题,两个粒子从相距无穷远处靠近,经过相互作用后各自改变了运动状态,之后又相互分离至无穷远。

2.1.2 弹性碰撞

1.背景

如果两个粒子碰撞前后内部状态保持不变,则此碰撞为弹性碰撞。宏观世界中的弹性碰撞其实都不是严格意义上的弹性碰撞，在微观领域中,弹性碰撞是一种基本的碰撞形式。

2.定量分析

在质心系中,碰撞前后两粒子的速度大小不会改变,变化的只可能是它们的运动方向,在实验室系，$\boldsymbol{v'}_{\mathbf{01}}=\frac{m_1\boldsymbol{v}_{\mathbf{01}}+m_2\boldsymbol{v}_{\mathbf{02}}}{m_1+m_2}+\frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{e},\boldsymbol{v'}_{\mathbf{02}}=\frac{m_1\boldsymbol{v}_{\mathbf{01}}+m_2\boldsymbol{v}_{\mathbf{02}}}{m_1+m_2}-\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{e}$

3.实验室系和质心系中散射角的关系

散射角：粒子碰前速度和碰后速度的夹角。

当粒子 2 在实验室系中初速度为零，有 $tan\theta_0=\frac{m_2sin\theta}{m_1+m_2cos\theta},cos\theta=-\frac{m_1}{m_2}sin^2\theta_0\pm cos\theta_0\sqrt{1-\frac{m_1^2}{m_2^2}sin^2\theta_0}$

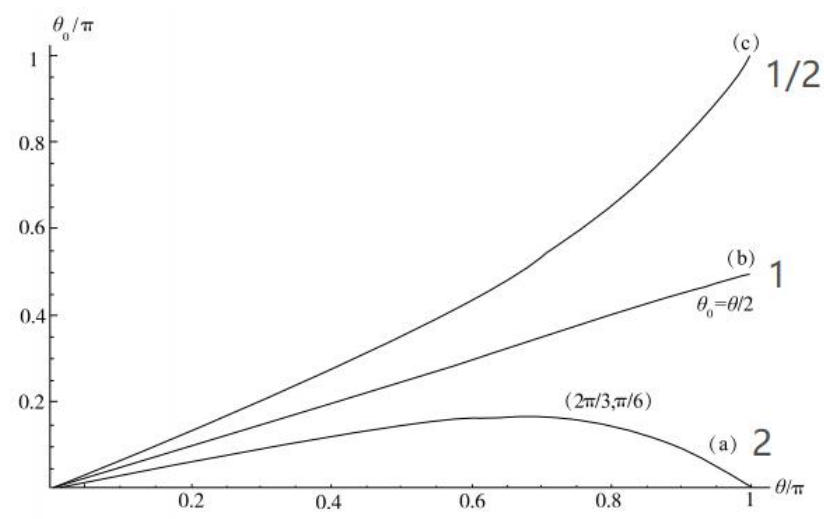


图 2.1.2 不同质量比下质心系和实验室散射角间的关系曲线

2.1.3 粒子散射型的一般性理论

1.散射问题在物理学中的重要性

一方面,我们可以先对微观体系建立相互作用模型,再通过理论计算导出一些重要的散射参量,如散射角和散射截面的关系式．另一方面,这些参量之间的关系又可以通过实验来测量．通过理论结果与实验数据的对比,就能判断理论所预言的相互作用形式是否正确。

2.两体问题的约化

拉格朗日函数$L=\frac{(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_c{}^2}{2}+\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-V(\boldsymbol{r})$，其中$m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$称为约化质量或折合质量。

两体问题的拉格朗日函数可以看成是自由的质心运动部分和存在于两体间相互作用的相对运动部分之和．对研究两体内部相互作用来说,拉格朗日函数中的质心部分可以视为常量,因此可以舍弃掉,两体问题就约化为一个质量为 m 的单粒子在给定势场 V(r)中的运动问题。如果两体系统处于外部势场中,原则上应该影响两个粒子的相对运动．但实际问题中,外势作用的强度常常远小于内部作用势,因而对相对运动的影响可以忽略．即便外势作用较强,如果它的不均匀尺度远大于两体系统的尺度,则该势场对两个粒子的相对运动有几乎相同的作用,也不会影响二者的相对运动。

质心参考系中与单体问题中的散射性质有简单直接的对应. 特别地,这两种体系中有相同的散射角。

3.单次散射过程的分析

如果相互作用势为中心势，那么体系角动量守恒，粒子局限在与角动量垂直的平面内运动。粒子轨道满足方程：$\varphi=\pm\int\frac{Jdr/r^2}{\sqrt{2m(E-V)-J^2/r^2}}$。

在弹性散射问题中,采用粒子在无穷远处的速率v_∞和瞄准距离 b 来代替两个守恒量 E 和 J，则有$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{bdr/r^2}{\sqrt{1-b^2/r^2-2V(r)/mv_\infty^2}}$，式中$r_{min}$由能量和角动量守恒条件确定。

散射角$\theta=\pi-2\varphi_0$。

4.多粒子的散射

微分散射界面$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{dN}{nd\Omega}=\frac{b}{sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$。

如果实验中探测器被安排在散射角为θ的某个立体角 dω内,则由理论预言的进入探测器的散射粒子数$dN'=\frac{d\sigma}{d\Omega}nd\omega=\frac{nb}{sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\omega$。

5.刚球势散射

刚球势散射,顾名思义,即两个具有有限尺度的刚性小球进行散射．在两个刚球接触之前,它们都做匀速直线运动,接触后便在遵守总动量、总角动量及总动能守恒的条件下彼此远离。

瞄准距离与散射角的关系：$b=R\cos\frac{\theta}{2}$,微分散射截面$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{R^2}{4}$,总散射截面$\sigma=\pi R^2$。

当$m_1=m_2$时，$\theta=2\theta_0$，$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}=R^2cos\theta_0$，可见质心系中散射呈各向同性,而在实验室系中所有散射粒子都集中在向前的半区。

当$m_1\ll m_2$时，保留一阶小量，$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}=\frac{R^2}{4}(1+2\frac{m_1}{m_2}cos\theta_0)$，这种情形下实验室系中散射的各向同性只是稍有破坏,向前散射的粒子比向后散射的粒子略多一些,可以证明,前半区与后半区散射粒子数之比为$\frac{m_1+m_2}{m_2-m_1}$。

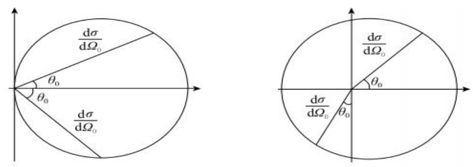


图 2.1.7　实验室系中微分散射截面的空间分布

(a)$m_1=m_2$；(b)$m_1/m_2=0.1$

2.1.4 卢瑟福散射

1.历史背景介绍

2.单次散射中 b 与θ关系

$$b=\frac{\alpha}{mv_\infty^2}cot\frac{\theta}{2},\alpha=\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

3.多粒子散射微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4m^2v_\infty^4}csc^4\frac{\theta}{2}$$

4.实验室系中的微分截面

当$m_1=m_2$时，$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}=\frac{4\alpha^2}{m_1^2v_\infty^4}csc^4\theta_0cos\theta_0$，同刚球势散射一样,只存在向前散射。

当$m_1\ll m_2$时，保留一阶小量，$\frac{d\sigma}{d\Omega_0}=\frac{\alpha^2csc^4\frac{\theta_0}{2}}{4m_1^2v_\infty^4}$，可见除了质量不同，两个坐标系中微分散射截面的形式完全一样。

5.进一步讨论

卢瑟福散射理论与实验测量结果在很大散射角范围内都符合得很好,说明了原子的核式模型是合理的．有两种情形出现了不一致,我们做一个定性分析．其一,当散射角很小时．这是因为此时粒子的瞄准距很大,电子对原子核的屏蔽作用不可忽略了．其二,当散射角接近 180 度时．这是因为原子核并非无限小的点粒子,此时α粒子可以到达离原子核很近的距离,核的形状效应显著,并且核附近可能有库仑势之外的未知相互作用势起作用．因而,这种情形下理论的失效非但不是灾难,还预示了进一步研究的方向．

2.2 多自由度体系的小振动

狭义的振动指机械振动,即物体(或物体的一部分)在某一中心位置两侧所做的往复运动．广义的振动是指,描述系统状态的参量 (如位移、电压、波函数)在其

基准值上下交替变化的过程.

按研究问题的不同角度,振动有各种分类方式. 按运动自由度分,有单自由度振动和多自由度振动. 其中多自由度振动又可进一步分成有限多自由度振动和无限多自由度振动,前者与离散系统相对应,可由常微分方程描述,而后者则与连续系统相对应,要用偏微分方程描述. 当振动方程中不显含时间时,相应的系统称为自治系统;如果振动方程显含时间,则称相应系统为非自治系统. 按系统受力情况,振动又可分为自由振动、阻尼振动和受迫振动. 按受力的性质来分,有线性振动和非线性振动两类. 此外,振动又可分为确定性振动和随机振动,由于受力的随机性,后者的运动没用确定性规律.

一个振动系统,如果其振动幅度没有限制,则振动方程中的广义坐标及其对时间的微商(广义速度、广义加速度)一般以非线性形式存在. 但如果系统振动的幅度很小,以至于振动方程中只需保留广义坐标及其时间微商的一阶项就足够精确,则可以用线性微分方程描述该系统.

2.2.1 自由振动

1.自由度为 2 的保守体系的自由振动

自由振动体系受定常约束,其动能 T 是广义速度的二次齐次式，势能与广义速度无关，取平衡位置为q_1和q_2的零点，令 $\mathrm{V}(0,0)=0$，精确到二阶小量，令$k_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta})_0$，同时动能系数取零阶近似$M_{\alpha\beta}(q_1,q_2)\approx M_{\alpha\beta}(0,0)\triangleq m_{\alpha\beta}$保证动能势能同阶，取解形式为$\begin{cases}q_1=a_1 sin(\omega t+\varphi_0)\\ q_2=a_2 sin(\omega t+\varphi_0)\end{cases}$，最终有$\begin{cases}a_1(k_{11}-m_{11}\omega^2)+a_2(k_{12}-m_{12}\omega^2)=0\\ a_1(k_{21}-m_{21}\omega^2)+a_2(k_{22}-m_{22}\omega^2)=0\end{cases}$，取非零解需久期方程$\begin{vmatrix}k_{11}-m_{11}\omega^2 & k_{12}-m_{12}\omega^2\\ k_{21}-m_{21}\omega^2 & k_{22}-m_{22}\omega^2\end{vmatrix}=(m_{11}m_{22}-m_{12}^2)\omega^4-(m_{11}k_{22}+m_{22}k_{11}-$

$2m_{12}k_{12})\omega^2+(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)=0$（除去零频率的平庸情形，本征频率/固有频率均为正实数）。非简并情形，通解为 $\begin{cases} q_1=a_1^{(1)}sin(\omega_1 t+\varphi_1)+a_1^{(2)}sin(\omega_2 t+\varphi_2) \\ q_1=\mu_1 a_1^{(1)}sin(\omega_1 t+\varphi_1)+\mu_2 a_1^{(2)}sin(\omega_2 t+\varphi_2) \end{cases}$，其中 $\mu_1=\frac{m_{11}\omega_1^2-k_{11}}{k_{12}-m_{12}\omega_1^2}$，$\mu_1=\frac{m_{11}\omega_2^2-k_{11}}{k_{12}-m_{12}\omega_2^2}$；简并情形，$\frac{k_{11}}{m_{11}}=\frac{k_{22}}{m_{22}}=\frac{k_{12}}{m_{12}}\triangleq\omega_0^2$,通解为$\begin{cases} q_1=a_1 sin(\omega_0 t+\varphi_1) \\ q_2=a_2 sin(\omega_0 t+\varphi_2) \end{cases}$

狄利克雷定理：要使多元函数正定，则矩阵正定。

2.自由度为 s 的保守体系的自由振动

首先写出在平衡位置附近体系的动能和势能,保留二阶小量，将它们代入拉格朗日方程，取特解$q_\alpha=a_\alpha sin(\omega t+\varphi_0)$代入中,得到关于振幅系数的齐次方程组，使这个方程组的系数行列式为零（式中 2 s 个 ω 的根全是成对的正、负实数）。如果所有频率都不简并，则通解为$q_\alpha=\sum_{\beta=1}^{s}a_\alpha^{(\beta)}sin(\omega_\beta t+\varphi_\beta)$,$a_\alpha^{(\beta)}=\mu_\alpha^\beta a_1^{(\beta)}$，共有 2 s 个待定常数；当频率存在简并时,频率数下降。

3.简正坐标和本征振动

将上文中解代入拉格朗日方程组，以$a_1^{(\beta)}$表达$a_\alpha^{(\beta)}$，可以解出$a_1^{(\beta)}sin(\omega_\beta t+\varphi_\beta)=\sum_{\alpha=1}^{s}C_\alpha^{(\beta)}q_\alpha$，取$\xi_\beta=\sum_{\alpha=1}^{s}b_\alpha^{(\beta)}q_\alpha$，则$\xi_\beta=a_1^{(\beta)}sin(\omega_\beta t+\varphi_\beta)$，新广义坐标仅包含一种振动模式,我们把这种单一的振动模式称为简正振动或本征振动,相应的广义坐标称为简正坐标。

一定存在线性变换,使 T、V 同时对角化,即$\begin{cases} T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{\xi}_\alpha^2 \\ V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha^2\xi_\alpha^2 \end{cases}$，代入拉格朗日方程，解得$\xi_\alpha=c_\alpha cos(\omega_\alpha t+\varphi_\alpha)$,其中$\omega_\alpha=\lambda_\alpha$。

2.2.2 阻尼振动

物体在振动过程中,不可避免地要与环境交换能量．在一般情形下,这将导致系统的部分能量传递到环境中,这就是耗散现象．如果用传统力学的语言来讲,就

是系统在振动时感受到阻碍运动的阻尼力,因此这样的振动称为阻尼振动。阻尼力可以分为若干类型:最常见的是动摩擦力,它与两个相对运动物体的种类、界面状况有关,而且与二者间的压力成正比．其次是流体对物体运动产生的黏滞阻尼力,它是运动物体与流体之间相对速度的函数．此外流体力学中还有尾流阻尼力和波阻尼力等．由麦克斯韦电磁理论,电荷在做变速运动时存在辐射阻尼力。

1.耗散函数$\mathfrak{F}$

考察黏滞流体中有 N 个质点做小振动,由于速度是小量,黏滞阻尼力与速度成正比,即$\boldsymbol{f_i}=-c_i\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}$,引入耗散函数使之满足$\boldsymbol{f_i}=-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}$，则$\mathfrak{F}=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}c_i\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}{}^2=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\mathrm{c}_{\alpha\beta}\dot{\mathrm{q}}_\alpha\dot{\mathrm{q}}_\beta$,$\mathrm{c}_{\alpha\beta}=\sum_{\mathrm{i}}c_i\frac{\partial\boldsymbol{r_i}}{\partial\mathrm{q}_\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r_i}}{\partial\mathrm{q}_\beta}$，在处理小振动时,只需保留其零阶项就可使得整个耗散函数为二阶小量,所以这里可以视$\mathrm{c}_{\alpha\beta}$为常系数

计及耗散因素后的拉格朗日方程为$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{q}_\alpha}=Q_\alpha$，这里的广义力指的是阻尼力之外的其他主动力．特别地,对保守体系或广义势体系,上式可简化为$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\dot{q}_\alpha}$

2.耗散函数$\mathfrak{F}$的另一个物理意义

它的两倍恰为体系的能量耗散率，即$-\frac{dE}{dt}=2\mathfrak{F}$，耗散函数非负。

3.阻尼振动的求解

将动能、势能表达式及耗散函数式代入阻尼振动的拉格朗日方程，设试探解$q_\alpha=a_\alpha e^{\lambda t}$，代入得$\sum_{\beta=1}^{s}(m_{\alpha\beta}\lambda^2+\mathrm{c}_{\alpha\beta}\lambda+k_{\alpha\beta})a_\beta=\sum_{\beta=1}^{s}d_{\alpha\beta}a_\beta=0$，为了振幅系数有非零解，$|d_{\alpha\beta}|=0$,最终振动解为$q_\alpha=\sum_{\beta=1}^{s}(a_\alpha^{(\beta+)}e^{\lambda_{\beta+}t}+a_\alpha^{(\beta-)}e^{\lambda_{\beta-}t})$,$a_\alpha^{(\beta\pm)}=\mu_\alpha^{(\beta\pm)}a_1^{(\beta\pm)}$。

由于矩阵元$d_{\alpha\beta}$一般都是λ的二次函数,所以此行列式展开后是关于λ的 2 s 次方程,存在 2 s 个λ的根．根据单自由度阻尼振动的经验,我们可以预期,对多自由度

阻尼振动,当阻尼力比较小的时候,这些根两两复数共轭．随着阻尼力强度的增大,可以出现相等的实根,或者相异的实根．但无论什么情况,只要存在耗散,根的实部一定是负数。最终解式必然是实数.

2.2.3 受迫振动

系统在力驱动下所做的振动称为受迫振动,由于自由振动成分的不断衰减,最终系统将按照策动力的频率振动。

1.单自由度系统的受迫振动

取广义策动力$Q(t)=F_0sin(\omega t+\delta)$，将动能、势能、耗散函数代入拉格朗日方程，解由齐次方程通解（由于阻尼项的作用很快做负指数衰减,称为系统的瞬态响应,可以忽略）和相应于广义力的特解（稳态响应）组成，设解$q=asin(\omega t+\delta_0)$，解得$\begin{cases}a=\frac{F_0}{\sqrt{(-m\omega^2+k)^2+\gamma^2\omega^2}}\\tan(\delta_0-\delta)=\frac{\gamma\omega}{m\omega^2-k}\end{cases}$，若 γ 足够小,则当策动力的频率约等于体系的固有频率$\omega_0=\sqrt{k/m}$时,体系振动的振幅取最大值,这就是所谓共振现象。由于耗散的影响,振幅的共振频率ω_r略小于固有频率ω_0。

2.两个自由度的受迫振动

设特解$\begin{cases}q_1=a_1sin(\omega t+\delta_{01})\\q_2=a_2sin(\omega t+\delta_{02})\end{cases}$, 利用复数法求解，记$d_{\alpha\beta}=-m_{\alpha\beta}\omega^2+i\gamma_{\alpha\beta}\omega+k_{\alpha\beta}$，解得$\begin{cases}a_1e^{i\delta_{01}}=\frac{d_{22}e^{i\delta_1}F_1-d_{12}e^{i\delta_2}F_2}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}\\a_2e^{i\delta_{02}}=\frac{-d_{21}e^{i\delta_1}F_1+d_{11}e^{i\delta_2}F_2}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}\end{cases}$，最后有$\begin{cases}q_1=Im\{\widetilde{q_1}\}=Im\left\{\frac{d_{22}e^{i\delta_1}F_1-d_{12}e^{i\delta_2}F_2}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}e^{i\omega t}\right\}\\q_2=Im\{\widetilde{q_2}\}=Im\left\{\frac{-d_{21}e^{i\delta_1}F_1+d_{11}e^{i\delta_2}F_2}{d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}}e^{i\omega t}\right\}\end{cases}$,当策动力频率接近系统的固有频率时,上式中的分母$d_{11}d_{22}-d_{12}d_{21}$接近于零,从而引起共振.

3.s 个自由度系统的受迫振动

设特解$q_\alpha = a_\alpha sin(\omega t+\delta_{0\alpha})$，解得$a_\alpha e^{i\delta_{0\alpha}} = \frac{|F_\alpha|}{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{s1} & d_{s2} & \cdots & d_{ss} \end{vmatrix}}$，其中$|F_\alpha|$表示将 d 系数的行列式中的第α列用$F_\alpha$列向量代替所得的行列式。

对共振情形，如果不存在耗散，可得体系振动的固有频率为$\begin{vmatrix} d'_{11} & d'_{12} & \cdots & d'_{1s} \\ d'_{21} & d'_{22} & \cdots & d'_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d'_{s1} & d'_{s2} & \cdots & d'_{ss} \end{vmatrix} = 0, d'_{\alpha\beta} =- m_{\alpha\beta}\omega^2 + k_{\alpha\beta}$的根,加上策动力后,受迫振动解的分母就是$d'_{\alpha\beta}$所构成矩阵的行列式。如果策动力的频率恰等于某个固有频率,则受迫振动解的分母为零,这将导致无限共振．但有两点原因使得这种不合理的局面不会出现,其一,耗散使得分母上的系数行列式由$|d'_{\alpha\beta}|$变为$|d_{\alpha\beta}|$,在共振时取值很小但不为零;其二,当振幅充分大时,小振动近似已不再成立,需要考虑振动中的非线性效应。

4.小振动的应用——求解耦合电路

电磁量	电量 e	电流强度i	电感 L	电阻 R	电容倒数 1/C	电动势$\mathfrak{E}$
力学量	广义坐标 q	广义速度 dq/dt	质量 m	耗散系数γ	弹性系数 k	广义策动力 Q(t)

$$T = \frac{1}{2}\sum L_\alpha i_\alpha^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta} M_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\sum \frac{e_\alpha^2}{C_\alpha}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\sum R_\alpha i_\alpha^2$$

,耦合电路问题就转化为一个纯力学的问题,电磁学中求解交流耦合电路时有很成熟的方法,所以完全可以将受迫振动问题变换为交流耦合电路问题来求解．更进一步,对于一个受迫振动体系,可以搭建一个与之对应的耦合电路,在实验上直接测量电流,然后再对应回原来的力学系统,就能很方便地在示波器上直观地

“观察”受迫振动解.

2.3 非线性振动

振动方程中还可能包含位置、速度和加速度的非线性项(包括这些量的乘积),这时的振动就叫非线性振动.

1.解析求解法：大振幅单摆问题

2.微扰法

微扰法又称为逐级近似法或摄动法,在振动类的问题中,它适于求解形如$\ddot{x}+\omega_0^2x=f(x,\dot{x})$的振动方程,其中非线性项$|f(x,\dot{x})|\ll|\omega_0^2x|$,可将其视为对线性方程的微扰或摄动.为彰显微扰的数量级,我们引入参量ε,将上式写成$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x})$。微扰法的基本做法是：令 x 和 ω 的 n 阶近似解为$\begin{cases}x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots+\varepsilon^nx_n\\\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots+\varepsilon^n\omega_n\end{cases}$,将上式代入,使等式两侧 ε 同级幂的系数相等,就得到关于各阶x_i和ω_i的一组方程,从零阶开始逐级求解这些方程(求解第 i 阶方程时,把零到 i－１阶的解作为已知条件),便可以得到原方程的 n 阶近似解。

3.解析法、微扰法和数值计算法的比较

(１)解析法能彻底解决问题,而且能较清楚地揭示研究体系的内在规律．但缺点是适用的范围很有限,对大多数问题是无能为力的.

(２)微扰法比解析法适用的范围广,当待求对象是一个简单系统加上小的扰动时,就可以用微扰法来处理．只是数学上较繁琐,特别是高阶微扰,而且对大扰动或非微扰体系无能为力.

(３)更一般的体系,由于其内禀的复杂性,以上两种方法都将失效,必须采用数值计算才能求解．随着计算机性能的提升及数值计算方法的丰富和改进,很多原先不能很好分析的体系都能通过数值计算得到定量的描述．值得指出的是,数值

计算不仅能得到问题的数值解,而且往往对该问题可否解析求解,或者能在多大程度上解析求解提供重要的信息.

(４)这三种方法都是实际科研工作中的基本手段,一个课题的研究过程往往是先解析地建立一些基本规律,再用微扰法有效地解决更细致的问题,最终靠强大的数值计算研究给出研究体系的所有细节.

2.4 带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数

1.广义势能

如果体系的广义力Q_α，不能表示成$-\partial V/\partial q_\alpha$的形式,则无法满足通常形式下保守系的拉格朗日方程．但如果Q_α仅与广义坐标和广义速度有关,而且能构造出以广义坐标和广义速度为自变量的函数$\mathrm{U}=\mathrm{U}(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}})$，使得$Q_\alpha=-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q_\alpha}}$，则该体系的拉格朗日方程仍能化成保守系的形式．L＝T－U，把 U 称为广义势能.

2.带电粒子在电磁场中的广义势能

磁场是无源场，可令$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，使得$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$，那么电磁力$\mathrm{F}=\mathrm{e}[-\nabla\varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]=\mathrm{e}[-\nabla\varphi-\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})]$，则带电粒子广义势能$U=e(\varphi-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})$。

3.拉格朗日函数

$L=\frac{1}{2}mv^2-e\varphi+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$，广义动量$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{A}$。

2.5 连续体系的拉格朗日方程

2.5.1 一维均匀弹性棒的纵向振动

1.离散模型

一维均匀弹性棒可以看成是由排列成直线的足够多的质点和弹簧构成的系统，其中每个质点质量为 m,每根弹簧劲度系数为 k,各质点间的平衡位置相距

a. 设η_i是第 i 个质点偏离平衡位置的位移,则体系拉格朗日函数为$L=\frac{1}{2}\sum_i\left[m\dot{\eta}_i^2-k(\eta_{i+1}-\eta_i)^2\right]$

2.模型的连续化

弹性棒的线密度$\rho=m/a$，记$\xi=\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$为弹性棒单位长度的形变，而$ka=E$是弹性棒单位长度的劲度系数,即一维弹性模量. 那么$L=\frac{1}{2}\int a\left[\rho\dot{\eta}^2-E\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]dx\equiv\int\mathcal{L}dx$，其中$\mathcal{L}$是拉格朗日密度，它可以写成动能密度$\mathcal{T}$与势能密度$\mathcal{V}$之差的形式$\mathcal{L}=\mathcal{T}-\mathcal{V}=\frac{1}{2}\rho\dot{\eta}^2-\frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2,\eta=\eta(t,x)$。推广到三维，一般有 $L=\iiint\mathcal{L}dx_1dx_2dx_3,\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(\eta,\frac{\partial\eta}{\partial t},\frac{\partial\eta}{\partial x_j},t,x_j\right),\eta=\eta(t,x_j)$。

2.5.2 由哈密顿原理导出连续体系的拉格朗日方程

1.单宗量情形

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}+\sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial\eta/\partial x_j\right)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}=0,t\text{与}x_j\text{独立}$$

对于一维弹性棒的纵向振动，拉格朗日方程为$\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-E\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$，解为$\eta=\eta_1\left(x-\sqrt{\frac{E}{\rho}}t\right)+\eta_2\left(x+\sqrt{\frac{E}{\rho}}t\right)$, 其中$\eta_1$和$\eta_2$分别表示沿着棒的正方向和负方向传播、速度均为$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$的机械波.

2.多宗量情形

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\eta_k/\partial t)}+\sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dx_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial\eta_k/\partial x_j\right)}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_k}=0$$

2.5.3 电磁场的拉格朗日方程

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2-\frac{B^2}{\mu_0}\right)-\rho\varphi+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}$$

3 哈密顿力学

3.1 哈密顿正则方程

3.1.1 勒让德变换与哈密顿正则方程

1.勒让德变换

$$x,y\to u,y，g=-f+ux$$

$$x,y\to x,v，g'=-f+vy$$

$$x,y\to u,v，g''=-f+ux+vy$$

对于多变量函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_s;y_1,y_2,\cdots,y_s)$，如果$u_a=\frac{\partial f}{\partial x_a},v_a=\frac{\partial f}{\partial y_a}$，其勒让德变换为$g=-f+\sum_{a=1}^{s}u_ax_a$，它对新独立变量$u_a$的偏导数对$y_a$的偏导数有$x_a=\frac{\partial g}{\partial u_a},v_a=-\frac{\partial g}{\partial y_a}$。变换中，新旧变量地位互换，新变量为旧变量的共轭变量。

2.哈密顿正则方程的导出

$H(p,q,t)=\sum_{a=1}^{s}\dot{q}_ap_a-L(q,\dot{q},t)$，有$\dot{q}_a=\frac{\partial H}{\partial p_a},\dot{p}_a=-\frac{\partial H}{\partial q_a},\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$，这些方程形式上对于$p_a,q_a$有高度对称性，称为哈密顿正则方程，简称正则方程。同一下标的广义坐标和广义动量称为正则共轭量。这种形式的正则方程适用于保守体系或包含广义势的体系.

3.1.2 哈密顿原理与哈密顿正则方程

位形空间/相空间中最小作用量原理。

3.1.3 循环坐标和劳斯方法

如果某个q_a在哈密顿函数中不出现，那么$\dot{p}_a=0$，$p_a=const$，即p_a是运动积分，也成循环积分，称q_a为循环坐标。

1.哈密顿正则方程和拉格朗日方程中循环坐标的关系

哈密顿函数和拉格朗日函数同时显含或不显含q_a，故同为哈密顿正则方程或拉格朗日方程的循环坐标，对应广义动量均为运动积分。

差别在于：哈密顿正则方程中广义坐标和广义动量是对称的独立坐标，循环

坐标导致其共轭的广义动量守恒，退化为一个常数，因此减少了一对独立变量，自由度减少。而拉格朗日方程的独立变量是广义坐标和广义速度，尽管循环坐标相对应的广义动量守恒，但对应的广义速度却未必是常数，自由度不变。

2.劳斯方法

设循环坐标为 $q_1,\cdots,q_m$，定义劳斯函数 $\mathrm{R}(q_1,q_2,\cdots,q_s;p_1,p_2,\cdots,p_m;\dot{q_{m+1}},\cdots,\dot{q_s};t)=\sum_{a=1}^{m}\dot{q_a}p_a-L$，关于坐标$q_1,\cdots,q_m$，R 的行为同于哈密顿函数，而其余坐标，R 的行为同于拉格朗日函数。实际上，循环坐标对应的广义动量守恒，变成了$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，劳斯函数 $\mathrm{R}=\mathrm{R}(q_{m+1},\cdots,q_s;\dot{q_{m+1}},\cdots,\dot{q_s};\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m;t)$。

3.1.4 应用举例

对于定常约束（拉氏量不含特殊时间标记），哈密顿函数就是体系总能量。

3.2 泊松括号

3.2.1 泊松括号的定义和性质

1.泊松括号的引入

定义泊松括号为$[u,v]\triangleq\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial q_\alpha}\frac{\partial v}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\frac{\partial v}{\partial q_\alpha}\right)$，$u,v$可以是以广义坐标、广义动量和时间为自变量的任意力学量。

所以，$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]$。

2.泊松括号的基本性质

（1）反对称性，即$[u,v]=-[v,u]$

（2）偏导性质，$\frac{\partial}{\partial x}[u,v]=[\frac{\partial}{\partial x}u,v]+[u,\frac{\partial}{\partial x}v]$

（3）分配律：$[u,v+\omega]=[u,v]+[u,\omega]$

（4）结合律：$[u,v\omega]=[u,v]\omega+[u,\omega]v$

（5）涉及广义坐标和广义动量的泊松括号：$[q_\alpha, q_\beta] = 0$，$[p_\alpha, p_\beta] = 0$，$[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$，$[q_\alpha, f] = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$，$[p_\alpha, f] =- \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$

量子力学的基本对易子与基本泊松括号仅差了一个比例因子，对易子是泊松括号在量子力学的拓展。

（6）泊松恒等式，或称雅可比恒等式：$[\mathrm{u}, [\mathrm{v}, \omega]] + [\mathrm{v}, [\omega, \mathrm{u}]] + [\omega, [\mathrm{u}, \mathrm{v}]] = 0$。

（7）泊松括号相对于正则变换的不变性：当广义动量和广义坐标由p_α和q_α换成另一组正则变量P_β和Q_β时，泊松括号的值不变，即$[u, v]_{p,q} = [u, v]_{P,Q}$

3.2.2 泊松括号的应用

1.以泊松括号表示的运动方程

如果力学量只与广义坐标和广义动量有关，而不显含时间，则$\dot{f} = [f, H]$。

2.运动积分与泊松括号

力学量是运动积分的条件是$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$，如果$f$不显含时间，则条件简化为$[f, H] = 0$，也就是说，不显含时间的力学量成为运动积分的充要条件是它与系统哈密顿量的泊松括号为零。

3.泊松定理

如果$u(q, p, t)$和$v(q, p, t)$是某系统的两个运动积分，则由他们组成的泊松括号也是运动积分，即$[u, v] = const$。

3.3 正则变换

3.3.1 正则变换方程

1.问题的提出

一个体系的循环坐标数目与广义坐标和广义动量的选择有关，对一个具体问题，原则上总存在一种特殊选择，使得所有的坐标都是循环的。

一旦找到这套坐标，则所有的广义动量守恒，记为$p_\alpha=\beta_\alpha$，β_α是常数参量。又循环坐标不出现在哈密顿函数中，$H(p,q)=H(\beta)$，那么$\dot{q_\alpha}=\frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta_\alpha}=\gamma_\alpha(\beta)$，$\gamma_\alpha$只与$\beta$相关，必然也是不随时间改变的常数。积分，得$q_\alpha=\gamma_\alpha t+\delta_\alpha$。

2.正则变换

从一组坐标到另一组坐标的变换称为点变换。有变换$\begin{cases}Q_\alpha=Q_\alpha(q,p,t)\\P_\alpha=P_\alpha(q,p,t)\end{cases}$，我们希望变换后某函数$K(Q,P,t)$满足新广义坐标和广义动量的哈密顿方程，即$\dot{Q}_\alpha=\frac{\partial K}{\partial P_\alpha}$,$\dot{P}_\alpha=-\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha}$，符合这个条件的变换称为正则变换。函数 K 是新广义坐标和广义动量表示下的哈密顿函数。

$\left[\sum_\alpha p_\alpha \dot{q_\alpha}-H(q,p,t)\right]-\lambda\left[\sum_\alpha P_\alpha \dot{Q}_\alpha-K(Q,P,t)\right]=\frac{dF}{dt}$是一个正则变换，$\sum_\alpha(p_\alpha\delta q_\alpha-P_\alpha\delta Q_\alpha)=\delta F$就是变分形式的正则变换条件。

3.正则变换的生成函数

一旦F给定，变换就能完全确定，因此F称为正则变换的生成函数，或称母函数。根据独立变量的选择方式，有四种基本形式的生成函数：$F_1(q,Q,t),F_2(q,P,t),F_3(p,Q,t),F_4(p,P,t)$。取 q,Q,t 独立，那么有$p_\alpha=\frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha},P_\alpha=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha},K=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$。其余生成函数可以由勒让德变换给出。对于$F_2$，$p_\alpha=\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha},Q_\alpha=\frac{\partial F_1}{\partial P_\alpha},K=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$；对于$F_3$，$q_\alpha=-\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha},P_\alpha=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha},K=H+\frac{\partial F_3}{\partial t}$；对于$F_4$，$q_\alpha=-\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha},Q_\alpha=\frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha},K=H+\frac{\partial F_4}{\partial t}$。

3.3.2 正则变换实例

1.常见的几种基本变换

（1）恒等变换。取生成函数为$F_2=\sum_\alpha q_\alpha P_\alpha$,则有$p_\alpha=P_\alpha,Q_\alpha=q_\alpha$。

（2）相空间中的平移变换。令$F_2=\sum_\alpha(q_\alpha+c_\alpha)(P_\alpha-d_\alpha)$，则有$p_\alpha=P_\alpha-d_\alpha,Q_\alpha=q_\alpha+c_\alpha$。

（3）广义坐标和广义动量互换的变换。取$F_1 = \sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha$，则有$p_\alpha = Q_\alpha$，$P_\alpha = -q_\alpha$。

（4）q，p 分别在位形空间和动量空间内的正交变换。设$F_2 = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} P_\alpha q_\beta$，其中$a_{\alpha\beta}$构成正交矩阵，即$\sum_\beta a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma}^T = \delta_{\alpha\gamma}$,所以$p_\beta = \sum_\alpha a_{\alpha\beta} P_\alpha$, $Q_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} q_\beta$。那么有$P_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} p_\beta$，即该变换让广义坐标在位形空间作正交变换,让广义动量在动量空间作相同的正交变换。特别的，如果系数矩阵行列式为+1，则广义坐标和广义动量分别在各自空间做转动。

这里给出的几个基本正则变换,各自只存在两个生成函数,不可能通过勒让德变换,由这两个生成函数导出另两个生成函数。

2.例题

3.3.3 无限小正则变换

1.定义

选取生成函数为$F_2 = \sum_\alpha q_\alpha P_\alpha + \varepsilon G(q, P, t)$，其中$\varepsilon$为无限小参量，那么有$p_\alpha = P_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}$，$Q_\alpha = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_\alpha}$，$K = H + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}$，即$p_\alpha$和$P_\alpha$之差是关于$\varepsilon$的一阶小量，在忽略$\varepsilon$的二阶小量时，有$Q_\alpha = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}$，于是新旧正则变量、哈密顿量之差分别为$\delta q_\alpha = Q_\alpha - q_\alpha = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}, \delta p_\alpha = P_\alpha - p_\alpha = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}, \delta H = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial t}$。

可见新、旧正则变量、哈密顿量之间均相差一个无限小量，这样的变换被称为无限小正则变换，$G(q, P, t)$则被称为无限小正则变换的生成函数。

如果把ε视为连续参量λ的微分，即$\varepsilon = d\lambda$，则新、旧正则变量对应于相空间中无限接近的两个不同相点$\delta d = d\lambda \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}, dp_\alpha = -d\lambda \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}$，刻画了在相空间中系统随$\lambda$的连续演化。

2.性质

无限小正则变换的生成函数一定是不显含时间的运动积分。

3.3.4 正则变换的辛矩阵理论

1.广义坐标和广义动量一体化下的正则方程

设$\{q,p\}$是体系的一组正则变量，令$\eta=\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}$，则哈密顿正则方程$\begin{pmatrix}\dot{q}\\\dot{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{I}_s\\-\boldsymbol{I}_s & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial H/\partial q\\-\partial H/\partial p\end{pmatrix}$,可简记为$\dot{\eta}=\boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \eta}$。矩阵$\boldsymbol{J}$具有性质：$\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}_{2s}$,$\boldsymbol{J}^T=\boldsymbol{J}^{-1}=-\boldsymbol{J}$, $det\boldsymbol{J}=1$。

2.正则变换条件

（1）不含时情形

若$\{q,p\}\to\{Q,P\}$是一个不含时的正则变换，则对新正则变量有$\dot{\xi}=\boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \xi}$, 其中$\xi=\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}$，形式上$\begin{pmatrix}\dot{Q}\\\dot{P}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial Q/\partial q & \partial Q/\partial p\\\partial P/\partial q & \partial Q/\partial p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}\\\dot{p}\end{pmatrix}$，也即$\dot{\xi}=\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\dot{\eta}=\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \eta}=\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\boldsymbol{J}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^T\frac{\partial H}{\partial \xi}$。故$\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\boldsymbol{J}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^T=\boldsymbol{J}$，记矩阵$\frac{\partial \xi}{\partial \eta}=\boldsymbol{M}$，则$\boldsymbol{MJM}^T=\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{M}$称为辛矩阵，在不含时情形，可作为正则变换判据。

除此式外，$\boldsymbol{M}$还有性质：$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{JM}=\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{J}(\boldsymbol{M}^n)^T=\boldsymbol{J}$,det$\boldsymbol{M}$=1,$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2)^T=\boldsymbol{J}$，任意两个辛矩阵的乘积仍为辛矩阵，因而两个正则变换的总变换仍旧是正则变换。

（2）含时情形

设正则变量初值$\xi_a(t_0)=\xi_{0a}$，则正则变量$\xi(t)$是初值的函数$\xi=\xi(\xi_0,t)$且满足$\dot{\xi}=\boldsymbol{J}\frac{\partial K}{\partial \xi}$，此时$\boldsymbol{M}=\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}$，有$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\boldsymbol{J}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \xi}\right)\boldsymbol{M}$, $\frac{d\boldsymbol{M}^T}{dt}=\boldsymbol{M}^T\left(\frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \xi}\right)(-\boldsymbol{J})$，那么$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{JM})=0$ 则$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{JM}=\boldsymbol{J}$，当$t=t_0$时，$\boldsymbol{M}_0$是单位矩阵。

3.泊松括号的正则不变性

对任意力学量ψ，$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^T\frac{\partial \psi}{\partial \xi}=\boldsymbol{M}^T\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$，所以$[\varphi,\psi]_\eta=\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^T\boldsymbol{J}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}=[\varphi,\psi]_\xi$，即任意两个力学量的泊松括号与采用何种正则变量无关。

3.4 哈密顿-雅可比方程

3.4.1 哈密顿-雅可比方程

1.哈密顿-雅可比方程的建立

利用正则变换,原则上可以寻找更多的运动积分，但并没有一个明确的规则来指导发现恰当的正则变换。不同体系的原哈密顿函数形形色色,变换后的新哈密顿函数不可能有统一的简化方法,除非按以下的设想：

设有一个特殊的正则变换,其母函数为$F_2(q,P,t)$，它能使变换后的哈密顿函数$K(P,Q,t)\equiv 0$，那么新坐标都是运动积分。由正则变换方程可知，$H(q;\frac{\partial S}{\partial q};t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$，其中$S(q,t)=F_2(q,t)+A$，上式称为哈密顿-雅可比方程，$S$称为哈密顿主函数。

2.哈密顿主函数的意义

$S=\int Ldt$，即S为积分上下限未定的哈密顿作用量。

3.哈密顿特征函数

设哈密顿函数 H 不显含时间，则它一定是守恒量，设为常数 E，则$\frac{\partial S}{\partial t}=-E$，那么$S=-Et+W(q)+A$，故而$W(q)=\int\sum pdq$，$W$为哈密顿特征函数，$\int\sum pdq$为莫培督作用量，只是没有上下限。

$p_\alpha=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$，所以$H(q;\frac{\partial W}{\partial q};t)=E$，本式是哈密顿特征函数所满足的微分方程，也称 H 为常数或不含时哈密顿-雅可比方程。

$F_2(q;\eta;t)=-Et+W(q;E,\eta;t)$，所以新的广义坐标常量$\xi=\frac{\partial F_2}{\partial \eta}=\begin{cases}-t+\frac{\partial W}{\partial E}\\ \frac{\partial W}{\partial \eta}\end{cases}$

3.4.2 应用举例

对于哈密顿函数为$H=\frac{\sum_\alpha f_\alpha(q_\alpha,p_\alpha)}{\sum_\alpha g_\alpha(q_\alpha,p_\alpha)}$问题，可设$W=\sum_\alpha W_\alpha(q_\alpha)$，得到$f_\alpha(q_\alpha,\frac{\partial W_\alpha(q_\alpha)}{\partial q_\alpha})-Eg_\alpha(q_\alpha,\frac{\partial W_\alpha(q_\alpha)}{\partial q_\alpha})=C_\alpha$，$\sum_\alpha C_\alpha=0$。

3.5 经典力学的延伸

3.5.1 经典力学与统计力学 1——相空间和刘维定理

1.相点密度

相空间中的任一点代表力学系统的一个确定的运动状态,这个点称为代表点或相点．当力学体系随时间演化时,相点在相空间移动,其轨迹称为相轨道．两个相轨道不可能相交。

随着质点数的增加,微分方程的数目和初始条件同步增加,导致求解过程的困难程度迅速增大,计算很快便无法进行下去．这种困难在传统分析模式下是不可克服的,只能牺牲掉一些细节的信息,而更多地关注系统“粗线条”的整体性质———这就是统计力学的出发点。

由于体系含有大量质点,初始时刻某个质点在相空间中的确切位置是不知道的,但我们可以用相点的一个集合充满整个相空间,其中每一点都代表一个可能状态．定义相点密度为单位相空间体积中代表点的数量,即$\rho=\frac{dN}{dV}$，其中$dV=dq_1\cdots dq_s dp_1\cdots dp_s$

2.刘维定理

$\frac{d\rho}{dt}=0$，相空间中相点的密度在运动中保持恒定。

3.刘维定理的几个应用

当体系达到统计平衡时，$[\rho,H\}=0$。

3.5.2 经典力学与统计力学 2——位力定理

1.位力定理

考虑一群质点,其位矢$\boldsymbol{r_i}$和动量$\boldsymbol{p_i}$都是有界的,即质点不会运动到无穷远处,动量也不会发散．定义 $S\triangleq\sum_i \boldsymbol{p_i}\cdot\boldsymbol{r_i}$，则$\overline{\frac{dS}{dt}}=0$，有$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_i \boldsymbol{F_i}\cdot\boldsymbol{r_i}}$，右项称为均位

力积，简称位力（维里）。位力定理：质点系的平均动能等于其位力.

如果$\boldsymbol{F_i}$是保守力，则$\overline{T}=\frac{1}{2}\overline{\sum_i \nabla V_i\cdot \boldsymbol{r_i}}$，如果$V=kr^{n+1}$，则$\overline{T}=\frac{n+1}{2}\overline{V}$

2.利用位力定理导出理想气体状态方程

3.5.3 经典力学与量子力学——定态薛定谔方程的建立

1.用哈密顿-雅可比方程导出定态薛定谔方程

以不含时的单粒子力学体系为例，假设$W=\hbar ln\,\psi$,得到$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]+[V(\boldsymbol{r})-E]\psi^2=0$，假设微观领域的粒子并不直接满足上述方程,而是左边部分对起始和终点的空间积分后的变分为零,即$\delta\int_1^2 d\boldsymbol{r}\ \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi)^2+(V-E)\psi^2=0$，简化为$\int_1^2 d\boldsymbol{r}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+[V(\boldsymbol{r})-E]\psi\right\}\delta\psi=0$，即$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi=E\psi$，即定态薛定谔方程。

２.进一步讨论

4 刚体的运动

理想的刚体是不存在的，其一,实际的固体，微观地看来,基本成分都是原子或分子,彼此间通过电磁相互作用(主要是静电作用)和一些量子机制在各自平衡位置附近做无规的热振动．其二,理想刚体具有无限的硬度,如果在其某处施加一力,则其他部分应该立即感受此力的影响,不需要任何时间．这与相对论的观点———任何相互作用的传播速度不能超过真空光速相矛盾.

4.1 刚体运动的描述

4.1.1 刚体的自由度和运动分类

1.自由刚体的自由度

2.刚体运动的分类

（1）平动：当刚体运动时,其上的所有质点具有相同的速度和加速度,以其中

一个质点的运动就可以表征整个刚体的运动,因而自由度是３;

（2）定轴转动:当刚体运动时,刚体上有两个质点保持位置不变,由于其余质点与这两个质点的距离要保持不变,可能的运动只能是以两个质点所在直线为轴,做自由度为１的转动;

（3）平面平行运动:当刚体运动时,刚体上任一点始终处于同一平面内,有两个平动自由度和一个转动自由度,总自由度为３；

（4）定点转动:当刚体运动时,刚体上有一点保持位置不变,增加了三个约束关系,因而自由度为３;

（5）一般运动:刚体不受任何附加约束,自由度６；

一般运动可以分解为平动和定点转动的组合。

4.1.2 刚体运动的欧拉定理

1.惯性坐标系和本体坐标系

在研究刚体的运动时,需要用到两种坐标系．一种是普通的惯性坐标系,或称空间坐标系、固定坐标系,它是观察者所在的参考系．另一种固定在刚体上并与刚体同步运动,称为本体坐标系.

2.刚体运动的欧拉定理

刚体运动的欧拉定理的表述是:具有一个固定点的刚体的任一位移,等效于绕该定点的某一轴线的转动．也就是说，具有某固定点的刚体的实际运动所对应的转动矩阵必定有本征值＋１。

欧拉定理的一个直接的推论是沙勒定理,即刚体的一般运动是平动加转动．这是因为,刚体的一般运动可以视为刚体中某点的平动加上刚体相对于此点的运动．而根据欧拉定理,后一运动就是绕过该点的某转轴的转动.

在偶数维空间,具有一个固定点的刚体的任一位移一般不能等效于绕过该定点的某一轴线的转动.

4.1.3 无限小转动和角速度

1.有限转动不是矢量

2.无限小转动是矢量

无限小转动对应的矩阵与单位矩阵相差一个一阶小量，表示为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varepsilon}$。

3.角速度

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}$$

4.1.4 刚体上任一点的速度和加速度

1.纯转动情形

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

2.一般运动情形

刚体运动分解为刚体随基点 C 的平动加上绕 C 的纯转动。

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_C+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

3.转动瞬轴

速度为零的的基点称为瞬心，对一般刚体运动，一旦有一个点满足$\boldsymbol{v}_C=0$，就必然有无穷多个这样的基点。所有的转动瞬心恰构成一条与$\boldsymbol{\omega}$平行的直线，称为转动瞬轴。转动瞬心和转动瞬轴只是在某时刻静止,但加速度并不是零。

4.2 欧拉刚体运动学方程

4.2.1 欧拉角

1.欧拉角的构建

从一坐标系到另一坐标系的变换可以用如下的矩阵形表示为：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'$，令$\boldsymbol{x}'$和$\boldsymbol{x}$表示示惯性坐标系和本体坐标系中的矢量,则旋转矩阵$\boldsymbol{A}$描述了两个坐标系的相对取向。该矩阵包含三个独立的参量，原则上有很多选法,但习惯上采用如下定义的欧拉角。通过按照特定次序的三次相对转动来完成从惯性坐标系到本体坐标系的变换,而欧拉角就是这三次变换中相继转动的角度。

第一次旋转是 $x'y'z'$ 系绕 z' 逆时针转动 φ 角，得 $x''y''z''$ 系，$\boldsymbol{A_\varphi}=\begin{pmatrix}cos\varphi & sin\varphi & 0\\ -sin\varphi & cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，第二次旋转是 $x''y''z''$ 系绕 x'' 逆时针转动 θ 角，$\boldsymbol{A_\theta}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\theta & sin\theta\\ 0 & -sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$，$x''y''$ 平面与 $x'''y'''$ 平面的交线，称为节线，第三次旋转是 $x'''y'''z'''$ 坐标系逆时针旋转ψ角，得到 xyz 系，$\boldsymbol{A_\psi}=\begin{pmatrix}cos\psi & sin\psi & 0\\ -sin\psi & cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，总变换为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A_\psi A_\theta A_\varphi}$，三个欧拉角$\varphi$、$\theta$和$\psi$分别为进动角、章动角、自转角。

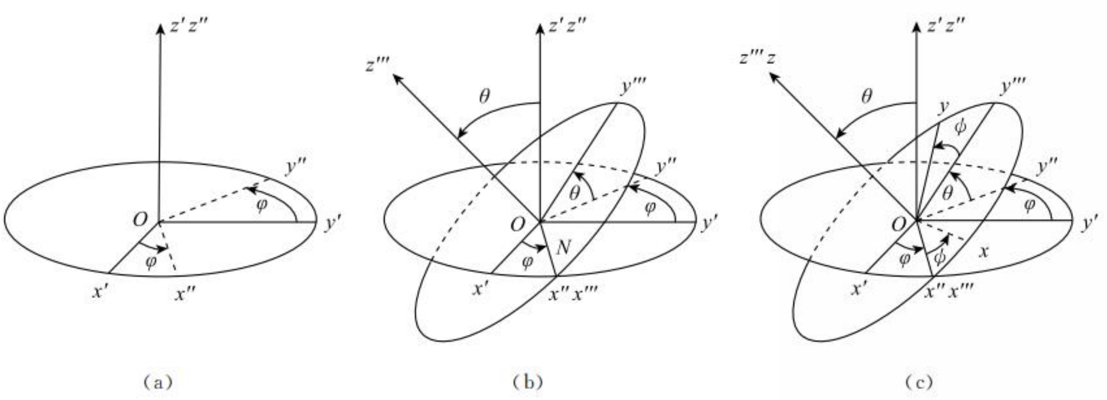


图 4.2.1 欧拉角

2.欧拉角的其他形式

欧拉角共有 12 种定义方式。

4.2.2 欧拉刚体运动学方程

三个欧拉角的角速度方向分别为：$\dot{\boldsymbol{\varphi}}$沿惯性系 z'轴，$\dot{\boldsymbol{\theta}}$沿节线 ON，$\dot{\boldsymbol{\psi}}$沿本体

系 z 轴，它们沿本体系分轴的分量为$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dot{\varphi}(sin\theta sin\psi, sin\theta cos\psi, cos\theta)$，$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\dot{\theta}(cos\psi, -sin\psi, 0)$，$\dot{\boldsymbol{\psi}}=\dot{\psi}(0,0,1)$，那么总角速度在本体坐标轴上的分量为$\boldsymbol{\omega}=\left(\dot{\varphi}sin\theta sin\psi+\dot{\theta}cos\psi, \dot{\varphi}sin\theta cos\psi-\dot{\theta}sin\psi, \dot{\varphi}cos\theta+\dot{\psi}\right)$，在惯性坐标轴分量为$\boldsymbol{\omega}=\left(\dot{\psi}sin\theta sin\varphi+\dot{\theta}cos\varphi, -\dot{\psi}sin\theta cos\psi+\dot{\theta}sin\varphi, \dot{\psi}cos\theta+\dot{\varphi}\right)$，上述分解式称为欧拉刚体运动学方程。

4.3 转动惯量张量和惯量主轴

4.3.1 转动惯量张量

1.转动惯量张量的引入——刚体的动能

刚体的转动动能为$T_r=\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_\alpha)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\omega_j\sum_\alpha m_\alpha\left(\delta_{ij}\sum_k r_{\alpha,k}^2-r_{\alpha,i}r_{\alpha,j}\right)$，记$I_{ij}=\sum_\alpha m_\alpha\left(\delta_{ij}\sum_k r_{\alpha,k}^2-r_{\alpha,i}r_{\alpha,j}\right)$为转动惯量张量，于是$T_r=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\omega_j I_{ij}$，当刚体可以看作质量密度$\rho=\rho(\boldsymbol{r})$连续分布时，$I_{ij}=\int\rho(\boldsymbol{r})\left(\delta_{ij}\sum_k r_k^2-r_ir_j\right)dV$

2.转动惯量张量的性质

（1）惯量张量矩阵的对角元为沿轴转动惯量，非对角元为惯量积，惯量张量的分量有对称性$I_{ij}=I_{ji}$，所以惯量张量分量仅 6 个独立。

（2）惯量张量是广延量。

（3）一般形式的平行轴定理：设刚体质心 C 位于原点，相对于另一参考点 Q 位矢为 $\boldsymbol{a}$，则刚体对于这两个点的惯量有$I_{ij}^C=I_{ij}^Q-M(\delta_{ij}\sum_k a_k^2-a_ia_j)$。

（4）空间转动下的变换。用$\hat{\boldsymbol{I}}$表示惯量张量符号，则$T_r=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega}$，如果有空间转动$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}'$，那么$\hat{\boldsymbol{I}}'=\boldsymbol{A}^T\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}$，称为惯量张量在空间转动下的变换性质。

4.3.2 角动量与转动动能

相对于本体坐标系的定点 O，刚体的角动量为$\boldsymbol{J}=\sum\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\alpha}}\times\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{\alpha}}$，相对于 O 点，

刚体中一质点的动量为$\boldsymbol{p_\alpha} = m_\alpha \boldsymbol{v_\alpha} = m_\alpha \boldsymbol{\omega_\alpha} \times \boldsymbol{r_\alpha}$，故刚体角动量$\boldsymbol{J} = \sum m_\alpha [r_\alpha^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r_\alpha}(\boldsymbol{r_\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})]$，有$J_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$，$T_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}$。

4.3.3 惯量主轴

1.定义

恰当选取本体坐标系的方向，可使所有的惯量积为零，即存在正交矩阵 **A** 使得$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A^T}\boldsymbol{\hat{I}}\boldsymbol{A}$为对角矩阵，其三个对角元都是实数，称为主转动惯量。

A、$\boldsymbol{D}$求解过程：解$\boldsymbol{\hat{I}}$特征值方程，得$\boldsymbol{D}$的三个对角元λ_i，在根据特征向量方程对不同λ_i求解归一化特征向量$\boldsymbol{X}_i$，所求的变换矩阵$\mathbf{A} = \{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\}$将本体坐标系转到了特殊位置，使得惯量张量得到了简化。新的本体坐标轴称为惯量主轴，分别沿着$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$方向，**A**也称为主轴变换。

定义以质心为坐标原点的惯量主轴为中心惯量主轴。

2.惯量主轴与主转动惯量的性质

（1）三个惯量主轴彼此垂直。

（2）惯量主轴的非唯一性：在中心惯量主轴延长线上取平行坐标系，新的坐标系仍是惯量主轴。

（3）刚体的对称轴、旋转对称轴一定是惯量主轴，刚体对称面法线一定是惯量主轴。

（4）主转动惯量中任一个都不大于其余二者之和。对于 xOy 平面内的二维刚体，$I_3 = I_1 + I_2$。

3.惯量主轴的选取

4.2.4 惯量椭球

1.刚体对任意轴的转动惯量

设一转轴 OX 的方向余弦为(α,β,γ)则刚体绕此转轴的转动惯量$I=\sum m[(x^2+y^2+z^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2]$，有$I=\alpha^2 I_{11}+\beta^2 I_{22}+\gamma^2 I_{33}+2\alpha\beta I_{12}+2\beta\gamma I_{23}+2\gamma\alpha I_{31}$，当坐标轴为惯量主轴时，$I=\alpha^2 I_{11}+\beta^2 I_{22}+\gamma^2 I_{33}$。

2.惯量椭球

在转轴上取一线段 OQ 满足$\overline{OQ}=\frac{1}{\sqrt{I}}$，则 Q 点坐标$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{I}},\frac{\beta}{\sqrt{I}},\frac{\gamma}{\sqrt{I}}\right)$，则有$I_{11}x^2+I_{22}y^2+I_{33}z^2+2I_{12}xy+2I_{23}yz+2I_{31}zx=1$，这是一个中心在 O 点的椭球方程，称为惯量椭球。

在任意方向选择一转轴，它在椭球上截得线段 OQ，则绕此轴的转动惯量为$I=\frac{1}{\overline{OQ}^2}$，角动量的方向为该转动轴与椭球面交点处的法线方向。

$$\overline{OQ}=\frac{\omega}{\sqrt{2T_r}}$$

每个椭球都有三个互相垂直的主轴，以他们为坐标轴，有$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$，新坐标轴惯量主轴。

如果刚体绕某轴转动一个异于π的角度，其质量分布不变，则不但该转动轴是惯量主轴，而且与它垂直的任何轴也是惯量主轴。

4.4 欧拉动力学方程和应用

4.4.1 欧拉动力学方程的建立

1.完整保守刚体的拉格朗日函数

当本体坐标轴取惯量主轴时，刚体角动量$J=I_1\omega_x\boldsymbol{e}_x+I_2\omega_y\boldsymbol{e}_y+I_3\omega_z\boldsymbol{e}_z$，刚体转动动能$T_r=\frac{1}{2}\left(I_1\omega_x^2+I_2\omega_y^2+I_3\omega_z^2\right)$，则拉格朗日函数为$\mathrm{L}=T_r-V(\varphi,\theta,\psi)$。

2.欧拉动力学方程

只要给出具体的势能表达式，运用拉格朗日方程就可以建立刚体的三个与转动相关的运动方程。

对于不具有保守性的力或力矩，刚体的欧拉动力学方程为：$I_i\dot{\omega}_i-(I_j-I_k)\omega_j\omega_k=N_i, \epsilon_{ijk}=1$，$N_i$为 i 方向的力矩。

研究转动时，任何一个刚体都可以等效为有着相同主转动惯量的均质椭球刚体。

3.牛顿力学框架下的推导

4.4.2 自由刚体——欧拉陀螺的一般解

1.自由刚体的动力学方程

不受外力矩而自由转动的刚体称为欧拉陀螺，欧拉动力学方程简化为$I_i\dot{\omega}_i-(I_j-I_k)\omega_j\omega_k=0$。

刚体质心在惯性系静止，可以选取质心为惯性坐标系和本体坐标系共同原点。

2.运动积分

欧拉运动方程不显含进动角φ，相应广义动量$p_\varphi=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{e}_{z'}=\boldsymbol{j}_{z'}$。重新定义惯性坐标轴的名称，还可以得到刚体角动量的分量都是运动积分，即自由刚体角动量守恒，$\boldsymbol{J}=const=\boldsymbol{J}_0$。

尽管惯性坐标系中角动量的三个分量都守恒，但由于本体坐标系随刚体运动，所以本体坐标系中角动量分量一般不守恒，只有总大小守恒，即$J^2=J_0^2$。

由于拉格朗日函数不显含时间，自由刚体的能量，即动能守恒。

3.进一步求解

利用两个运动积分，化为一个变量，利用欧拉动力学方程，求出三个角动量，再根据运动学方程求解运动。难点在于，解角动量时涉及第一类不完全椭圆积分。

4.潘索几何法

设刚体绕一瞬时轴转动时，轴与惯量椭球交点 Q，Q 点椭球面的法线方向就

是角动量方向。由于欧拉陀螺角动量守恒，椭球面在 Q 点处的切平面一定平行，不随刚体转动而改变方向，尽管 Q 点不断变动。

可以证明，Q 点的切平面只能固定不变。

因此，中心惯量椭球在固定不变的切平面上纯滚动。

5.转动的稳定性

对于$I_3 > I_2 > I_1$，让刚体绕惯量主轴 *i* 转动，施加微扰λ, μ于 *j,k*。最后得到$\lambda(t), \mu(t)$是一个以$\Omega_i = \omega_i\sqrt{\frac{(I_k-I_i)(I_j-I_i)}{I_jI_k}}, \epsilon_{ijk} = 1$为频率的振动。$\Omega_i$若为实数，则为震荡响应，若为虚数，则为指数响应。

刚体绕主转动惯量为最大或最小的主轴转动时稳定的，而绕主转动惯量取中间值的主轴转动时不稳定。

4.4.3 对称欧拉陀螺

1.对称欧拉陀螺的角速度

$I_1 = I_2 \neq I_3$的自由刚体称为对称欧拉陀螺，此时$\omega_z = const = \omega_{z0}$。

定义$\Omega \equiv \frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_{z0}$，于是欧拉运动学方程简记为$\begin{cases}\dot{\omega}_x + \Omega\omega_y = 0\\ \dot{\omega}_y - \Omega\omega_x = 0\end{cases}$，解为$\begin{cases}\omega_x = Acos(\Omega t + \phi_0)\\ \omega_y = Asin(\Omega t + \phi_0)\end{cases}$，总角速度$\omega = \sqrt{A^2 + \omega_{z0}^2} = const$。

2.欧拉角的求解

根据角动量与角速度关系，$cos\theta = \frac{I_3\omega_{z0}}{J} = const = cos\theta_0, A = \frac{Jsin\theta_0}{I_1}, \psi = \frac{\pi}{2} - \Omega t - \phi_0$，根据运动学方程，$\dot{\varphi} = (\omega_{z0} + \Omega)sec\theta_0$。

欧拉对称陀螺没有章动，只有自转和进动，称为规则进动。

3.本体圆锥和空间圆锥

对称欧拉陀螺的角速度为常模适量，绕本体系的 z 轴以恒定角频率Ω旋转。对于位于本体系的观察者，转动瞬轴绕刚体的对称轴描出圆锥，称为本体圆锥，

对于$I_3 > I_1$，ω右手螺旋旋转，否则左手螺旋旋转。

在惯性坐标系中，对称陀螺的角速度与角动量夹角为常数，角速度也将描出一个圆锥，称为空间圆锥，ω按右手螺旋进动。

当$I_3 < I_1$时，

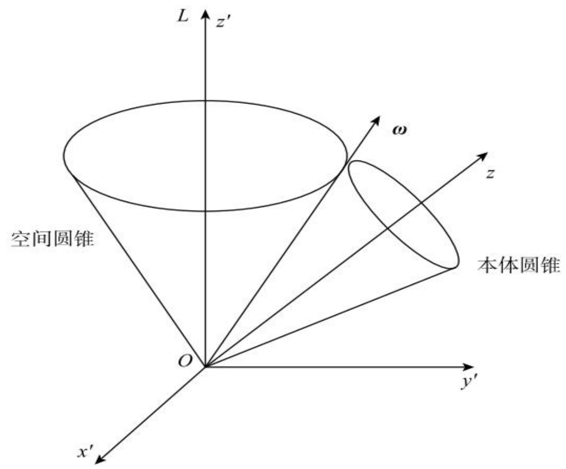


图 4.4.3　对称欧拉陀螺的本体圆锥和空间圆锥

4.地球的纬度变迁问题

由于地球长期的自转效应，可以认为地球是一个略扁的旋转椭球体，$I_1 = I_2 < I_3$，将地球当作自由运动的刚体，则转动瞬轴（天文地轴）绕对称轴（地理地轴）以Ω缓慢转动，导致地球的空间姿态缓慢变化，从而引起维度变迁。

旋转轴转动周期与实际值有明显偏差，其一，太阳、月亮等天体的引力对地球中心有力矩,因而地球并非自由运动;其二,地球不是严格的刚体,存在滞后效应。

5.转动的稳定性

对于对称陀螺，只有绕对称轴的转动才是稳定的，无论转动惯量是最大还是最小。

实际问题中，如果处理的刚体不是理想刚体，绕对称轴转动未必稳定。$I_3 < I_1$时，转动将逐渐偏离。

4.4.4 定点转动的对称陀螺——拉格朗日陀螺

1.一般情形求解

考虑一个对称陀螺，其尖端固定不动，在重力场中运动，这就是拉格朗日陀螺。

体系的拉格朗日函数$L=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}cos\theta)^2-mglcos\theta$。由于$\varphi,\psi$是循环坐标，可以得到两个守恒量$J_{z'}=p_\varphi=(I_1 sin^2\theta+I_3 cos^2\theta)\dot{\varphi}+I_3 cos\theta\dot{\psi}=const$，$J_z=p_\psi=I_3(\dot{\psi}+cos\theta\dot{\varphi})=const$，它们是角动量在进动和自转方向上的分量，同时有$\omega_z$守恒。此外，陀螺能量也守恒，$E=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2 sin^2\theta)+\frac{{J_z}^2}{2I_3}+mglcos\theta=const$。这三个守恒量就是拉格朗日陀螺的三个动力学方程。有$\dot{\varphi}=\frac{J_{z'}-J_z cos\theta}{I_1 sin^2\theta},\dot{\psi}=\frac{J_z}{I_3}-\frac{J_{z'}-J_z cos\theta}{I_1 sin^2\theta}cos\theta$，代入第三式，得$E=\frac{I_1}{2}\left[\dot{\theta}^2+\frac{(J_{z'}-J_z cos\theta)^2}{I_1^2 sin^2\theta}\right]+\frac{{J_z}^2}{2I_3}+mglcos\theta$，令有效势能$V_{eff}(\theta)=\frac{(J_{z'}-J_z cos\theta)^2}{2I_1 sin^2\theta}-mgl(1-cos\theta)$，定义$E'=E-\frac{{J_z}^2}{2I_3}-mgl$，那么$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2+V_{eff}(\theta)=E'$，可以解出 $t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}[E'-V_{eff}(\theta)]}}$，原则上有解。

$E'\geq V_{eff}(\theta)$，等号仅在$\dot{\theta}=0$ 即θ取极大值或极小值时成立。有效势能图如下。$E'=V_{eff}(\theta)$决定了章动角的范围。

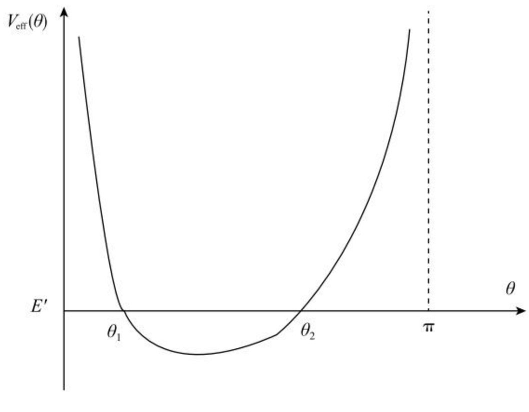


图 4.4.5 拉格朗日陀螺的有效势能

当章动角变化时，进动角速度$\dot{\varphi}$是否改变符号取决于$J_{z'}-J_z cos\theta$是否变号。

2.快速陀螺——回转仪

如果陀螺的自转角速度很大，采用近似，可以得到章动角和进动角的近似表

达式。我们把具有很大自转角速度的对称陀螺称为快速陀螺或回转仪。

假设初始章动角速度和进动角速度为零，于是确定了一个章动边界θ_1，根据动力学方程可求解另一边界θ_2，可以得到，$\frac{I_3^2\dot{\psi}_1^2}{2I_1mgl}(cos\theta_1-cos\theta_2)=sin^2\theta_2$。设$\varepsilon=cos\theta_1-cos\theta_2, p=\frac{I_3^2\dot{\psi}_1^2}{2I_1mgl}$，那么有$\varepsilon^2+(p-2cos\theta_1)\varepsilon-sin^2\theta_1=0$，由于是快速陀螺，$p\gg 1$，上式近似为$p\varepsilon-sin^2\theta_1=0$，有$\varepsilon=\frac{sin^2\theta_1}{p}=\frac{2I_1mglsin^2\theta_1}{I_3^2\dot{\psi}_1^2}\ll 1$，可见快速陀螺的章动角变化范围与$\dot{\psi}_1^2$成反比，与$sin^2\theta_1$成正比，即初始转速越快，偏离竖直方向越小，陀螺章动角变化越小。

当章动角取θ_2时，有$\dot{\varphi}_2=\frac{2mgl}{I_3\dot{\psi}_1}$，有平均进动角速度$\dot{\varphi}=\frac{mgl}{I_3\dot{\psi}_1}$，即初始自转越快，进动越慢。

3.快速陀螺实例——拉莫尔进动

经典图像下,电子绕原子核做高速圆周运动,形成环形电流．该电流在外磁场中受到磁力矩作用,是一个快速的拉格朗日陀螺。

设电子转动的圆频率是ω，轨道半径为r，则其等效电流强度和相应磁矩分别为$i=e\omega/2\pi$，$\boldsymbol{m}=-i\pi r^2\boldsymbol{n}=-\frac{1}{2}e\omega r^2\boldsymbol{n}$。该磁矩在外磁场中势能$V=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}e\omega r^2Bcos\theta$，电子轨道角动量为$J_z=m_er^2\omega$，则电子在磁场中进动角速度$\boldsymbol{\Omega}=\frac{e\boldsymbol{B}}{2m_e}$。

一般实验室外磁场条件下，$\Omega\ll\omega$，故而电子在高速绕核转动同时，轨道面绕外磁场缓慢进动，即电子的拉莫尔进动。

电子的拉莫尔进动是电子产生附加磁矩$\Delta\boldsymbol{m}=-\frac{e^2r^2}{4m_e}\boldsymbol{B}$，它使磁介质产生宏观的抗磁效应。

5 非线性力学简介

庞加莱研究表明：决定性论的方程可以得到无法预测的结果。这种决定性论

的方程给出看似随机运动的现象称为混沌。

这种混沌有别于“分子混沌论假设”中的混沌，后者是由无法完全确定每个分子的初始条件导致的。它的解的随机性也不同于有外界随机力作用下的随机运动（布朗运动），是系统本身所固有的,故称为内禀随机性（或内在随机性）。就起源来说，这种随机性及系统表现的混沌行为，本质上源于方程自身的非线性。

5.1 非线性和混沌

物理学领域，人们长期以来研究的主要是线性理论。原因是：（1）受实验仪器的精度所限,在当时的仪器精度下归纳出来的线性理论,已经足以解释有关的物理现象；（2）非线性方程在数学处理上的难度往往很大,有许多非线性方程甚至根本就没有解析解．这样,人们在遇到非线性方程时,往往通过线性近似,把非线性方程化为线性方程求解。

实际上，在自然科学的许多领域都存在一些线性理论无法解释的现象。非线性现象是普遍存在的,世界的本质可以说就是非线性的,而真正线性的问题反而只是一些特殊或局部的情况。

从数学的角度看,线性系统有两个显著的特点．一个特点是,因为自变量与函数之间的关系是线性的,因而自变量的变化率与函数的变化率之间为确定的比例．这意味着函数值对自变量的取值精确度不敏感,亦即相应于自变量的微小变化,函数值也只会产生微小的变化．另一个特点是,系统的整体性质可以由组成它的各个子系的代数叠加得出,这就是所谓的线性叠加原理。与此对照,非线性系统的各子系之间有着不可忽略的相互作用。

5.1.1 单摆的运动

在无阻尼和无外力的情况下，我们熟悉的小振幅单摆运动方程是$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=$

0，解的一般形式是$\theta = Acos(\omega t+\varphi), \dot{\theta} = A\omega cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$，取$A=\omega=1$，以$\theta, \dot{\theta}$为坐标画相图（相空间图），轨迹为圆。如果考虑阻尼振动，$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega^2\theta=0$，它的解是衰减解，无论从相平面哪里出发，最终都会趋于坐标原点$\theta=\dot{\theta}=0$，这种情况下原点称为吸引子。这是最简单的一类吸引子，由于几何上一个点的维数是零，称为零维吸引子，当相点运动到原点时，单摆停止运动，原点称为不动点。即有阻尼又有驱动力时，$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=fcos\omega t$，足够长时间后，解（稳态解）为频率为驱动力频率的简谐振动。

一般情况下，振动方程应写成$\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+\omega_0^2 sin\theta=fcos\omega t$，这时$\ddot{\theta}$、$\dot{\theta}$、$\theta$之间关系不再是线性的，方程的解将呈现复杂的结果。

5.1.2 洛伦茨方程和奇异吸引子

洛伦茨将复杂大气对流偏微分方程化简后，得到一组常微分方程$\begin{cases}\dot{x}=-10x+10y\\ \dot{y}=28x-y-xz\\ \dot{z}=-\frac{8}{3}z+xy\end{cases}$，这时经典的混沌理论方程，即洛伦茨方程。这组方程不是线性的，对初始值具有高度的敏感性，这种现象称为蝴蝶效应。此外，解显出奇异的特性，总体由两个环套组成，相平面上的相点杯吸引但又永远到达不了环套的中心，这种结构称为奇异吸引子，这些相空间的轨线紧密缠绕而不相交，故解的长期行为无法预测。

5.2 相平面、奇点（平衡点）的类型与稳定性

相平面上系统运动状态的代表点就是相点，相点在相平面上运动时描绘的轨迹称为相轨线或相轨迹（道），相点沿相轨线运动的速度称为相速度。求解位形空间的运动方程等价于求解相轨线的参量方程$\begin{cases}x=x(t)\\ v=v(t)\end{cases}$使之满足$\dot{v}=f(x,v)$，即求解$\frac{dv}{dx}=\frac{f(x,v)}{v}$的积分曲线簇（相轨线），以及相点沿该曲线族运动的规律。

更一般地，有运动方程$\begin{cases}\dot{x}=P(x,v)\\ \dot{v}=Q(x,v)\end{cases}$，如果 P,Q 不显含时间，则系统称为自洽系统，有$\frac{dv}{dx}=\frac{Q(x,v)}{P(x,v)}$。特殊地，如果$\begin{cases}P(x,v)=0\\ Q(x,v)=0\end{cases}$，此时$\frac{dv}{dx}$具有不定值，称为奇点，此时该相点是一个力学平衡点。除了奇点外，不存在两条或更多条相轨线相交的相点，这一结论等价于微分方程解的存在唯一性定理。如果 P,Q 是(x,v)的线性函数，则$\begin{cases}P(x,v)=0\\ Q(x,v)=0\end{cases}$只有一个解，即相平面上只有一个奇点；而如果 P,Q 是(x,v)的非线性函数，则可能存在多个解，相平面上出现多个奇点。

设 (x_0,v_0) 是一个奇点，在它的邻域将 P,Q 展开，有$\begin{cases}P(x,v)=P(x_0,v_0)+\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x_0,v_0)}\delta_x+\left.\frac{\partial P}{\partial v}\right|_{(x_0,v_0)}\delta_v+\cdots\\ Q(x,v)=Q(x_0,v_0)+\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x_0,v_0)}\delta_x+\left.\frac{\partial Q}{\partial v}\right|_{(x_0,v_0)}\delta_v+\cdots\end{cases}$，略去高阶项，有$\begin{cases}\dot{\delta_x}=\frac{\partial P}{\partial x}\delta_x+\frac{\partial P}{\partial v}\delta_v\\ \dot{\delta_v}=\frac{\partial Q}{\partial x}\delta_x+\frac{\partial Q}{\partial v}\delta_v\end{cases}$，式中偏导数在$(x_0,v_0)$取值，定义雅可比矩阵$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x}&\frac{\partial P}{\partial v}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&\frac{\partial Q}{\partial v}\end{pmatrix}$，有$\begin{pmatrix}\dot{\delta_x}\\ \dot{\delta_v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_x\\ \delta_v\end{pmatrix}$，存在形式解$\begin{cases}\delta_x=c_1e^{\lambda t}\\ \delta_v=c_2e^{\lambda t}\end{cases}$，称为简正模，将之代回运动方程解常数。有非平凡解的条件是$|\boldsymbol{J}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$，称为特征方程，它可以化为$\lambda^2-p\lambda+q=0$，其中$p=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial v}$为$\boldsymbol{J}$的迹，$q=\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Q}{\partial x}$为$\boldsymbol{J}$的行列式的值，特征根$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(p\pm\sqrt{p^2-4q})$，这样解为$\begin{cases}\delta_x=d_1e^{\lambda_1 t}+d_2e^{\lambda_2 t}\\ \delta_v=d_3e^{\lambda_1 t}+d_4e^{\lambda_2 t}\end{cases}$。

（1）$q>0,p^2-4q>0$

此时$\lambda_{1,2}$为不相等的实根。如果$p>0$，$e^{\lambda t}$随时间无限增长，解将原理奇点（平衡点），称该奇点是不稳定的；如果$p<0$，$e^{\lambda t}$随时间趋于零，称奇点是稳定的。这两种情况下奇点也叫结点，分别称为稳定结点和不稳定结点。

（2）$q<0$

此时$\lambda_{1,2}$异号，解有两个分支，称为鞍点，不稳定。

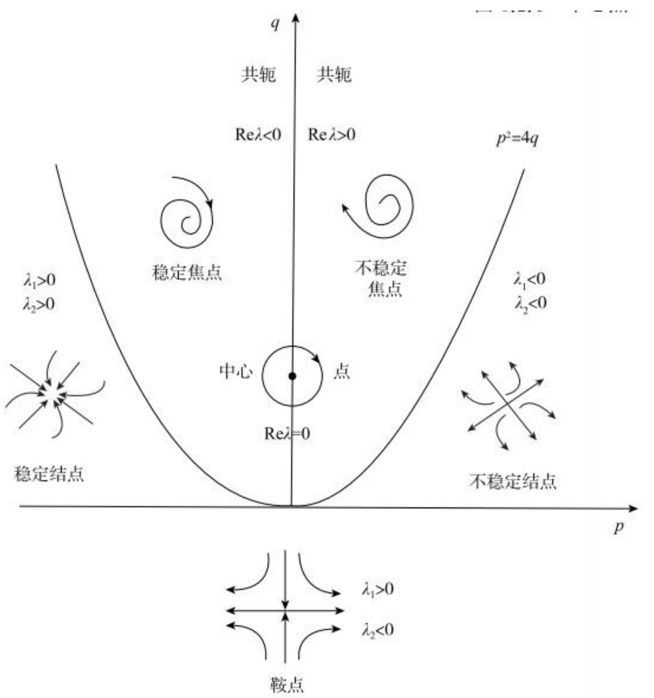
（3）$p\neq 0$，$p^2-4q<0$

此时$\lambda_{1,2}$为共轭复根，解为振荡形式，即$e^{\alpha t}cos\beta t$。如果$p>0$，则$\alpha>0$，振幅不断增大；如果$p<0$，则$\alpha<0$，振幅不断衰减。它们分别称为不稳定焦点和稳定焦点。

（4）$p=0,q>0$

此时$\lambda_{1,2}$为纯虚数，解为$cos\beta t$的周期振荡解。相平面上，轨迹是一些围绕平衡点的闭合曲线，该平衡点称为中心点，它是临界稳定的。

二维情况下，平衡点在 *p*-*q* 平面的分布：



5.3 保守系统和耗散系统、吸引子

力学系统分为保守系统和耗散系统。如果系统中受到的力是有势的，则该系统的机械能保持守恒，这样的系统称为保守系统。如果粒子还受到摩擦力等耗散力，则系统就称为耗散系统。最典型的保守系统是哈密顿系统。以一维为例，设势函数$V(x)$，力场为$F(x)$，则有$\ddot{x}=F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}$，可以化为$\begin{cases}\dot{x}=\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial v}\\ \dot{v}=F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}\end{cases}$，其中$H(x,y)=\frac{1}{2}mv^2+V(x)$是哈密顿函数。$(\dot{x},\dot{v})$是相平面上相速度$\boldsymbol{v}$的分量，

$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F(x)}{\partial v}=0$，即保守系统中相空间体积守恒。如果系统中有耗散力，例如有阻尼的单摆，运动方程化为$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-\alpha v-x\end{cases}$，$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=-\alpha$，表明相空间体积将随时间不断收缩，最后趋于零。对于洛伦茨方程，$\operatorname{div}\boldsymbol{v}<0$，因而洛伦茨方程描述的系统也是一个耗散系统。对于耗散系统，相空间体积不断收缩，从不同的初始条件出发，最终会趋向于同一个结果或少数几个不同结果，耗散系统相空间中这样的极限集合就称为吸引子。由于保守系统中相空间体积保持不变，故保守系统中不存在吸引子。

尽管保守系统中不存在吸引子，但仍会存在无规运动甚至混沌。对一个具有 s 自由度的保守系统，其运动由哈密顿正则方程描述，也称为哈密顿系统。如果哈密顿系统是可积的，则可以得到 s 个运动积分，解就由这些积分表示出来，此时解确定，不会随机性出现。但绝大多数系统不可积，它们只有满足 KAM 定理要求下，即哈密顿函数可以分解为可积的未扰动项和扰动项之和（近可积系统），其中扰动项很小，且未扰动项对应频率满足不相关（非共振）条件时，系统运动的总体图像才与未扰动的可积系统相同，此时解不会有随机性产生。其他的一般情况下不可积哈密顿系统会出现混沌。

对于耗散系统，一般来说，力学系统中的吸引子分为两大类，即平庸吸引子和奇怪（奇异）吸引子。平庸吸引子可分为定常吸引子、周期吸引子和准周期吸引子。稳定结点和稳定焦点就是定常吸引子，它们相应于$t\to\infty$时，系统趋向的一个与时间无关的定常态，这个定常态是个相空间零维不动点。有阻尼的线性受迫振动长时间的结果趋于频率等于驱动力频率的简谐振动，相图上是一个闭合曲线，称为极限环，表示系统最终只剩下一个周期振动，极限环是二维相空间中一个一维周期吸引子。

奇怪吸引子的典型例子是洛伦茨吸引子。奇怪吸引子的主要物理特征是：（1）奇怪吸引子上的运动，对初始条件非常敏感。（2）即使微分方程的可以某个参数连续变化，奇怪吸引子的结构也不是一直随该参数连续变化。往往是整体结构发生突然转变。（3）奇怪吸引子具有无穷嵌套的自相似结构。（4）作为相空间的子集合，奇怪吸引子一般具有非整数的纬度。

5.4 庞加莱映射

设相空间是 n 维的，则原则上可以截取出一个 n-1 维的相平面，称为庞加莱截面。可以通过相轨线与截面的交点构成的图像，来研究复杂轨线的一般行为。这种把时间上连续的运动转换为离散图像的处理方法称为庞加莱映射（庞加莱映像）。

庞加莱变换的优点在于它能保证原连续动力学系统拓扑性质不变的前提下，将相空间的维数减少一维，数学上映射是一个差分方程。

尽管相平面上的轨线十分复杂，但在庞加莱截面上却显示有一定的规律，说明即使混沌出现，系统仍可能具有丰富的内部结构层次。

总之，利用庞加莱映射，可以不用考虑相空间的复杂曲线，而只需求出相轨线与庞加莱截面的交点，就可以分析系统的动力学特征。大致说来，如果庞加莱截面上只是一个不动点或少数离散点，则运动时周期性的；如果庞加莱截面上是一条曲线，则运动是准周期的；而如果庞加莱界面上是一些成片的密集点，运动就是混沌的。

5.5. 走向混沌的例子——倍周期分岔

目前已经知道，从有序运动转变为混沌有三种普遍方式，即倍周期混沌、阵发混沌、准周期失稳。前两种是常见道路。

决定论性的非线性系统中，常存在一些控制参量，当参量取不同的数值时，系统就可能处于不同的运动状态。如果系统的动态性质在某个参量变化时发生突变，就称为分岔。数学上，就是当某一参量变化时，非线性微分方程的解在某一临界点发生突变。

对于一个非线性系统，当某一参量变化到某个临界值是，系统由原来频率ω、周期为T，突然变到频率为$\omega/2$、周期为 $2T$的运动，即出现了分频和周期倍化的现象，称为倍周期分岔。倍周期分岔的注明例子是虫口模型，即在有限环境中，且无世代交叠的昆虫的声息繁衍模型，这是一个生态学模型，也称广义动力学模型。

标准虫口方程（生态平衡方程）为$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), x_n \in [0,1], \mu$常取 0~4，这是一个非线性差分方程，实际上它是一种取值范围不变的映射，称为抛物线映射（平方映射，逻辑斯谛映射）。

迭代求解，可以通过计算机或者图解方法表示。取该方程的一般形式$x_{n+1} = f(\mu, x_n)$，其中$f(x)$是x的非线性函数（该情况下是平方函数，或抛物线函数），画出函数$f(x)$与$y = x$的对角线就可以不断迭代出一组数列，称为一条轨道，每个数都是一个轨道点。

我们关注的是当迭代次数足够多时数列的近似行为。

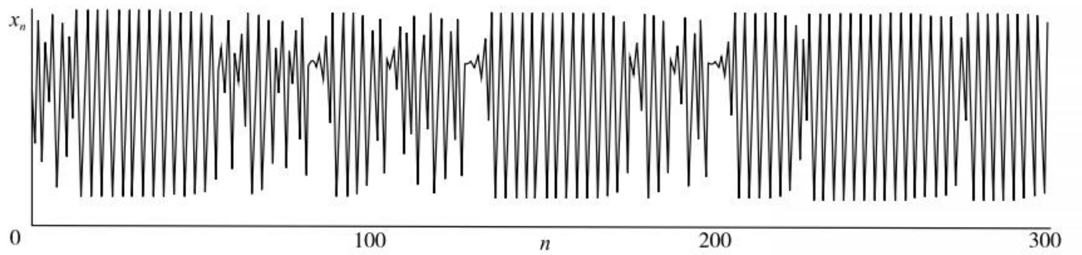
（1）不动点。在某些初始条件下，轨道最终到达一个不变的终点，称为映射的不动点。本方程中一定有不动点$x = 0$，当$\mu > 1$ 时有第二个不动点。

（2）周期轨道。迭代过程出现周期解或称周期轨道。本方程中随着μ的增大，周期数按照2^n规律增加，称为倍周期分岔。把第 n 次分岔的控制参数记为μ_n。本方程中，随着 n 增大，相邻μ_n之间间隔越来越小，μ_n的值很快出现一个极限μ_∞。

趋近极限的方式很有规律，表示为$\mu_n = \mu_\infty - \frac{A}{\delta^n}$，其中$A$是一个与映射类型有关的常数，$\delta$是一个普适常数，称为费根鲍姆常数，它的值是一个无理数。这个趋近极限的方式适用于所有具有周期分岔现象的映射，无论是一维映射还是更复杂的微分方程。

（3）混沌轨道。当$\mu \geq \mu_\infty$时，混沌就出现了，此时周期轨道消失，x_{n+1}值的跳跃看上去完全是随机的，迭代的最终结果为混沌图像。但是模糊的背景中仍然可以看到深浅不同的层次，同时存在一些窗口，这说明混沌并不是完全无规和随机的，局部区域仍可能存在规则的运动。它存在许多自相似结构。总之，当$\mu \geq \mu_\infty$时，随着μ的连续增加，迭代结果展现的是一副规则与随机交织起来的丰富多彩的图像。混沌运动是一种内容丰富，包含无穷层次的运动形态。

除了倍周期分岔产生混沌，还有阵发混沌。如图是$\mu = 1.749$ 时的迭代过程。有时候轨道十分接近周期轨道，有时在规则的轨道段落之间，夹杂着看起来很随机的跳跃。人们把规则的运动称为“层流相”，随机跳跃称为“湍流层”。



5.6 混沌的刻画——李雅普诺夫指数

为了刻画混沌的特征，有一个重要的特征量，即李雅普诺夫指数，他描述不同初值轨道互相分离开的平均速度。

考虑上节的一维映射，取两个靠得很近的初值x_0和$x_0 + \Delta_0$进行迭代。迭代 n 次后距离为$\Delta_n \simeq \left.\frac{df^n}{dx}\right|_{x_0} \Delta_0$，这里$f^n = f(f(\cdots))$表示迭代 n 次，$\frac{df^n(x_0)}{dx} = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$。通常情况下，对初值敏感的轨道会按照指数函数规律迅速分离，即$\Delta_n = e^{\lambda n}\Delta_0$，

这里常数λ表示相邻轨道的分离速度，它的取值原则上可能依赖于初值x_0。如果$\lambda < 0$，则$\Delta_n \to 0$，表示两条轨道不分离，如果$\lambda > 0$，初始的细微差别会迅速放大。当$n \to \infty$，此时λ就被称为李雅普诺夫指数，即$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} ln|f'(x_i)|$。

一维映射只有一个李雅普诺夫指数。正的表明运动轨道在每个局部都不稳定，相邻的轨道按指数分布分离，形成混沌吸引子。因此$\lambda > 0$ 可以作为混沌行为出现的判据。一个系统只要出现一个正的λ，就可以产生混沌运动。$\lambda < 0$ 表明轨道在局部也是稳定的，对应于周期运动。

对于上节映射，有：

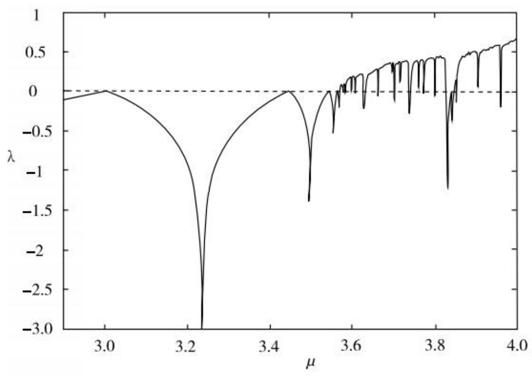


图 5.6.1　李雅普诺夫指数随 μ 的变化

对于三维映射，求导应对三维空间进行，这样就得到了三个李雅普诺夫指数。（1）当均为负值时，相点收缩为一点，即存在不动点。（2）一个为零，两个为负，相点收缩为极限环。（3）两个为零，一个为负，相点收缩为二维环面，即二维环面吸引子。（3）一个为正，出现奇怪吸引子并混沌运动。

5.7 分形与分锥

对自相似结构的一种现代描述方法称为分形几何，用来形容形状复杂且不规则的物体结构和自然形象。

分形最重要的一个特征是具有自相似性或称标度不变性。用不同标度（尺度）所做测量得到相似结果的性质，称为标度不变性。

标度不变性表明这些几何图形具有某个共同的几何参数，即这一个参数是一个与尺度大小无关的不变量，这就是分形几何中的分数维或分维。一般地说，如果 D 维空间有一个几何形体，则把它在每个方向的长度放大l倍后，得到的体积放大倍数将是$N = l^D$，即$D = \frac{log\, N}{log\, l}$，对不规则的几何形体，一般情况下 D 是一个非整数，即分数维或分维。

1.康托尔集合

三等分线段舍中段，一直进行至最终得到的点集为康托尔集合。它的维数$D = \frac{log\, 2}{log\, 3}$。

2.科克曲线

将每一直线段视为生成元，等分三段，中端替以两折线，一直进行至最后得到科克曲线，它被用来模拟自然界中海岸线和雪花的周边轮廓。它的维数$D = \frac{log\, 4}{log\, 3}$。

维数的定义还可以改为缩小 r 倍，并取$r \to 0$，这样有$D = -\lim_{r \to 0} \frac{log\, N(r)}{log\, r}$，相当于将集合对象所在空间划分成边长 r 的小方盒，数一下有多少小方盒中含有关心的几何对象的点，所得结果就是$N(r)$。这样定义的 D 也称为容量维，$N(r) \sim r^{-D}$，此式可以用于估算几何对象所占空间的大小。分形维数是几何形体不规则性的一种度量。

3.布朗运动

布朗粒子在Δt时间间隔内位移$\Delta X(\Delta t)$的空间分布是一个高斯分布函数，即$\mathrm{P}(\Delta X, \Delta t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D} \Delta t}} \exp\left[-\frac{\Delta X^2}{4\mathrm{D}\Delta t}\right]$，有$Var(b\Delta t) = bVar(\Delta t)$，意味着布朗运动具有时间标度变换下的不变性。它的纬度为 2.

洛伦茨吸引子的相轨线也不是整数。

关于混沌的小结：自然科学中有决定论和概率论两套描述体系，大自然真正

的表现介于二者之间。简单的方程式可能给出无法预测的结果。复杂的事物倒可能变得简单了,很多不同领域的、看来无结构和无规的现象,实际上可能遵循着相同或相似的简单规律。如果描述系统演化的动力学是决定论性的,而系统的演化却敏感地依赖于初始条件,使得系统的长期行为具有不可预测性,则很可能是在同混沌打交道。混沌行为与外界随机作用无关,完全是系统中的内禀随机行为。

5.8 非线性波和孤立子

在一些情况下,波动方程中将含有非线性项．此时介质的非线性效应将使波的传播不再满足线性叠加原理,波的传播速度不仅依赖于介质的性质,而且还可能与波源的振动状态有关．这样的非线性波可能产生一些新的效应,如高次谐波、调制,以及和频与差频等。孤立波是在色散和非线性共同作用下的一种奇特的波。

波包又是由一系列不同频率的平面波叠加而成的，仅仅由于色散,波包也将很快弥散而最终消失。不弥散的波包是非线性效应与色散效应相互抵消所致,并称之为孤立波。KdV 方程用来描述它：$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$，其中第二项为非线性项，第三项为色散项。KdV 方程是非线性色散流体力学方程中的基本方程，很难求解。可以只求它的一个行波解$u(x,t)=-\frac{1}{2}c\cdot sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct+x_0)\right]$，它的波形像一口悬挂的钟，随时间增长向右运动，振幅正比于传播速度，波宽反比于$\sqrt{c}$，即波速越大，波包就越高越瘦。

记$f(\xi,c)=-\frac{1}{2}c\cdot sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\xi\right]$，设想$t=0$时，有两列波一前一后，间隔充分大，后波速度更快，即有 KdV 解$u(x,0)=f(x,c_1)+f(x-Z,c_2),c_1>c_2$，当$t=T>0$足够大时，有$u(x,T)=f(x-c_1T-\theta_1,c_1)+f(x-c_2T-\theta_2，c_2)$，即两个孤立波碰撞后仍表现为两个原来形状的孤立波，只是发生了相位移。因此称为孤立子，即孤立波具有粒子般的行为。

孤立子具有特征：（1）它的空间分布是定域的；（2）它是一种行波；（3）孤立子是稳定的，其波动形式（轮廓）不随时间改变；（4）孤立子在碰撞时像粒子那样发生弹性碰撞，在物理本质上是一种形态稳定的准粒子，由非线性场激发，能量不弥散。

除了 KdV 方程外，还有很多偏微分方程可以给出孤立子解，如正弦-高登方程、户田非线性晶格方程及非线性薛定谔方程等。只要色散与非线性同时存在，并在一定条件下达到“平衡”，就会产生孤立子。孤立子可以具有不同的形状，如波包型、凹陷型、扭结型和反扭结型。不同领域孤立子的物理含义也不同。

经典力学讲义（高显）

1 变分法

分析力学有一个“第一原理”，即最小作用量原理，或者更确切地说，稳恒作用量原理。其中涉及一些新的数学概念和计算方法。

1.1 泛函

给两个集合 X 和 Y，在两个集合的元素 x∈X 和 y∈Y 之间建立一个对应关系即映射，而这个映射关系的具体形式就是函数。集合和映射可以说是整个数学中最最基本的概念。

1.1.1 泛函的概念

泛函，即函数到数的映射——$S[f]:\mathcal{F}\longrightarrow C$。

1.1.2 泛函的具体形式

绝大多数情况下，物理中所遇到的泛函都可以写成积分形式：$S[f]=\int_{x_1}^{x_2}dx\,L\big(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots\big)$，在经典力学中，L 被称作拉格朗日量，S 被称作作用量。

1.2 变分

1.2.1 变分的概念

函数本身的无穷小变化、以及由之引起的泛函的变化即变分，它自己其实就是一个函数，只不过是无穷小的。

1.2.2 变分的运算规则

$$\delta(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2)=\delta\mathrm{f}_1+\delta\mathrm{f}_2$$

$$\delta(\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2)=(\delta\mathrm{f}_1)\mathrm{f}_2+\mathrm{f}_1(\delta\mathrm{f}_2)$$

$$\delta(\frac{f_1}{f_2}) = \frac{(\delta f_1)f_2 - f_1(\delta f_2)}{{f_2}^2}$$

$$\delta(df) = d(\delta f)$$

$$\delta(\frac{df}{dx}) = \frac{d(\delta f)}{dx}$$

1.3 泛函导数

1.3.1 泛函导数的概念

对于泛函$S = S[f]$，泛函的变分是由宗量的变分引起的。泛函的宗量即函数$f(x)$，其变分为：$S[f] \longrightarrow S[\tilde{f}] = S[f + \varepsilon\delta f] = S[f] + \varepsilon\delta S[f] + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 S[f] + \frac{\varepsilon^3}{3!}\delta^3 S[f] + \cdots$

n 阶泛函导数$\delta^n S[f] := \int dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta^n S[f]}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)} \delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)$。

1.3.2 泛函导数的操作定义

$$S[f + \varepsilon\delta f] = \sum \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{d^n}{d\varepsilon^n} S[f + \varepsilon\delta f]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\delta^n S[f] := \int dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta^n S[f]}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)} \delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n) = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} S[f + \varepsilon\delta f]\Big|_{\varepsilon=0}$$

1.3.3 计算一阶泛函导数的标准手续

1.将变分符号“δ”移到积分号内

2.计算δL 的变分

3.做分部积分，将δf 的导数移除

变分法中的一个基本假设是，在积分端点（边界）处，函数及其导数的变分为零，端点（即边界）上取的值被称作边界项或者表面项。

两个式子“差一个全导数”、或者两个积分“差一个边界项”这件事在变分法中有一个专门的符号“'≃”来表示。对于泛函导数的计算来说，边界项无关紧要。在实际的计算中，我们都是默认直接扔掉边界项，而不用写出其具体形式。

$$\frac{\partial L}{\partial f^{(n)}}\delta f^{(n)} \simeq (-1)^{\mathrm{n}}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial L}{\partial f^{(n)}}\right)\delta f$$

4.提取δf 前的系数，即一阶泛函导数，$\frac{\delta S[f]}{\delta f} = \sum(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial L}{\partial f^{(n)}}\right)$

1.3.4 计算一阶泛函导数的例子

1.3.5 δ-函数作为泛函

我们将函数在某一点的值视为这个函数自身的泛函，记作$f(x_0) \equiv f(x_0)[f]$，人为定义δ-函数，使$f(x_0) := \int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x_0 - x) f(x) \equiv f(x_0)[f]$，有$f^{(n)}(x_0) := (-1)^{\mathrm{n}} \int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{d^n\delta(x_0-x)}{dx^n} f(x) \equiv f^{(n)}(x_0)[f]$。

函数对自身的泛函导数是δ-函数，$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = \delta(x_0 - x)$，δ-函数是个泛函。

1.4 泛函极值

1.4.1 泛函极值的必要条件

一阶泛函导数为零:$\left.\frac{\delta S[f]}{\delta f(x)}\right|_{f=f_0(x)} = 0$。

1.4.2 欧拉-拉格朗日方程

一类常见的泛函：$S[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x, f(x), f'(x))$，取极值的必要条件是$-\frac{\delta S}{\delta f} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$，即是变分问题的欧拉-拉格朗日方程。

对于更一般的泛函，泛函取极值的必要条件是$\frac{\delta S}{\delta f} \equiv \sum(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial L}{\partial f^{(n)}}\right) = 0$。

如果泛函 S[f]对应的被积函数 L 含有最高至 f(x)的 N 阶导数且非退化，则泛函导数$\frac{\delta S}{\delta f}$包含最高至 f(x)的 2N 阶导数，相应泛函极值的欧拉-拉格朗日方程为 2N 阶微分方程。

1.4.3 多个变量与多元函数

1.多个变量

一般情况下，一个泛函也可以是多个独立函数的泛函$S = S[f_1, f_2, \cdots] = \int dx\, L(x; f_1, f_2, \cdots; f'_1, f'_2, \cdots; \cdots)$，一阶变分为$\delta S = \int dx (\frac{\delta S}{\delta f_1}\delta f_1 + \frac{\delta S}{\delta f_2}\delta f_2)$，取极

值的必要条件$\delta S=0$ 要求$\frac{\delta S}{\delta f_1}=0$，$\frac{\delta S}{\delta f_2}=0$。

2.多元函数

泛函取极值的条件即$\frac{\partial L}{\partial f}-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\delta L}{\delta x_1}\right)}\right)=0$

1.4.4 欧拉-拉格朗日方程的不同形式

1.L 不包含 f(x)本身

$$\frac{\partial L}{\partial f'}=const$$

2.L 不包含积分变量 x

$$\frac{\partial L}{\partial f'}f'-L=const$$

2 位形空间

2.1 位形、位形空间

2.1.1 位形

位形是粒子在空间中的位置这一概念的推广。简言之，位形（configuration）即力学系统各个质点的空间位置，质点系或者更一般力学体系在空间中的形状、分布。

2.1.2 位形空间

系统所有可能位形的集合，就构成位形空间（configuration space）位形空间中的一点，即代表系统的一种可能的位形。数学上对于这种一般的、弯曲的空间的描述，即所谓流形理论。

2.1.3 世界线

把时间 t 这一维加进来，位形空间中的点（某个位形）将扫出一条条世界线来。

2.2 速度、速度相空间

2.2.1 速度相空间

“位形”与“速度”合在一起，构成“状态”，质点系所有可能状态的集合，即状态空间或相空间。具体到“位形+速度”构成的状态空间，即是所谓速度相空间。速度相空间中的一点，代表系统的一种可能状态。速度相空间中的点随时间扫出的“流线”是永不相交的。

2.2.2 切空间、切丛

圆周上每一点的切线就像每一点长出来的纤维，这种几何结构形象地被称作纤维丛。具体到位形空间和每一点的速度空间（切空间）的结合——速度相空间，即被称为切丛。

数学上，动量是余切矢量，动量空间是速度空间的对偶，即所谓余切丛。分析力学有两大形式，拉格朗日力学和哈密顿力学。其中拉格朗日力学是研究速度相空间（切丛）中的演化，哈密顿力学则是研究相空间（余切丛）中的演化。

位形	位形空间	速度	动量	速度空间	速度相空间	动量空间	相空间
点	光滑流形	切矢量	余切矢量	切空间	切丛	余切空间	余切丛

2.3 自由度

自由度=$\frac{1}{2}$唯一确定系统“物理状态”的独立参数的个数

=$\frac{1}{2}$唯一确定系统演化的初始条件的个数

2.4 约束

2.4.1 约束的概念

约束（constraint）是对系统所能达到的状态所强加的“运动学”限制条件。“运动学”表明约束和受力没有关系。约束是力学系统“普遍”且“基本”的存在。约束的

存在，表明状态空间（速度相空间）中有些地方是无法到达的。实际能够到达的，只是状态空间的某个子空间。

2.4.2 约束的数学表示

约束是对系统状态的限制，也就是对“位形”和“速度”的限制。对于一个 N 个质点构成的质点系，$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N;t)=0$

2.4.3 约束的分类

1.完整约束/非完整约束

完整约束（几何约束）：只是对系统“位形”的约束$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=0$。如果 N 个质点组成的质点系存在且只存在 k 个完整约束，则系统的自由度为 s= 3N −k。

所有不属于完整约束的约束就是非完整约束。其中最重要的一类是所谓不可积微分约束。

所谓微分约束，就是约束包含速度。一个“完整约束”也必然诱导出对应的“微分约束”（即也对速度给出限制）。所以微分约束并不必然是非完整的，只要“微分约束”可以积分，就等价于一个完整约束。

微分式$F_x(x,y,z)dx+F_y(x,y,z)dy+F_z(x,y,z)dz$具有可积性，即该式乘以某积分因子$\phi(x,y,z)$后后能变为全微分$df(x,y,z)$的充要条件是$\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0$。

2.定常约束/非定常约束

定常约束（稳定约束）：不显含时间的约束$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N)=0$，反之则是非定常约束（不稳定约束）。

定常约束在另一个有相对运动的参考系中看，则是非定常约束。但反过来，不是所有非定常约束都可通过参考系变换，成为定常约束。

3.双侧约束/单侧约束

双侧约束：质点始终不能脱离约束，即约束是“等式”。

单侧约束：质点可以在某一方面脱离约束，约束是“不等式”

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N;t)\leq 0$$

2.5 广义坐标

广义坐标是对位形空间的参数化，是任何一组能够唯一确定系统“位形”的独立参量。位形空间的维数就等于独立广义坐标的个数。对于完整约束系统，广义坐标的个数就是系统的自由度。

完整约束：自由度=广义坐标个数；非完整约束：自由度<广义坐标个数。

若找到 s 个独立变量$q^1,q^2,\cdots,q^s$，可以唯一确定系统在满足约束下的位形，且$\boldsymbol{r_i}=\boldsymbol{r_i}(q^1,q^2,\cdots,q^s)$，简化了计算。广义坐标$\{q^a\}$张成了一个 s 维空间，即是系统位形空间（满足约束、物理上能达到的）的参数化。位形空间中的一点$\{q^1,q^2,\cdots,q^s\}$代表了系统一个唯一确定的位形。

从广义坐标出发，可以定义广义速度，广义力，广义动量。

3 相对论时空观

3.1 基本概念

3.1.1 时空

空间的一点和时间的一瞬的联合就给定了一个事件或者说时空点，记作 p。

对于任何一个事件（时空点）p，我们都可以用 4 个实数（c 为光速）$x^\mu\equiv(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv(ct,x,y,z)$来对其参数化，通常其中一个为时间参数 t，三个为空间参数 x,y,z。全体时空点的集合即时空。数学上对时空严格的表述是所谓 4 维流

形。时空的概念是第一性的，时间和空间则是导出概念。时间和空间是一种依赖于具体的观测者的、对时空人为的分解。时空是绝对的，时间和空间则是相对的。

3.1.2 粒子与场

粒子是在运动中忽略其自身内部结构的对象，即在空间中不延展的对象。还有一类对象，在空间中是延展的、连续的，自由度是不可数的，这类系统被称为场。其中，对于空间延展维度为 1 维的对象，被称为弦；空间延展维度为 2 维的对象，被称作膜。经典力学的研究对象是点粒子（包括粒子系统）。研究场的一般理论被称作场论。设场在空间中延展的维度为 d 维，可将其称为“d+1 维场论”。粒子实际上可以视为一种特殊的场，即空间延展维度为 0 的特殊情形，所以研究点粒子的经典力学可以被视为 0+1 维经典场论。著名的弦论，则可被视为 1+1 维场论。

3.1.3 世界线

粒子在时空中是延展的。从时空的角度，粒子是一条 1 维的世界线。

弦论中的基本对象是一条弦，所以其在时空中对应的就是 2 维的世界面，还有所谓膜，在时空中对应的是 3 维的世界体。对于通常实际的物体，在 3 维空间中占据一定体积，对应的时空对象可以被称为世界超体。

3.2 度规

3.2.1 从勾股定理谈起

对于一般的空间，无穷小距离的平方总是可以表示成坐标微分的二次型。这个“无穷小距离的平方”有一个专门的名字，被称作线元，通常记作ds^2，而二次型的系数即对应度规。

3.2.2 进一步的例子

1.2 维欧式空间

$x^i \equiv \{x^1, x^2\}$，有$ds^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$

直角坐标系$x^i \equiv \{x, y\}$，$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$

极坐标系$x^i \equiv \{r, \theta\}$，$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$，$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$

2.3 维欧式空间

$x^i \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$，有$ds^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$

直 角 坐 标 系 $x^i \equiv \{x, y, z\}$，$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

球坐标系$x^i \equiv \{r, \theta, \varphi\}$，$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$，$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 sin^2\theta(d\varphi)^2$

3.2 维球面

角坐标$\{\theta, \varphi\}$表达：$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$

直角坐标$\{x, y\}$表达（z 不是独立的）：$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{R^2-x^2-y^2} & \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{R^2-x^2-y^2} & 1 + \frac{y^2}{R^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}$

3.2.3 度规的一般定义

度规是流形上的非退化的二阶对称张量场。当选择一个局部坐标系$\{x^\mu\}$，流形上的线元为$ds^2 = g_{\mu v}dx^\mu dx^v$。$g_{\mu v}$为度规张量在局部坐标系$\{x^\mu\}$中的分量，是一个对称矩阵。度规$g_{\mu v}$一般也是坐标的函数，即$g_{\mu v} = g_{\mu v}(x^\rho)$。

给定度规$g_{\mu v}$，可以定义其逆度规$g^{\mu v}$，也是一个对称矩阵，定义为$g^{\mu\rho}g_{\rho v} \equiv \delta^\mu{}_v, \delta^\mu{}_v$是单位矩阵。

3.2.4 时空的度规

1.闵氏时空（平坦时空）

爱因斯坦狭义相对论的时空背景是所谓闵科夫斯基时空，简称闵氏时空。数学上，闵氏时空是一个$\boldsymbol{R}^4$线性空间，其中配有一个号差为+2 的度规即闵氏度规$\eta_{\mu v}$。所谓号差，即正本征值的个数减去负本征值的个数。取直角坐标系$x^\mu \equiv \{ct,x,y,z\}$，$\eta_{\mu v}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$\eta^{\mu v}=$，$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$。

2.一般时空（弯曲时空）

对于一个一般的时空流形，不再是平坦的，而是弯曲的。这时度规$ds^2=g_{\mu v}(x)dx^\mu dx^v$，这里$g_{\mu v}(x)$本身也是时空坐标的函数。需要强调的是，流形上的度规分量是坐标的函数，不代表流形是弯曲的。

3.2.5 逆变与协变

我们将对矢量/张量的指标做一种非常重要的区分。即所谓逆变和协变。

1.逆变与协变

我们将坐标$\{x^\mu\}$的指标写在右上角，这些在矢量或张量上方的张量指标被称为逆变指标（或者上标）。相应地，在矢量或张量下方的张量指标被称为协变指标（或者下标）。更一般地，带上指标的矢量称作逆变矢量；带下指标的矢量称作协变矢量。数学上，逆变矢量对应切矢量，协变矢量对应余切矢量。

2.缩并

将爱因斯坦求和规则进一步规定为：一个逆变指标和一个协变指标重复，默认求和，这样的操作被称为指标缩并。在引入了协变和逆变的概念后，所有的缩并一定是在一个协变指标和一个逆变指标之间进行。被缩并的一对指标由于已经被默认求和掉了，因此它们实际上已经不再具有指标的含义了。这种被缩并掉的

指标也被称为哑指标。

3.指标升降

矢量/张量和度规（逆度规）之间的缩并有一定的特殊性。或者说，两个矢量/张量，如果是用度规缩并联系起来的，那么它们其实具有内在的联系。为了体现这一点，在物理学（以及微分几何）中，矢量/张量和度规（逆度规）之间缩并后同一个符号来表示。矢量/张量的逆变和协变指标之间通过度规来升降。

对于二阶张量，我们会遇到 4 种指标摆放，其中——上、下：协变、逆变指标，不可调换，只能用度规升降；左、右：矩阵的行、列指标，可以调换，调换等同于矩阵转置。

4.2 维的简单例子

5.一点数学：线性空间与线性映射

逆变-协变	**Fourier 变换**
切空间 $\leftrightarrow$ 余切空间	坐标空间 $\leftrightarrow$ 动量空间
A^μ	$f(x)$
A_μ	$\tilde{f}(k)$
$g_{\mu\nu}$	$\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}$
$g^{\mu\nu}$	$\frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2\pi}}$
$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$	$\tilde{f}(p) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx} f(x)$
$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$	$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi}} e^{+ipx} \tilde{f}(p)$
$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_\mu{}^\nu$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} e^{-ipx} e^{+ip'x} = \delta(p-p')$
$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu$	$\int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi} e^{+ipx} e^{-ipx'} = \delta(x-x')$

6.洛伦兹标量

对于平坦的闵氏时空（$g_{\mu v} = \eta_{\mu v}$），指标缩并一大作用是可以用来构造洛伦兹变换下的不变量（洛伦兹标量）。任意一个协变矢量A_μ和逆变矢量B^μ相乘并缩并，得到一个洛伦兹标量，这个洛伦兹标量被称为这两个矢量的内积。那么$ds^2 = dx_\mu dx^\mu$，即（无穷小）矢量dx^μ和自己的内积，所以闵氏时空的线元是个

洛伦兹变换下的不变量。更一般地，一些矢量/张量的乘积，只要所有的逆变指标和所有的协变指标全部两两缩并掉，就得到一个洛伦兹标量。

3.3 参考系

3.3.1 观测者

观测者也是一种模型化的概念，一个观测者即是一条世界线。

每个观测者手中对应有一个走时准确的时钟，被称作标准钟。标准钟的读数被称为该观测者的固有时，其数值用τ表示，固有时τ用来对该观测者世界线做参数化的一个参数，即$\tau \to x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$，但是固有时是一种特殊的参数化，其衡量的，即是观测者世界线的长度（除以光速）。即$dl = cd\tau$。

3.3.2 参考系

单独一个观测者只能对自己世界线上的粒子做直接观测。时空中处处存在的、世界线不相交的观测者的集合就构成一个参考系。

给定一个参考系，总可以由之构造出一个坐标系，即所谓的与这个参考系相适配的坐标系。但是反过来，并不是所有的坐标系都可以认为是某个参考系适配的坐标系。

3.3.3 惯性参考系

基于参考系中时空的性质，可以将参考系分成两类：惯性参考系和非惯性参考系。

所谓惯性参考系，即空间均匀且各向同性、时间均匀流逝的参考系。换言之，惯性参考系是这样一类参考系，在其中无法通过任何物理规律、现象来区分时空中的绝对时刻、绝对位置和方向。（牛顿第一定律成立的参考系即惯性参考系/不受其他力作用的自由粒子相对于其作匀速直线运动的参考系即为惯性参考系）

在纯力学范畴内，这些表述都是等价的，都能得到完全相同的结论。但是从时空性质出发的表述，可以适用于力学范畴之外更广泛的物理体系，所以是一个更本质的定义。

1.局部惯性系

惯性系的定义本身并没有要求其必须覆盖整个时空。当没有引力存在时，时空本身平坦，这时整个时空存在一类整体的惯性参考系。当有引力存在时，时空弯曲，这时不存在整体惯性参考系。换句话说，这时任何坐标系都对应非惯性参考系。但是可以证明，在时空中任一时空点及其邻域，都存在局部惯性参考系。

2.非惯性参考系

不是惯性参考系的参考系即非惯性参考系。

3.4 相对性原理

物理定律在所有允许的参考系中具有相同形式。任何一种相对性原理都是自然定律中某种对称性的体现，即从一个观测者变换到另一个观测者，自然定律是不变的。诺特定理指出，任何对称性背后都联系着一个守恒律。相对性原理指出不存在“绝对参考系”。在一个参考系中建立起来的物理定律，通过适当的坐标变换，可以适用于任何参考系。

3.4.1 伽利略相对性原理

牛顿力学隐含了伽利略相对性原理。牛顿力学中的时空观是绝对时空观——时间与空间是完全独立和分离的；时间是一维的、均匀的、无限的，与空间和物质运动都没有关系。时间是绝对的，不同的惯性参考系共享同一个绝对的时钟。时间的同时性也是绝对的，即在一个惯性参考系中同时发生的两件事，在另一个惯性参考系看来也是同时发生的；空间是三维的、均匀且各向同性的、无限的，

与时间和物质运动没有关系。特别是长度是也绝对的，与参考系无关。

伽利略提出：物理定律在一切惯性参考系中具有相同的形式，任何力学实验都不能区分静止和匀速运动的惯性参考系。这就是伽利略相对性原理，是牛顿力学或者说非相对论力学的一条基本原理。关于惯性参考系的相对性原理被称为狭义相对性原理。

伽利略变换：

$$x^{\mu} \to \tilde{x}^{\mu} = \Gamma^{\mu}{}_{v} x^{v}, \Gamma^{\mu}{}_{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & 1 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 1 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d\tilde{s}^2 =- c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 + 2\delta_{ij} v^i dt dx^j + \delta_{ij} dx^i dx^j$$

伽利略变换下时空间隔是变化的，空间长度是不变的。

3.4.2 爱因斯坦狭义相对性原理

伽利略变换体现的是牛顿力学的绝对时空观，这种绝对时空观只是在低速和引力很弱的时候的一种近似。在爱因斯坦相对论时空观中，时间和空间是相互联系的一个整体，即时空。时空是一个基本概念，本身是绝对的；而时间和空间则是导出概念，且依赖于具体观测者，不同观测者看到不同的时间和空间，是相对的。于是时间和长度也就没有绝对的概念和数值，同时性也只有相对的意义。

爱因斯坦指出任何力学和电磁学实验现象都不能区分惯性参考系的绝对运动，包括静止或者匀速运动。爱因斯坦的狭义相对性原理即：物理定律在一切惯性参考系中具有相同形式。爱因斯坦狭义相对性原理与光速不变原理是狭义相对论的两个基本公设。

洛伦兹变换：

3.4.3 广义相对性原理

将相对性原理从惯性系推广至非惯性系，就得到广义相对性原理，即：物理定律在一切参考系中具有相同形式。https://zhuanlan.zhihu.com/p/580810495

4 最小作用量原理

4.1 新的力学原理

4.1.1 “力”是一个不必要的概念

4.1.2 从牛顿到哈密顿

哈密顿猜测，存在一个原理，给每条世界线一个“指标”（一个数），用以比较不同的世界线，从而判断众多的“世界线”中，哪一条是被自然所选择的。这个原理就是哈密顿最小作用量原理。

4.2 最小作用量原理

4.2.1 最小作用量原理

给定一个力学体系，由广义坐标$\{q^a\}$刻画。力学体系具有一个与其运动相关的物理量，称为作用量。如果一个力学体系在给定时刻t_1和t_2的位形$q^a(t_1)$和$q^a(t_2)$确定，则该力学体系的作用量 S 可以表达为联结这两个位形之间的各种可能轨迹的泛函：$S[q^a]=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(t,q^a,\dot{q}^a)$。这里的被积函数$L(t,q^a,\dot{q}^a)$称为体系的拉格朗日量，简称拉氏量。最小作用量原理表述为如下：经典力学体系在时刻t_1和t_2之间的真实运动轨迹使得该体系的作用量$S[q^a]$取极值。

需要注意：

最小作用量原理中的“轨迹”，指的是位形空间随着时间演化所行程的轨迹，而不是位形空间中的轨迹。

任何一个力学体系都可以写出其作用量 S。对于经典力学体系，真实的运动

是唯一的（决定论）。这意味着，在一个参照系中得到的真实运动轨迹，在另一个参照系中仍然是真实的。换句话说，作用量必须是不依赖于具体的参照系的，体现在数学上即不依赖具体的坐标系。当不考虑引力时，时空背景为闵氏时空，这就是要求作用量必须是洛伦兹标量。所谓洛伦兹标量，是指在闵氏时空的洛伦兹变换$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$下不变的量。更一般地，当有引力存在时，时空不再是闵氏时空，这时，则必须要求作用量是广义坐标变换下的不变量。所谓广义坐标变换即一般坐标变换，$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\rho)$。

作用量的数学定义是拉氏量 L 对时间变量 t 的积分。但是由于时间坐标 t 本身并不是洛伦兹标量，所以拉氏量 L 本身并不是洛伦兹标量（Ldt 作为一个整体必须是洛伦兹标量）。在非相对论极限下，时间与空间分离，这时系统的作用量 S 和拉氏量 L 都是（三维意义下的空间）标量。

作用量是有量纲的。给一个物理量 Q，用[Q]表示其量纲，则[作用量] = [能量] × [时间] = [动量] × [空间] = [角动量] = [普朗克常数 ħ]。

假设拉氏量 L 只依赖于广义坐标和广义速度，不依赖于广义坐标的更高阶的时间微商。这一点仅仅是为了和牛顿力学自洽：即给定力学体系的初始位置、初始速度就足以确定一个力学体系以后的运动。一般来说，拉氏量中当然可以包含广义坐标更高阶的时间导数。

运动方程：作用量取极值要求$\{q^a\}$满足欧拉-拉格朗日方程$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$，也叫做运动方程。最小作用量原理和变分法告诉我们，一旦给定了一个力学体系的拉氏量（作用量），其经典运动方程就可以很方便地得到。所以，我们可以说经典力学体系的性质完全由其拉氏量（作用量）所确定。最小作用量原理原理可以推广至非机械运动的体系，甚至可视为整个物理学的第一原理。

4.2.2 广义动量

力学体系中某个广义坐标q^a对应的广义动量定义为$p_a:=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\equiv\frac{\partial L}{\partial v^a}$，这里$v^a\equiv\dot{q}^a$是广义速度。广义坐标$q^a$和广义动量$p_a$构成一对共轭变量$(q^a,p_a)$。广义动量又被称为正则动量。

利用广义动量，运动方程可写成$\frac{dp_a}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q^a}$，广义力$F_a:=\frac{\partial L}{\partial q^a}$。

物理概念	数学对象	符号
位形	点	q^a
位形空间	光滑流形	$\{q^a\}$
速度	切矢量（逆变矢量）	$v^a\equiv\dot{q}^a$
速度空间	切空间	$\{v^a\}$
动量	余切矢量（协变矢量）	$p_a:=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\equiv\frac{\partial L}{\partial v^a}$
动量空间	余切空间	$\{p_a\}$
速度相空间	切丛	$\{q^a,v^b\}$
相空间	余切丛	$\{q^a,p_b\}$

4.2.3 非保守体系

对于非保守体系$\int_{t_1}^{t_2}dt\,(\delta L(t,q^a,\dot{q}^a)+\sum F_a\delta q^a)=0$对应拉格朗日方程$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^a}=F_a$

4.3 自由粒子

4.3.1 4 维形式

一个粒子在时空中的运动轨迹被称为世界线，参数化为$x^\mu=x^\mu(\lambda)\equiv(x^0,x^1,x^2,x^3)\equiv(ct,x,y,z)$，其中 λ 可以是任一单调变化的参数，用来参数化世界线。现在考虑平坦的闵氏时空，世界线上的线元为$ds^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$是一个洛伦兹标量。闵氏时空不同于欧氏空间的重要一点是，欧氏时空中的距离总是正的，但是闵氏时空中的距离（即线元ds^2）可以是正的，也可以是负的，甚至可以为零。对于有质量粒子，世界线上的线元恒为负。线元的长度只能写成$|ds|\equiv$

$\sqrt{-ds^2}=\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}>0$。

粒子的作用量为可能轨迹的泛函，最简单的取法即$S=-mc\int|ds|=-mc\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$，自由粒子的作用量正比于其世界线的长度。

1.固有时

令参数τ的数值正比于世界线的长度：$ds^2=-c^2d\tau^2$，τ被称作世界线的固有时。固有时衡量的就是世界线的长度。固有时τ（及其微分dτ）是洛伦兹标量。固有时——在数值上——即做惯性运动的粒子在固定于自身的惯性系中的坐标时间。引入固有时τ作为世界线的参数后，自由粒子的作用量还可以写成$S=-mc\int d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}$。

2.4-速度

粒子沿着世界线运动，粒子的时空坐标x^μ随着世界线参数τ的变化率即所谓4-速度），定义为$u^\mu:=\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$。粒子的4-速度$u^\mu$是归一化的（归一化到$-c^2$）:$u_\mu u^\mu\equiv\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=-c^2$。引入4-速度后，自由粒子的作用量还可以写成$S=-mc\int d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}=-mc^2\int d\tau$。

3.4-动量

粒子的4-动量为$p_\mu=m\eta_{\mu\nu}u^\nu\equiv mu_\nu,p^\mu\equiv\eta^{\mu\nu}p_\nu=mu^\mu$

4.运动方程

$\frac{\delta S}{\delta x^\mu}=-m\eta_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}=0$, 即$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=0,\frac{dp^\mu}{d\tau}=0$, 即$p^\mu=const$，闵氏时空中自由粒子的4-动量守恒。

4.3.2 3维形式

粒子的空间坐标$x^i\equiv(x^1,x^2,x^3)$随着时间坐标t的变化率即3-速度$v^i:=\frac{dx^i}{dt}$，3-速度即3维空间中的矢量。对于闵氏时空来说，其3维空间部分就是普通的3

维欧氏空间。闵氏度规的空间部分$\eta_{ij}=\delta_{ij}$。

$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, v:=\sqrt{\delta_{ij}v^i v^j}\equiv|\boldsymbol{v}|$，于是作用量可以写成$S=-mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，即闵氏时空中自由粒子作用量的 3 维形式。

1.3-动量

$p_i=\frac{m\delta_{ij}v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\equiv\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，也即$p^i\equiv\delta^{ij}p_j=\frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，还可以写成$p_i=m\frac{dx_i}{d\tau}$，牛顿力学中的动量$mv_i$只是严格的 3-动量在非相对极限下的近似。

2.能量-动量关系

可将粒子的 4-动量分解为时间部分和空间部分$p^\mu=(p^0,p^i)\equiv\left(\frac{E}{c},p^i\right),cp^0=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。

$E^2=p^2c^2+m^2c^4, p:=|\boldsymbol{p}|\equiv\sqrt{\delta_{ij}p^i p^j}$，即爱因斯坦能量-动量关系，也被称作相对论色散关系。

4.3.3 非相对论极限

非相对论极限，即粒子运动速度远远低于光速的极限。需要强调的是，这里的速度指的是 3-速度v^i，即$\frac{v}{c}\ll 1$。在非相对论极限下，闵氏时空变为牛顿力学的伽利略时空。在伽利略时空中，时间具有绝对的意义（同时的绝对性），换句话说，时间与空间发生了绝对的分离。

1.质能关系

在非相对论极限下，$\mathrm{E}=\mathrm{c}p^0=mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right)=E_0+E_1+\cdots$，其中$E_0:=mc^2$，即爱因斯坦质能等价关系。$mc^2$被称作粒子的静止能量，即粒子在空间静止时具有的能量。展开的领头项$E_1=\frac{1}{2}mv^2\equiv T$即牛顿力学下自由粒子的动能。

2.作用量

在非相对论极限下，$S=-mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=-mc^2\int dt\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\cdots\right)=-mc^2\int dt+\int dt\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{8}m\frac{v^4}{c^2}+\cdots\right)$，除去常数项，领头项为$S=\int dt\frac{1}{2}mv^2\equiv\int dt\, T$，为非相对论自由粒子的作用量。

4.4 引力场中的自由粒子

有引力存在的时空不再是闵氏时空。时空度规不再是平坦的闵氏度规$\eta_{\mu\nu}=diag(-1,1,1,1)$，而是一个一般的度规$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x)$，这里的度规$g_{\mu\nu}$是时空坐标$x^\mu$的函数。

和闵氏时空中的自由粒子一样，引力场中自由粒子的作用量正比于其世界线的长度。这里“自由”指的是除了引力之外，不受其他粒子或场的相互作用。对于一个一般的引力场，粒子世界线的线元长度形式为$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\equiv-c^2d\tau^2$，作用量为$S=-mc\int|ds|=-mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$。

4.4.1 球对称引力场

牛顿力学框架下的牛顿引力势能$V(r)=-G\frac{Mm}{r}$，牛顿万有引力定律只是在引力场很弱的情况下的近似。

取球坐标(ct,r,θ,ϕ)，由广义相对论知道，质量为 M 的天体的外部，时空度规具有如下形式：$ds^2=-c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2sin^2\theta d\phi^2$，这就是著名的施瓦西度规。那么$S=-mc\int|ds|=-mc\int\sqrt{c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2-r^2sin^2\theta d\phi^2}$就是球对称引力场中粒子的作用量。

非相对论极限：

在有引力存在的情况下，所谓非相对论极限包括两方面——运动速度很低

（$\frac{\dot{r}}{c},\frac{r\dot{\theta}}{c},\frac{r\dot{\phi}}{c}\ll 1$）、引力效应很弱（$\frac{GM}{c^2r}\ll 1$），于是可以在非相对论极限下将作用量展开，保留到领头阶，$S=-mc^2\int dt+\int dt\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)+G\frac{Mm}{r}\right]+\cdots$，则$S=\int dt\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)+G\frac{Mm}{r}\right]=\int dt(T-V(r))$就是非相对论极限下、球对称引力场中粒子的作用量。

4.4.2 测地线方程

一般时空（流形）中，两点之间距离最短的曲线被称作测地线。

对从一般引力场中粒子的作用量变分，得运动方程$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{v\rho}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^v}-\frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x^\rho}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^v}{d\tau}=0$，即$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}+\Gamma^\sigma_{\mu v}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^v}{d\tau}=0$,称为测地线方程，$\Gamma^\sigma_{\mu v}\equiv\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{v\rho}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^v}-\frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x^\rho}\right)$称为联络系数。

4.5 非相对论极限下作用量的基本形式

对于一个一般的力学系统，在非相对论极限下，作用量具有形式$S=\int dt\,L=\int dt(T-V(r))$，即拉氏量=动能−势能，动能即牛顿力学的动能。在一般的广义坐标$\{q^a\}$下，动能一般具有形式$T=\sum\frac{1}{2}K_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b$,$K_{ab}(q)$可以依赖于广义坐标，是一个对称、正定的矩阵。势能 V 只是广义坐标的函数 $\mathrm{V}=\mathrm{V}(q^a)$。

“拉氏量等于动能减去势能”这句话只适用于非相对论极限下的粒子系统（包括刚体）。一般而言，拉氏量被定义成：能通过变分原理生成正确的运动方程的数学函数。

4.6 电磁场中的带电粒子

4.6.1 4 维形式

电磁场由 4 维矢量场$A^\mu(x)$描写，这个A^μ被称作电磁场的 4 矢量势。

电磁场中的带电粒子的完整作用量即$S=-mc\int|ds|+\frac{e}{c}\int A_\mu(x)dx^\mu$，这里 e 代表了粒子与电磁场$A_\mu$的耦合强度，可以认为就是这个粒子所带的电荷。

平坦时空中带电粒子的运动方程即为$m\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2}=\frac{e}{c}F_{\mu v}(x)\frac{dx^v}{d\tau}$，也可以写成$\frac{dp_\mu}{dt}=\frac{e}{c}F_{\mu v}(x)\frac{dx^v}{dt}$，其中$F_{\mu v}:=\frac{\partial A_v(x)}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^v}$被称为电磁张量，有时也被称作电磁场强。由定义可知$F_{\mu v}$是一个反对称的张量，即$F_{\mu v}=-F_{v\mu}$

4.6.2 3 维形式

$A_\mu(x)$被写成$A^\mu(x)=(A^0(x),A^i(x))\equiv(\Phi(t,\boldsymbol{x}),\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}))$，其中$\Phi$被称为标量势，$\boldsymbol{A}$被称为矢量势，$\mathbf{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，可以验证$F^{0i}=E^i,F^{ij}=\epsilon^{ijk}B_k$,即$F^{\mu v}=\begin{pmatrix}0 & F^{01} & F^{02} & F^{03}\\ F^{10} & 0 & F^{12} & F^{13}\\ F^{20} & F^{21} & 0 & F^{23}\\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E^1 & E^2 & E^3\\ -E^1 & 0 & B_3 & -B_2\\ F^{20} & F^{21} & 0 & F^{23}\\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & 0\end{pmatrix}$。

1.作用量

电磁场中相对论性带电粒子的作用量的 3 维形式即$S=\int dt\,L,L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-e\Phi+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$。

2.运动方程

0-分量 $\frac{dE}{dt}=e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}$

i-分量 $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$

5 对称性与守恒律

5.1 作用量的不变性

5.1.1 拉式量的非唯一性

经典力学系统的演化由运动方程唯一决定。初始条件（状态）给定，运动方程给定，系统就沿着唯一的一条路径（相流）演化。但是拉氏量、作用量却有一定任意性。最重要的一种，即：对应同一组运动方程的拉氏量，可以相差一个对时间的全导数。给定某个拉格朗日量，加上任意一个时间、坐标和速度的函数

$\Lambda(\mathrm{t},\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}},\cdots)$对时间的全导数 $\mathrm{L}\to\tilde{\mathrm{L}}=\mathrm{L}+\frac{d\Lambda(\mathrm{t},\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}},\cdots)}{dt}$所对应的是同一组运动方程，即拉氏量中的全导数部分对变分和运动方程没有贡献。

5.1.2 广义坐标的变换

假设有两组广义坐标$\{q^a\}$和$\{q^b\}$，描述同一个位形空间，之间满足变换关系（点变换）$q^a\to\tilde{q}^a=\tilde{q}^a(q^b)$，要求这个变换是可逆的，即存在$\tilde{q}^a\to q^a=q^a(\tilde{q}^b)$。可逆性要求雅可比行列式非零，即 $\det\frac{\partial\tilde{q}^a}{\partial q^b}\neq 0$。在这样的坐标变换下，广义速度的变换为$\dot{\tilde{q}}^a:=\frac{\partial\tilde{q}^a(q)}{\partial q^b}\dot{q}^b$，逆变换$\dot{q}^a:=\frac{\partial q^a(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}^b}\dot{\tilde{q}}^b$，则$\frac{\partial\dot{\tilde{q}}^a}{\partial\dot{q}^b}=\frac{\partial\tilde{q}^a(q)}{\partial q^b}$，$\frac{\partial\dot{q}^a}{\partial\dot{\tilde{q}}^b}=\frac{\partial q^a(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}^b}$。拉氏量的变化为$L(t,q^a,\dot{q}^a)\to\tilde{L}(t,\tilde{q}^a,\dot{\tilde{q}}^a)\equiv L\left(t,q^a(\tilde{q}^b),\frac{\partial q^a(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}^b}\dot{\tilde{q}}^b\right)$，即拉氏量在数值上不变。作用量的变化为 $S[q^a]\to\tilde{S}[\tilde{q}^a]\equiv\int dt\,\tilde{L}(t,\tilde{q}^a,\dot{\tilde{q}}^a)=\int dt\,L\left(t,q^a(\tilde{q}^b),\frac{\partial q^a(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}^b}\dot{\tilde{q}}^b\right)$，变换前后拉氏量和作用量虽然函数形式不同，但是数值相等，即拉氏量和作用量是广义坐标变换下的标量。$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\tilde{q}^b}=\frac{\partial q^a}{\partial\tilde{q}^b}\frac{\delta S}{\delta q^a}$，在广义坐标变换下，变换前后作用量的运动方程（作为一组）是等价的，即运动方程（作为一组）在广义坐标变换下不变。

5.2 运动积分

考虑自由度为 s 的理想、完整体系，由广义坐标$\{q^a\}$描述，拉格朗日量为$L(q^a,\dot{q}^a,t)$，拉格朗日方程为 s 个二阶微分方程（一般是非线性的）$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}-\frac{\partial L}{\partial q^a}=0$，其解$\{q^a(t),\dot{q}^a(t)\}$一般当然是随时间演化的。但是却存在$\{q^a(t),\dot{q}^a(t)\}$组成的函数$\mathrm{C}=\mathrm{C}(q^a,\dot{q}^a)$，其值只取决于初始条件，而在运动的过程中保持不变。这样的函数被称为运动积分。

对于自由度为 s 的封闭系统（closed system）独立的运动积分的数目为 2s−1 个。所谓封闭系统，即和周围没有任何物质和能量交换的系统。运动积分是通常的守恒律概念的推广。运动积分是一阶微分方程，简化计算。原则上总是可以用

运动积分来取代全部的拉格朗日方程。

5.3 广义能量、动量守恒

考虑一个力学体系，拉氏量为$L = L(t, q^a, \dot{q}^a)$，作为一个拉氏量，显然必须含有广义速度$\dot{q}^a$，但是对时间变量 t 和广义坐标q^a的依赖则不一定。根据拉氏量依赖于 t 和q^a与否，有两种特殊情况，正好分别对应于广义能量和广义动量的守恒。

5.3.1 广义能量守恒

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$可以被视为运动方程的等价形式。定义能量函数$h(t, q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L(t, q, \dot{q})$，意味着$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$。若力学体系不存在任何特别的时间标记，即具有时间的均匀性$h = h(q, \dot{q}) = const$

1.能量函数的意义

能量函数 h 也具有能量量纲。在特定条件下，能量函数就是系统的总能量。

$\mathrm{T} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{K_{ab}}\dot{q}^a\dot{q}^b + F_a q^a + G, \mathrm{K_{ab}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \delta_{ij}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial q^a}\cdot\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial q^b}, F_a = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \delta_{ij}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial q^a}\cdot\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial t}, G = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \delta_{ij}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial t}$，对于定常约束，从直角坐标到广义坐标的变换不显含时间，于是动能是广义速度的二次齐次式：$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{K_{ab}}\dot{q}^a\dot{q}^b$,故 $\mathrm{h} \equiv \mathrm{E}$，即对于定常约束系统，能量函数就是系统的总能量。

2.哈密顿量

$H := p_a\dot{q}^a - L(t, q, \dot{q}) \equiv H(t, q, \dot{q})$，被称作哈密顿函数或者哈密顿量，简称哈氏量。拉氏量 L 是生活在速度相空间$\{q^a, \dot{q}^b\}$上的，而哈氏量 H 是生活在相空间$\{q^a, p_b\}$上的。

5.3.2 广义动量守恒

若拉格朗日量中不出现某个广义坐标，此坐标称作所谓循环坐标，即$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = const$。

1.当q^a为普通直角坐标，对应的p_a即为普通的动量，上式即为动量守恒定律。

2.当q^a为角坐标，对应的p_a即为角动量，上式即为角动量守恒定律。

5.4 时空对称性与守恒量

假定力学系统由 A 和 B 两部分组成，且每一部分都是封闭的，有各自的拉格朗日函数$L_A = T_A - V_A, L_B = T_B - V_B$，若两部分相距很远，相互作用可以忽略，则$T = T_A + T_B, V = V_A + V_B \to L = L_A + L_B$，这就是拉氏量的可加性，即在没有相互作用的系统中，拉氏量和相应的运动方程是解耦的。常常在一组广义坐标中耦合在一起的各个“子系统”，选取另一组广义坐标后，就变成解耦或者近似解耦的（类似于矩阵对角化的思路）。于是利用拉氏量的可加性就可以简化计算。

根据是否“可加”，可将运动积分分为“可加/不可加”两类。具有可加性的运动积分称为守恒量。在经典力学范围内只有 7 个守恒量：能量（1 个）、动量（3 个）、角动量（3 个）。

5.4.1 空间的均匀性与各向同性

考虑 N 个粒子组成的粒子系统。取广义坐标为直角坐标$\{\boldsymbol{x}_\alpha\} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$，考虑空间连续变换：$\boldsymbol{x}_\alpha(t) \to \widetilde{\boldsymbol{x}}_\alpha(t) = \boldsymbol{x}_\alpha(t) + \delta\boldsymbol{x}_\alpha(t)$，要求作用量在空间连续变换下不变，则有$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \cdot \delta\boldsymbol{x}_\alpha = const$。

1.空间均匀性与动量守恒

空间均匀性意味着空间坐标可以做任意整体平移，即力学体系在$\delta\boldsymbol{x}_\alpha \equiv \boldsymbol{\xi}$的变换下，作用量不变。于是$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_\alpha} \cdot \delta\boldsymbol{x}_\alpha \equiv \sum_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{p}_{总} \cdot \boldsymbol{\xi} = const$，即体系（沿着$\boldsymbol{\xi}$方向）的总动量守恒。

2.空间各向同性与角动量守恒

空间各向同性意味着空间坐标可以做任意整体转动。有限转动定义为$\delta x_\alpha^i =$

${R_j}^i x_\alpha^j$，其中${R_j}^i$是正交矩阵。对于无穷小转动${R_j}^i=\varphi n^k {\epsilon_{kj}}^i$，这里$n^k$是与时间无关的任意单位矢量，代表转动的转轴方向；$\varphi$是与时间无关的任意无量纲参数，代表无穷小转动角度。则$\delta\boldsymbol{x}_\alpha=\varphi\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}_\alpha$，系统在无穷小转动变换下不变。于是$\sum_\alpha\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}\cdot\delta\boldsymbol{x}_\alpha\equiv\sum_\alpha\boldsymbol{p}_\alpha\cdot(\varphi\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}_\alpha)=\varphi\boldsymbol{n}\cdot\sum_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha\times\boldsymbol{p}_\alpha)=\varphi\boldsymbol{n}\cdot\sum_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha=\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_{总}$，其中$\boldsymbol{J}_\alpha:=\boldsymbol{x}_\alpha\times\boldsymbol{p}_\alpha$为角动量。那么体系沿着$\boldsymbol{n}$方向转动不变，意味着$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_{总}=const$，即体系（沿着$\boldsymbol{n}$方向）的总角动量守恒。

5.4.2 时间的均匀性

所谓时间均匀，即时间原点（t=0 时刻）可以任意选取，即时间平移不会引起拉格朗日量的变化。这只有在拉格朗日函数不显含时间 t 即$\frac{\partial L}{\partial t}=0$才会实现。此时哈氏量$H=p_a\dot{q}^a-L$是守恒的。对于平方型动能项，约束定常时 H 即为体系的总能量。当约束非定常，约束方程含有时间，这时时间平移约束条件就变了，时间的均匀性就被破坏了。能量守恒本质上反应的就是时间流逝的均匀性。

5.5 诺特定理

在拉格朗日力学的框架下，拉氏量的对称性与守恒律之间存在着一般的关系。这一关系由诺特定理给出。

假设力学体系在某种连续变换下，广义坐标变化为$q^a(t)\to\breve{q}^a(t)=q^a(t)+\delta q^a(t)$，所谓连续变换，即变换可以由某个（某些）参数来参数化，这些参数可以连续取值，所以对称性是连续的。相应地，作用量变化为$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\delta q^a\right)$，如果这种变化是体系的一个对称性，则意味着作用量不变，即$\delta S=0$，即拉氏量差一个对时间的全导数$\delta L=\frac{dJ}{dt}$，于是$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\delta q^a-J$不随时间变化的，是守恒的。以上就诺特定理的全部实质内容：若力学体系的作用量/拉氏量有一个连续对称性$q^a(t)\to\breve{q}^a(t)=q^a(t)+\delta q^a(t)$，则当运动方程满足的时候，存在相应的守恒量

$Q\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\delta q^a-J$，相应的变换称为对称变换，即所有的物理在此变换下不变。诺特定理对局域、整体的对称性都成立。

5.5.1 能量、线动量、角动量守恒作为诺特定理的特例

5.5.2 诺特定理在场论中的应用

在场论中，诺特定理表述为：若拉氏量有一个连续对称性，则当运动方程满足的时候，存在相应的守恒流。

考虑闵氏时空中的标量场$\phi(t,\boldsymbol{x})$，首先可以用ϕ其对时空坐标的一阶导数$\partial_\mu\phi$构造一个洛伦兹标量，称作拉氏密度。拉氏密度$\mathcal{L}=\mathcal{L}(t,\boldsymbol{x})$是时空坐标的函数。一般的拉氏密度具有形式$\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}\left(\phi,\partial_\mu\phi\right)$,只要保证这里的$\mathcal{L}$是洛伦兹标量即可。拉氏量 L 是拉氏密度$\mathcal{L}$对空间的积分，$L(t)=\int d^3x\,\mathcal{L}(t,\boldsymbol{x})$，于是作用量即$S[\phi]=\int dt\,L(t)=\int dt\,d^3x\,\mathcal{L}(\phi,c)$。在连续对称变换$\phi\to\phi+\delta\phi(\epsilon)$下，当运动方程$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\sum_\mu\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0$ 满足时，作用量不变，则$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)=0$，定义 4 维闵氏时空中的矢量守恒流$J^\mu\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi$，则$\partial_\mu J^\mu=0,J^\mu$的散度为零。将时空指标分解，写成$J^\mu=(-c\rho,J^i)$或者$J_\mu=(c\rho,J^i)$，那么$-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^3\partial_iJ_i=0$，即$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$，这就是的 3 维流守恒方程。将$\rho$对空间积分，得到所谓守恒荷：$Q=\int d^3x\,\rho$，满足$\frac{dQ}{dt}=\int d^3x\,\frac{\partial\rho}{\partial t}=\int d^3x\,\nabla\cdot\boldsymbol{J}$，所以 Q 即是这个对称性所对应的守恒荷。

6 约束系统

6.1 函数的条件极值

拉氏乘子法：考虑一个二元函数$\Phi=\Phi(x,y)$，我们要求Φ在变量x,y满足约束$f(x,y)=0$ 时候的极值。可以引入拉氏乘子λ，使 3 元函数$\widetilde{\Phi}(x,y,\lambda):=\Phi(x,y)+\lambda f(x,y)$将$x,y,\lambda$视为 3 个独立变量，取极值。

6.2 完整约束

对于作用量$S=\int dt\, L(t,q^a,\dot{q}^a)$，作用量取极值要求$\delta S\equiv\int dt\,\delta L=\int dt\,\sum_{a=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q^a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\delta q^a=0$，由于广义坐标$q^a$不独立，于是我们不能得到 s 个独立的欧拉-拉格朗日方程。

假设广义坐标之间存在 m 个完整约束，约束方程为$f_i(t,q^a)=0$，引入拉氏乘子$\lambda_i(t)$（一般是时间变量 t 的函数，和q^a和$\dot{q}^a$无关），使新的作用量$\tilde{S}(q^a,\lambda):=\int dt\,(L+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i)=\int dt\,[L(t,q^a,\dot{q}^a)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)f_i\,(t,q^a)]$将$q^a$和拉氏乘子$\lambda$全部视为独立变量，取极值，即$\begin{cases}\frac{\delta\tilde{S}(q^a,\lambda)}{\delta q^a}=\frac{\partial(L+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i)}{\partial q^a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial(L+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i)}{\partial \dot{q}^a}=0\\ \frac{\delta\tilde{S}(q^a,\lambda)}{\delta\lambda_i}=f_i(t,q^a)=0\end{cases}$，第一式可写成$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}-\frac{\partial L}{\partial q^a}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q^a}$，右项可视为完整约束对应的广义力。

6.3 非完整约束

6.3.1 不可积微分约束

考虑形如$f(t,q^a,\dot{q}^a)=0$的非完整约束，即不可积微分约束。拉氏乘子方法不能推广到一般的不可积微分约束系统。一般的非完整约束系统并不能纳入最小作用量原理的框架内。

但是有一个特殊情形，当不可积微分约束具有形式：$f(t,q^a,\dot{q}^a)=\sum_{a=1}^{s}A_a(t,q^a)\dot{q}^a+B(t,q^a)=0$，即只包含速度的线性项，拉氏乘子方法也是适用的，只是$\frac{\partial f}{\partial q^a}$被换成了一般的函数$A_a$。运动方程为$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}-\frac{\partial L}{\partial q^a}=\lambda A_a$。

6.3.2 等周约束

还有一种非完整约束是以积分形式给出的，如$\int dt\, f(t,q^a,\dot{q}^a)=C$，这类约束也被称为等周约束。等周约束可以用拉氏乘子方法处理。即，新作用量$\tilde{S}[q^a]:=\int dt\,(L+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i)=\int dt\,[L(t,q^a,\dot{q}^a)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i\,(t,q^a,\dot{q}^a)]$对$q^a$全部独立，求极

值（对于等周约束，拉氏乘子 λ 是个常数）。

6.4 例子

6.5 约束系统的一般理论

如果把拉氏乘子λ也视为一个广义坐标，则$S[q^a,\lambda]$实际上就是关于 s+1 个独立广义坐标的作用量。给一个作用量，我们一开始把其中所有的广义坐标都视为独立的，做独立变分，得到运动方程，却发现其中某些广义坐标的欧拉-拉格朗日方程（或组合）只是约束方程。

考虑一个作用量$S=\int dt\, L(t,q^a,\dot{q}^a)$，将所有的广义坐标视为独立的，则欧拉-拉格朗日方程为$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}-\frac{\partial L}{\partial q^a}=0$，可以等价地写成$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\ddot{q}^b-\frac{\partial L}{\partial q^a}=0$，即$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\ddot{q}^b=\frac{\partial L}{\partial q^a}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b$，左项系数矩阵被称作黑塞矩阵$W_{ab}(q,\dot{q}):=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$，黑塞矩阵是$q^a,\dot{q}^a$的函数，且是对称矩阵。记$V_a(q,\dot{q}):=\frac{\partial L}{\partial q^a}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b$，此时$W_{ab}\ddot{q}^b=V_a$。

1.如果黑塞矩阵是可逆的，即不退化的（$\det W_{ab}\neq 0$），则我们可以从式中解出所有的加速度$\ddot{q}^a=(W^{-1})^{ab}V_b$。这意味着，所有 s 个欧拉-拉格朗日方程都是运动方程。这时系统不存在任何约束。

2.如果黑塞矩阵不可逆，即退化的（$\det W_{ab}=0$），我们无法从式中解出 s 个加速度来，即有些方程退化成约束方程。黑塞矩阵退化，意味着不是满秩的，作为一个对称矩阵，这意味着W_{ab}存在 k 个零本征矢：$W_{ab}(q,\dot{q})Y^b_\alpha(q,\dot{q})=0$，如果$Y^b_\alpha V_a\neq 0$，则有$f_\alpha(q,\dot{q}):=Y^b_\alpha V_a=0$ 正是约束方程。拉氏乘子法构造的作用量$S=\int dt\, L(t,q^a,\dot{q}^a)$的黑塞矩阵是退化的，。所以这是一个约束系统，且是一种非常平庸的约束系统。

7 达朗贝尔原理

7.1 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理本质上也是一种变分原理。只不过最小作用量原理是积分形式的变分原理，而达朗贝尔原理是微分形式的变分原理。

7.1.1 概念解释

虚位移：所谓虚位移，其实就是坐标的变分在达朗贝尔原理的语境中的另一个说法。由于约束的存在，变分（虚位移）必须满足约束条件。坐标的变分（虚位移）平行于约束面。

约束力：既然运动被限制上约束面上，这种限制自然也归结为所谓约束力，即迫使力学系统遵守约束条件的力。相应地，和约束无关的力（即约束消失仍然存在）被称作主动力。运动方程中的约束力不能预先确定，是未知量的一部分，只能从运动方程和约束方程联合求解。

虚功：所谓虚功，就是力（包括主动力和约束力）在虚位移下所做的功。

理想约束：如果系统所有约束力所做的虚功之和为零，即$\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{N}_\alpha\cdot\delta\boldsymbol{x}_\alpha=0$，则该约束称为理想约束。

7.1.2 达朗贝尔原理

$\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\alpha-\boldsymbol{m}_\alpha\ddot{\boldsymbol{x}}_\alpha)\cdot\delta\boldsymbol{x}_\alpha=0$，这就是达朗贝尔原理：理想约束系统所受主动力和惯性力产生的总虚功为零。

7.2 由达朗贝尔原理导出拉格朗日方程

考虑 N 个质点体系，假设存在 k 个完整约束，于是可以选取 s=3N−k 个独立的广义坐标$\{q^a\}=\{q^1,q^2,\cdots,q^s\}$，直角坐标$\boldsymbol{x}_\alpha$表示为$\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{x}_\alpha(t,q^a)$，虚位移表示为$\delta\boldsymbol{x}_\alpha=\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q^a}\delta q^a$，那么$\sum_{a=1}^{s}\left[\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\alpha-\boldsymbol{m}_\alpha\ddot{\boldsymbol{x}}_\alpha)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q^a}\right]\delta q^a=0$。速度$\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha=\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q^a}\dot{q}^a+\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial t}$，则$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha}{\partial \dot{q}^a}=\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q^a}$，即速度之间的偏导数关系等于坐标之间的偏导数

关系。动能用广义坐标表达为$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha{}^2=T(t;q^a;\dot{q}^a)$，于是$\frac{\partial T}{\partial q^a}=\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha\cdot\frac{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha}{\partial q^a}$，$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^a}=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q^a}$。定义广义力$Q_a:=\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{F}_\alpha\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}{\partial q^a}$，于是$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^a}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^a}=Q_a$。

7.2.1 保守体系

当体系所受主动力全部都是保守力时，$\boldsymbol{F}_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_\alpha},V=V(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N)\equiv V(q^a)$是势能，只是坐标的函数，与广义速度无关（所有的粒子共用一个势能），则$Q_a=-\frac{\partial V}{\partial q^a}$，那么$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^a}=0$就是完整、保守体系的拉格朗日方程。这里$L\equiv T-V$正是拉氏量。

当主动力既有保守力又有非保守力时，把保守力部分用$-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}_\alpha}$表示，非保守力部分仍然用广义力$Q_a$表示，这时拉格朗日方程变为$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^a}=Q_a$。

8 两体问题

8.1 两体系统

8.1.1 两体问题

两个相互作用粒子组成的封闭体系即两体系统。研究两体系统的运动问题即所谓两体问题。两体问题可分为三类：1.束缚态：两个粒子不会无限分离，距离总保持有限。2.碰撞和散射：两个粒子从无穷远处靠近，经相互作用改变彼此的运动状态，之后又相互分离至无穷远。3.俘获和衰变。

8.1.2 两体系统的拉氏量

设两粒子各自质量为m_1和m_2，在实验室系（惯性系）中的位置矢量分别为$\boldsymbol{r}_1^{(0)}$和$\boldsymbol{r}_2^{(0)}$。首先，两体系统的动能为$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}_2^{(0)}\right)^2$，势能由两部分组成$V=V^{(ex)}+V^{(in)},V^{(ex)}$:两粒子在外场中的总势能,$V^{(in)}$：两粒子之间相互作用的势能，$V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)},\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)=V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)}\right)+V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right),V^{(in)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)},\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)=$

$V^{(in)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)}-\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)$，那么$V=V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)}\right)+V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)+V^{(in)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)}-\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)$。总之，两体系统的拉氏量的一般形式为$L=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{r}}_1^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{r}}_2^{(0)}\right)^2-V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)}\right)-V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)-V^{(in)}\left(\boldsymbol{r}_1^{(0)}-\boldsymbol{r}_2^{(0)}\right)$。

8.1.3 两体系统的解耦

相对于外场中的势能，两体系统的相互作用势能更加重要。两体系统的运动方程是耦合在一起的，我们希望通过选取新的广义坐标，使其解耦。

我们发现线性变换$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_C^{(0)}\\ \boldsymbol{r}\end{pmatrix}$,逆变换$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_1^{(0)}\\ \boldsymbol{r}_2^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_C^{(0)}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{r}_C^{(0)}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\end{pmatrix}$下，$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{\boldsymbol{r}}_C^{(0)}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)(\dot{\boldsymbol{r}})^2-V^{(in)}(\boldsymbol{r})-V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_C^{(0)}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\right)-V^{(ex)}\left(\boldsymbol{r}_C^{(0)}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\right)$，由于外场$V^{(ex)}$的存在，一般来说两体系统是无法完全解耦的。

一个特殊情况是，每个粒子在外场中的势能与其位矢成线性关系（这当然也包括根本不存在外场的情况），且系数正比于各自的质量，即$V^{(ex)}(\boldsymbol{r})=m\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}$，这时$V^{(ex)}=(m_1+m_2)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_C^{(0)}$，即只和质心坐标$\boldsymbol{r}_C^{(0)}$有关。一般来说$V^{(ex)}$只与质心位置有关是很特殊的，所以一般来说两体系统并不能完全解耦，也就是说不能约化为两个单体问题。但是，当外场效应可以忽略时，两体系统总是可以解耦、或者近似解耦的。这时，两体系统可以约化为两个单体系统，即两体系统=质心运动+相对运动。其中：质心运动为$L_1=\frac{1}{2}m_t\left(\dot{\boldsymbol{r}}_C^{(0)}\right)^2-m_t\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}_C^{(0)}, m_t\equiv m_1+m_2$，相对运动为$L_2=\frac{1}{2}m_r(\dot{\boldsymbol{r}})^2-V^{(in)}(\boldsymbol{r}), m_r\equiv\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$。

8.2 中心势场

考虑一种特殊情况，即两体系统的相互作用势能只和两体之间的距离大小有关，即$V^{(in)}(\boldsymbol{r})=V^{(in)}(r)$。

8.2.1 中心势场中的运动

选取球坐标$\{r,\theta,\phi\}$，粒子的拉氏量在球坐标下的表达式：$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)-V(r)$

1.角动量守恒

$p_\phi\equiv\frac{\partial L}{\partial\phi}=mr^2sin^2\theta\dot{\phi}=const\equiv J_z$，由于空间（相对于中心）的各向同性，中心势场中粒子角动量矢量的所有 3 个分量都是常数，即$\boldsymbol{J}\equiv\left(J_x,J_y,J_z\right)=\boldsymbol{const}$。意味着中心势场中粒子必做平面运动，取平面极坐标$\{r,\theta\}$简化，$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\big)-V(r)$，角动量守恒意味着$J=mr^2\dot{\theta}=const$，即开普勒第二定律——行星单位时间内扫过的面积是常数。

由拉氏量不显含时间，能量守恒$h\equiv\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V(r)=E=const$。

2.轨道方程

$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}+V(r)=const$，意味着$t=\pm\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))-\frac{J^2}{m^2r^2}}}$，假设这个积分可以积出得到$r=r(t)$，代回$J=mr^2\dot{\theta}$，得到$\theta=\theta(t)=\int dt\,\frac{J}{mr^2(t)}$，还可以得到$\frac{mr^2}{J}d\theta=\pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))-\frac{J^2}{m^2r^2}}}$，积分，即可得到轨道方程$r=r(\theta)$。

8.2.2 定性讨论

1.角向：θ

由$\dot{\theta}=\frac{J^2}{mr^2}>0$，$\theta$总是随时间单调变化，且$\dot{\theta}\sim\frac{1}{r^2}$，距离中心越近，势能转化为动能，转得越快；距离中心越远，动能转化为势能，转得越慢。

2.径向：r

径向运动，可以看成单粒子在有效势场$V_{eff}(r)=V(r)+\frac{J^2}{2mr^2}$中的一维运动。其中$\frac{J^2}{2mr^2}$可被视为离心势能。由$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{J^2}{2mr^2}+V(r)=const$，$V(r)+\frac{J^2}{2mr^2}-E=0$ 的零点即轨道的转变点。

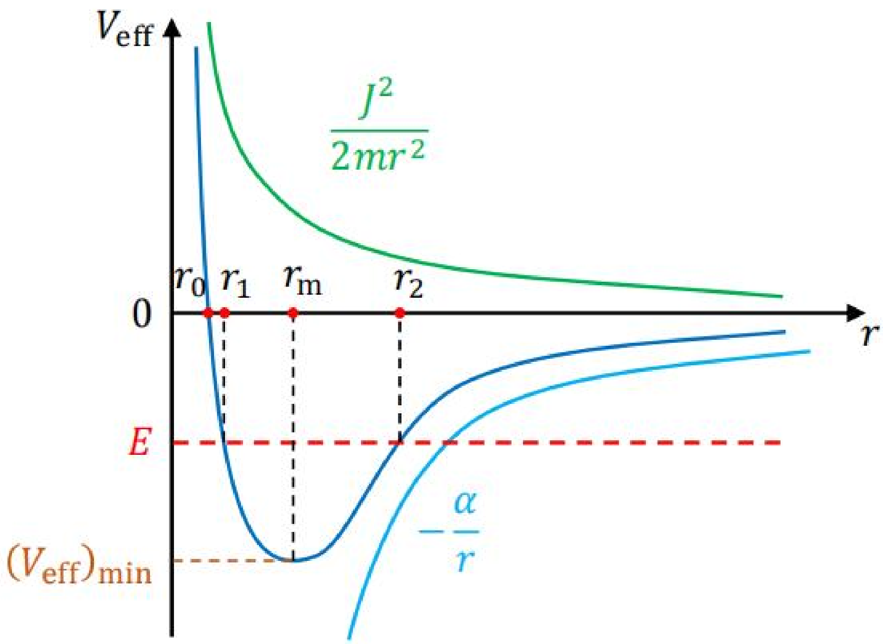
半无限：$r \ge r_{min}$，轨道从无穷远来，回到无穷远去。

两个边界r_{min}, r_{max}: $r_{min} \le r \le r_{max}$，角度变化$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E-V(r)) - \frac{J^2}{r^2}}}$,

轨道闭合条件是$n\Delta\theta = m2\pi$，即经过 n 个周期的转动，轨道闭合。对于一般的$V(r)$，轨道都不闭合。只有$V \propto \frac{1}{r}, V \propto r^2$，有限运动的轨道才是闭合的。

8.3 开普勒问题

与距离成反比的中心势场是最常见也是最重要的一种势场。这时的力学问题称为开普勒问题。考虑吸引势$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, 径向运动的有效势$V_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{J^2}{2mr^2}$。



8.3.1 定性分析

有效势的主要特征：

1.极限行为 $r \to 0, V_{eff}(r) \to +\infty, r \to +\infty, V_{eff}(r) \to -0$

2.有效势在$r = r_{min} = \frac{J^2}{m\alpha}$处存在极小值，对应$V_{eff}(r_{min}) = -\frac{\alpha^2 m}{2J^2}$

3.有效势曲线存在零点，对应$r = r_0 = \frac{J^2}{2m\alpha}$

故可以对运动情况做定性描述：

1.当$V_{eff}(r)_{min} \le E < 0$:此时粒子限制于$r_1 \le r \le r_2$的环状区域运动。这种状态为“束缚态”。$r_1$称“近日点”，$r_2$称“远日点”。当$r_1 = r_2 = r_{min}$,即$E = V_{eff}(r)_{min}$，轨道为半径$r_{min}$的正圆。

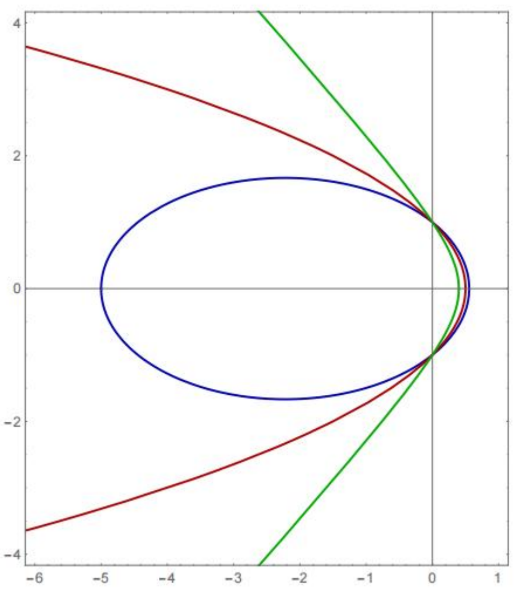
2.当 $E \ge 0$，此时存在近日点，但是不存在远日点，粒子在离心势的作用下飞向无穷远。

8.3.2 轨道方程

$$\theta = \int \frac{J}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{J^2}{mr^2}}} = \int \frac{J^2}{m\alpha}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}+1-\left(1-\frac{1}{r}\frac{J^2}{m\alpha}\right)^2}}，\text{引入}p \equiv \frac{J^2}{m\alpha}, e \equiv \sqrt{\frac{2EJ^2}{m\alpha^2}+1}，$$

其中 p 被称作半通径，e 被称作偏心率，则积分可以写成$\theta = \int \frac{p}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{e^2-\left(1-\frac{p}{r}\right)^2}}$，引入$u \equiv 1-\frac{p}{r}, \theta = \int \frac{du}{\sqrt{e^2-u^2}} = arcsin\left(\frac{u}{e}\right) + \theta_0$。那么轨道方程可以写成$u \equiv 1-\frac{p}{r} = esin(\theta-\theta_0)$，取$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$，则$r = \frac{p}{1+ecos\theta}$是一个圆锥曲线方程。$\theta = 0$ 时对应$r = r_{min}$（近日点）。

总能量 E<0，即 e<1，椭圆；总能量 E=0，即 e=1，抛物线；总能量 E>0，即 e>1，双曲线。



8.3.3 椭圆轨道情形

近日点和远日点$r_{min}=\frac{p}{1+e},r_{max}=\frac{p}{1-e}$。

椭圆的长轴 $2a=\frac{p}{1-e^2}=-\frac{\alpha}{E}$，故轨道长轴只与粒子的能量 E 有关，与椭圆形状无关。

椭圆的短轴$b=\frac{J}{\sqrt{-2mE}}$与角动量有关。

粒子沿椭圆轨道运动一周所需时间（周期），由$J=mr^2\dot{\theta}=const$，$T=\int_0^{2\pi}\frac{mr^2}{J}d\theta=\frac{m}{J}2\pi ab=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}a^3}$，这就是开普勒第三定律：椭圆轨道周期的平方与能量绝对值的三次方成反比，或者与半长轴的三次方成正比。

8.4 弹性碰撞

弹性碰撞，即两个粒子在碰撞前后内部状态不发生改变。

总动量、总角动量守恒：碰撞过程时间很短，外场效应可以忽略，可认为不受外场影响；

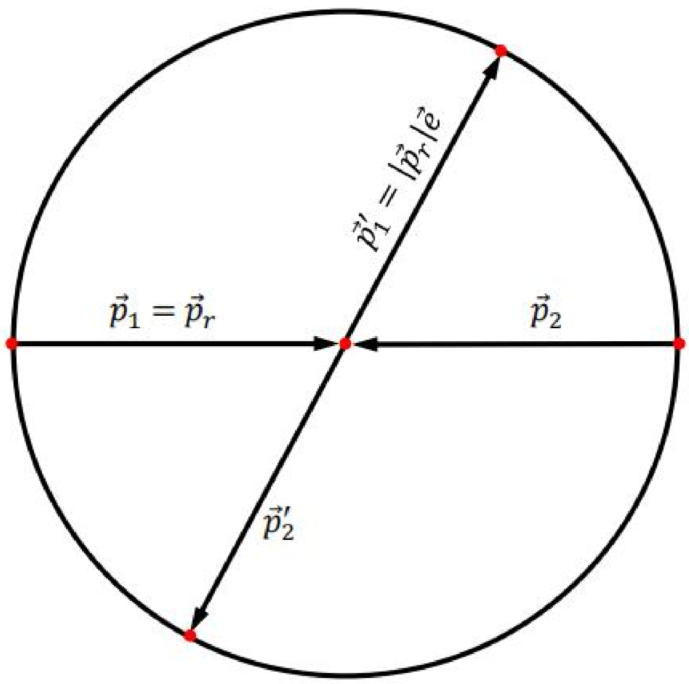
碰撞前后总动能守恒：每个粒子内部状态不变，碰撞前后，两粒子相距无穷远，相互作用可忽略，总机械能守恒体现为总动能守恒。这意味着，弹性碰撞前后动能没有转化为其他形式的能量。

8.4.1 质心系

在质心系中，由动量、动能守恒，$v_1=v_1',v_2=v_2'$，即质心系中两粒子弹性碰撞只改变各自的运动方向，不改变各自的速度大小。

碰撞前：$\boldsymbol{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_1=m_r\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{p}_r,\boldsymbol{p}_2=-m_r\boldsymbol{v}\equiv-\boldsymbol{p}_r$。

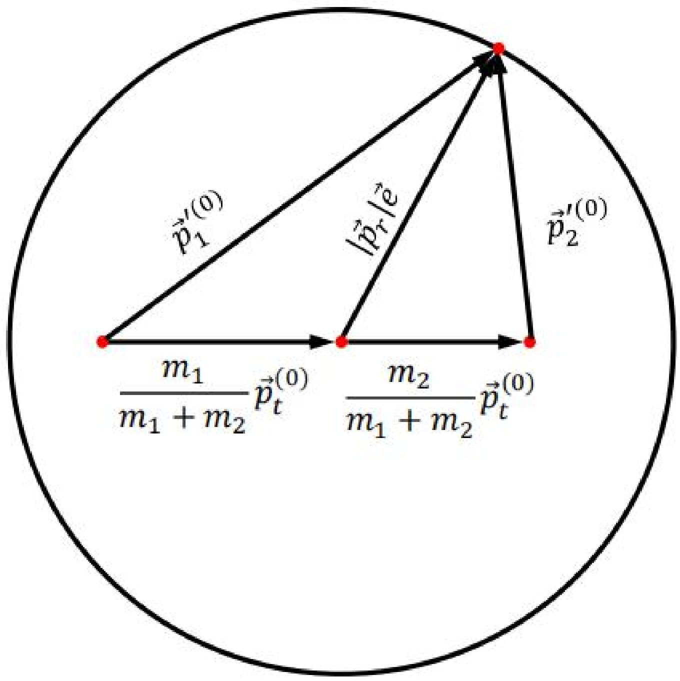
碰撞后：$\boldsymbol{p}_1'\equiv|\boldsymbol{p}_r|\boldsymbol{e},\boldsymbol{p}_2\equiv-|\boldsymbol{p}_r|\boldsymbol{e}$。



8.4.2 实验室系

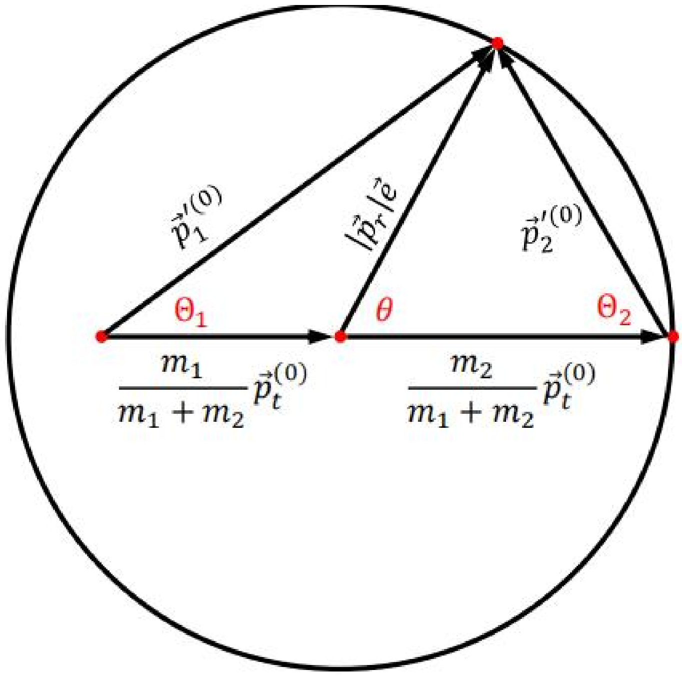
碰撞前：$\boldsymbol{p}_1^{(0)} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_t^{(0)} + \boldsymbol{p}_r$，$\boldsymbol{p}_2^{(0)} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_t^{(0)} - \boldsymbol{p}_r$

碰撞后：$\boldsymbol{p}'^{(0)}_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_t^{(0)} + |\boldsymbol{p}_r|\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{p}'^{(0)}_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{p}_t^{(0)} - |\boldsymbol{p}_r|\boldsymbol{e}$



8.4.3 靶核静止

假定m_2静止，这时$\frac{m_2}{m_1+m_2}p_t^{(0)} = p_r$。



θ即是质心系中第一个粒子的偏转角。实验室系中第一个粒子偏转角$tan\Theta_1=\frac{m_2 sin\theta}{m_1+m_2 cos\theta}$，第二个粒子的偏转角$\Theta_2=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$。

8.5 散射

8.5.1 散射角

用无穷远处的速度v_∞和瞄准距离b代替E和J，那么散射角$\theta=\pi-2\int_{r_{min}}^{+\infty}dr\frac{b}{r^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}-\frac{2V(r)}{m_r v_\infty^2}\right)^{-1/2}$。

8.5.2 散射截面

定义$n=\frac{N}{St}$，令$dN=n2\pi bdb$为单位时间内散射角$\theta\sim\theta+d\theta$之间的粒子数。定义微分散射界面$d\sigma=\frac{dN}{n}=2\pi bdb=2\pi b(\theta)\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\theta$。实际上，通常用球面立体角$d\omega=2\pi sin\theta d\theta$，即$d\sigma=\frac{b(\theta)}{sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\omega$，于是$dN=n\frac{b(\theta)}{sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|d\omega$。实验中通过测量$N(\omega)$来推算$b(\theta)$，进而推算$V(r)$。

9 微扰理论与小振动

9.1 微扰理论

9.1.1 线性化与微扰论

现实世界是高度非线性的。面对任何一个实际物理系统，第一步就是希望将其线性化。假设物理系统所有可能的“解”构成一个解空间，由于物理系统的高度非线性，我们无法求得所有这些解，实际上，我们能够求得的可能只是解空间中很小的一个区域。假设我们已知一个解。线性化，即将物理系统在已知的解附近展开，保留到线性阶，于是得到一个线性系统。而我们对于线性系统有着有效的处理方法，于是就可以得到和已知解稍许不同的另一个新解。继续重复此步骤，就可以一点点拓宽在解空间中的已知区域。而这个过程，就是微扰论。

9.1.2 微扰展开

微扰论的基本手续是微扰展开，可以直接对运动方程做展开，但通常是直接对作用量做展开。

考虑单个自由度的系统，广义坐标为Q。假定已知系统的运动方程的某个特定的解$Q_{(0)} = Q_{(0)}(t)$，它满足欧拉-拉格朗日方程$-\left.\frac{\delta S}{\delta Q}\right|_{(0)} = \frac{d}{dt}\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right|_{(0)} - \left.\frac{\partial L}{\partial Q}\right|_{(0)} = 0$，在微扰论的语境下，这个已知的特定的解被称作背景位形，简称背景。

考虑系统对这个特定解的偏离，记作$Q = Q_{(0)} + \epsilon q$，q表征系统对背景的偏离，被称作扰动，ϵ来表征扰动大小。这时作用量$S[Q] = S[Q + \epsilon q]$是ϵ的函数。展开，$S[Q] = S_0 + \epsilon S_1 + \cdots$。

ϵ^0（背景的作用量）：$S_0[Q_{(0)}] = \int dt\, L(t, Q_{(0)}, \dot{Q}_{(0)})$，即背景本身的作用量。

ϵ^1：$S_1[q] = \int dt \left(\left.\frac{\partial L}{\partial Q}\right|_{(0)} q + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right|_{(0)} \dot{q} \right) \simeq \int dt \left.\frac{\delta S}{\delta Q}\right|_{(0)} q = 0$，即扰动的 1 阶拉氏量正比于背景运动方程，扰动的 1 阶作用量恒为零。

ϵ^2:$S_2[q] = \int dt \left(\frac{1}{2} K \dot{q}^2 - \frac{1}{2} M q^2 \right), K := \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{Q}^2}\right|_{(0)}, M := -\frac{\partial^2 L}{\partial Q^2} + \frac{d}{dt}\left.\left(\frac{\partial^2 L}{\partial Q \partial \dot{Q}} \right)\right|_{(0)}$。

ϵ^n:更高阶的项是扰动的高阶相互作用，对应更高阶的修正。

扰动的作用量是从 2 阶开始的，而 2 阶作用量对应的正是线性运动方程，可

以系统求解。

通常要求背景是稳定的，即围绕背景的小扰动不会随着时间无限增大。这就要求扰动的运动方程是振动方程。背景的稳定性条件即$M>0$。

9.1.3 多自由度

考虑 s 个自由度的保守系统，背景运动方程为$-\left.\frac{\delta S}{\delta Q^a}\right|_{(0)}=\frac{d}{dt}\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^a}\right|_{(0)}-\left.\frac{\partial L}{\partial Q^a}\right|_{(0)}=0$。对背景做围绕展开，$S[Q]=S_0+\epsilon S_1+\cdots$。

ϵ^0：$S_0[Q^a_{(0)}]=\int dt\, L(t,Q^a_{(0)},\dot{Q}^a_{(0)})$，即背景本身的作用量。

ϵ^1:$S_1[q^a]=\int dt\left(\left.\frac{\partial L}{\partial Q^a}\right|_{(0)}q^a+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^a}\right|_{(0)}\dot{q}^a\right)\simeq\int dt\left.\frac{\delta S}{\delta Q^a}\right|_{(0)}q^a=0$。

ϵ^2 : $S_2[q^a]=\int dt\left(\frac{1}{2}K_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b+\frac{1}{2}F_{ab}q^a\dot{q}^b-\frac{1}{2}M_{ab}q^aq^b\right)$, $K_{ab}:=\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{Q}^a\partial \dot{Q}^b}\right|_{(0)}$, $F_{ab}:=\left.\left(\frac{\partial^2 L}{\partial Q^a\partial \dot{Q}^b}-\frac{\partial^2 L}{\partial Q^b\partial \dot{Q}^a}\right)\right|_{(0)}$, $M_{ab}:=-\left.\frac{\partial^2 L}{\partial Q^a\partial Q^b}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial Q^a\partial \dot{Q}^b}\right)\right|_{(0)}$，$K_{ab}$和$M_{ab}$是对称矩阵，而$F_{ab}$是反对称矩阵。

9.2 稳定平衡位形附近的微扰展开

平衡位形是系统运动方程的一组静态解。

9.2.1 振动的定义及分类

一个物理系统，如果存在稳定平衡位形，当对稳定平衡位形偏离很小，那么其典型的运动方式就是小振动。小振动是物理系统普遍存在的一种运动形式。

9.2.2 单自由度

考虑单自由度保守系统在平衡位形附近的微扰展开。广义坐标记为Q。

所谓平衡位形，即$Q_{(0)}=const$，$\dot{Q}_{(0)}=0$。背景运动方程等价于$\left.\frac{\partial L}{\partial Q}\right|_{(0)}=0$，对于$L=T-V$形式，平衡条件即$\left.\frac{\partial V}{\partial Q}\right|_{(0)}=0$。

扰动的 2 阶作用量$S_2[q]=\int dt\left(\frac{1}{2}K\dot{q}^2-\frac{1}{2}Mq^2\right)$, $K:=\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{Q}^2}\right|_{(0)}$, $M:=-\frac{\partial^2 L}{\partial Q^2}+$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial Q \partial \dot{Q}}\right)\bigg|_{(0)}$，$K$和$M$是常数。对于$L = T - V$形式，$K := \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}^2}\bigg|_{(0)} > 0$，$M := \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}\bigg|_{(0)}$。稳定性条件$M > 0$。

9.2.3 多自由度

当背景是平衡位形时，且$L = T - V$形式，背景运动方程为$\frac{\partial V}{\partial Q^a}\bigg|_{(0)} = 0$，这时多自由度保守系统的平衡条件。

扰动的 2 阶作用量 $S_2[q^a] = \int dt\ \left(\frac{1}{2} K_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b - \frac{1}{2} M_{ab} q^a q^b\right), K_{ab} := \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}^a \partial \dot{Q}^b}\bigg|_{(0)}, M_{ab} := \frac{\partial^2 V}{\partial Q^a \partial Q^b}\bigg|_{(0)}$，$K_{ab}$和$M_{ab}$是常矩阵。稳定性条件$M_{ab}$正定。

9.3 自由振动

9.3.1 单自由度

运动方程$\ddot{q} + \frac{M}{K} q = 0$，这就是谐振子方程，通解为$q(t) = A e^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}, \omega = \sqrt{\frac{M}{K}}$。

9.3.2 2 自由度

运动方程$K_{ab}\ddot{q}^b + M_{ab} q^b = 0$。取解的形式$q^a(t) = A e^{-i\omega t} + A^* e^{i\omega t}$，代入运动方程可以得系数的线性代数方程$(M_{a1} - \omega^2 K_{a1})A + (M_{a1} - \omega^2 K_{a1})B = 0$。要得到非零解，$det(M_{ab} - \omega^2 K_{ab}) = 0$，即小振动体系的本征方程或久期方程。由它可以解出两个振动频率，称为本证频率或固有频率。

非简并情形通解 $q^1(t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_1^* e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t} + A_2^* e^{i\omega_2 t}, q^2(t) = B_1 e^{-i\omega_1 t} + B_1^* e^{i\omega_1 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t} + B_2^* e^{i\omega_2 t}$。简并情形 $q^1(t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_1^* e^{i\omega_1 t}, q^2(t) = B_1 e^{-i\omega_1 t} + B_1^* e^{i\omega_1 t}$。

9.3.3 保守体系自由振动的一般理论

记扰动$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^s \end{pmatrix}$，那么$S_2[q] = \int dt\ \left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{K} \dot{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{q}\right)$，运动方程$\boldsymbol{K}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{q} = 0$。取试解$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A} e^{-i\omega t} + \boldsymbol{A}^* e^{i\omega t}$，那么$(\boldsymbol{M} - \omega^2 \boldsymbol{K})\boldsymbol{q} = 0$。为了得到非零解，

$det\,(\boldsymbol{M}-\omega^2\boldsymbol{K})=0$，这就是自由度 s 小振动系统的久期方程。总存在 s 个正的振荡频率，即系统的本征频率。通解可以写为$\boldsymbol{q}=\sum \boldsymbol{A}e^{-i\omega_\alpha t}+\boldsymbol{A}^*e^{i\omega_\alpha t}$。

9.3.4 简正坐标和本证振动

存在变换矩阵$\mathbf{R}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\xi}$，使得$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{M}$能够同时对角化。这时$\boldsymbol{\xi}$是解耦的，对应本证频率，解为$\xi^\alpha=A^\alpha e^{-i\omega_\alpha t}+A^{\alpha *}e^{i\omega_\alpha t}$，这种单一的振动模式称作简正振动或本证振动，对应的广义坐标称为简正坐标。

9.4 阻尼振动

一般来说，与外界环境交换能量将导致系统的部分能量传递到环境中，即所谓“阻尼现象”或“耗散现象”。此时的振动称作阻尼振动。

9.4.1 耗散函数

设阻力$f_\alpha=-c_\alpha\dot{x}_\alpha$，引入耗散函数$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\sum c_\alpha{\dot{x}_\alpha}^2, f_\alpha=-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{x}_\alpha}$。根据直角坐标与广义坐标关系，$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\sum C_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b$，一般来说$C_{ab}$是广义坐标的函数，但是在处理小振动时，只需保留其零阶项，即视之为常数。

计入耗散因素后，保守体系的拉格朗日方程为$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}-\frac{\partial L}{\partial q^a}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}^a}=0$。

9.4.2 耗散函数的物理意义

$\frac{dE}{dt}=-2\mathcal{F}$，单位时间内体系所耗散的能量为 2 倍的耗散函数。

9.4.2 振动阻尼的求解

$L=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{q}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{q}$，$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}$，运动方程$\boldsymbol{K}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{q}=0$。取试探解$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}e^{\lambda t}$，代入，欲有非零解，要求$det\,(\boldsymbol{K}\lambda^2+\boldsymbol{C}\lambda+\boldsymbol{M})=0$，从中解出 2s 个根$\lambda_{a\pm}=-\alpha_a\pm i\omega_a$，最终振动解为$\boldsymbol{q}=\sum\boldsymbol{A}_{a+}e^{-i\lambda_{a+}t}+\boldsymbol{A}_{a-}e^{i\lambda_{a-}t}$。

阻尼振荡的振幅一定是衰减的。

9.5 受迫振动

系统在驱动力下的振动称为受迫振动

9.5.1 单自由度系统的受迫振动

$T=\frac{1}{2}k\dot{q}^2, V=\frac{1}{2}mq^2, \mathcal{F}=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$，对应的广义驱动力$Q(t)=Fe^{-i\omega t}+F^*e^{i\omega t}$，微分方程$k\ddot{q}+c\dot{q}+mq=Q(t)$，它的解为$q=\bar{q}+\tilde{q}$，$\bar{q}$为齐次方程解，由于阻尼项作用，称为瞬态响应，很快指数衰减，$\tilde{q}$是对应于广义力的特解，表示系统的稳态响应。

取试探解$q=Ae^{-i\omega t}+A^*e^{i\omega t}$，解得$A=-\frac{F}{k\omega^2+ic\omega-m}$。

$|A|=\frac{|F|}{\sqrt{(k\omega^2-m)^2+c^2\omega^2}}$，当$\omega=\omega_0$时，$|A|_{max}=\frac{|F|}{c\omega}$，这就是共振现象。

9.5.2 多自由系统受迫振动的一般理论

$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{F}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{F}e^{i\omega t}$，运动方程$\boldsymbol{K}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{Q}$。设特解$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{A}^*e^{i\omega t}$，那么$\boldsymbol{A}=(-\omega^2\boldsymbol{K}-i\omega\boldsymbol{C}+\boldsymbol{M})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{F}$。

10 哈密顿正则方程

物理系统的状态空间有两种描述，分析力学有两大理论体系，对应关系如下：

	拉格朗日力学	哈密顿力学
状态空间	速度相空间 $\{q^a, \dot{q}^b\}$	相空间 $\{q^a, p_b\}$
理论体系	拉格朗日力学	哈密顿力学
基本量	拉氏量 L	哈氏量 H
基本方程	拉格朗日方程	哈密顿正则方程 泊松括号 哈密顿-雅可比方程
数学概念	位形流形的切丛	位形流形的余切丛

哈密顿力学有三种等价表述：哈密顿正则方程、泊松括号和哈密顿-雅可比方程。量子力学的三种形式：薛定谔方程、正则量子化和路径积分，其中薛定谔方程对应于哈密顿-雅可比方程，而正则量子化对应于泊松括号。

10.1 哈密顿量

欧拉-拉格朗日方程的等价形式$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}$。对于多自由度系统，定义能量函数$h=h(t,q^a,\dot{q}^a):=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a-L$，那么$\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$。注意到$p_a:=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$，故定义哈密顿量，简称哈氏量：$H=H(t,q^a,p_a):=p_a\dot{q}^a-L$，它满足$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$，如果拉氏量$L$不显含时间，则哈氏量守恒。

拉格朗日力学是速度相空间上的理论，相应的拉氏量是速度相空间上的函数，即$L=L(t,q^a,\dot{q}^a)$。哈密顿力学是相空间上的理论，相应的哈氏量应该是相空间上的函数，即$H=H(t,q^a,p_a)$，这可以从它的全微分证明。

10.2 勒让德变换

$L(t,q^a,\dot{q}^a)\to H(t,q^a,p_a)$，该变换将对广义速度的函数依赖被替换成了对广义动量的函数依赖，称为勒让德变换。

考虑s个变量$\{v^a\}$的函数，$L=L(v^a)=L(v^1,\cdots,v^s)$，新的变量$p_a\equiv\frac{\partial L}{\partial v^a}=p_a(q^b,v^b)$，在勒让德变换的语境下，$v^a$称作主动变量，$q^b$称为被动变量。

$p_a=p_a(q^b,v^b)$给出了$\{v^a\}$到$\{p_a\}$的映射$\{v^a\}\to\{p_a\}$，该映射可逆的充要条件是$\frac{\partial p_a}{\partial v^b}\equiv\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}$非退化，$\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}$称为$L$的黑塞矩阵。

（1）黑塞矩阵非退化，即$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}\right)\neq 0$，这样的$L$函数称为正规或非奇异。对于正规的$L$函数，映射$\{v^a\}\to\{p_a\}$可逆，原则上可以解出$v^a=v^a(p_b)$。

（2）黑塞矩阵退化，即$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}\right)=0$，这样的$L$函数称为奇异的。对于奇异的$L$函数，映射$\{v^a\}\to\{p_a\}$不可逆，只能解出一部分$v^a$。如果黑塞矩阵的秩为$r,r=rank\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}\right)$，那么可以解出$\{v^a\}$中的$r$个：$v^a=v^a(p_b;v^{r+1},\cdots,v^s)$，剩余的$s-r$个$v^{r+1},\cdots,v^s$无法解出，视为待定。

函数$L=L(v^a)$的勒让德变换定义为$H\equiv p_a v^a-L$，$p_a(v^b)$视为由$p_a=$

$p_a(q^b, v^b)$给出的v^b函数，那么H也可以视为v^a的函数，$H = H(p_a(v^b))$。H只是p_a的函数，即$H = H(p_a)$，那么有$\left(v^a - \frac{\partial H(p_b)}{\partial p_a}\right) dp_a = 0$。

对于正规的L，勒让德变换可逆，从此式中可以解出s个方程，从而完全解出s个v^a，即$v^a = \frac{\partial H(p_b)}{\partial p_a} \equiv v^a(p_b)$，正是$\{v^a\} \to \{p_a\}$的逆映射。

对于奇异的L，勒让德变换不可逆，即p_a不完全独立，存在约束。

勒让德变换的几何意义：考虑一条曲线$L(v)$，它的斜率为p，截距为$-H$，如果函数$L(v)$是严格凸的，那么p单调增加，p与v一一对应，$L = pv - H$，可以认为是无数条切线的包络线。

10.3 哈密顿正则方程

今后只考虑正规系统，即$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) \neq 0$。

“正则”暗含了模式分解的思想，即世界=∑系数×模式，现象的复杂性和无穷性只是来源于模式组合的方式，即模式分解中的“系数”。因为模式而不是系数才是本质，所以将这些模式挑选出来，标准化、规范化，唯一确定，谓之正则。

对哈氏量微分，利用欧拉-拉格朗日方程，有$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_a}$，这就是哈密顿正则方程。数学上它与欧拉-拉格朗日方程等价，只是前者为 2s 个一阶常微分方程，后者为 s 个二阶常微分方程。

注意到$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$。

10.4 相空间的变分原理

哈密顿正则方程也可以由最小作用量原理导出。

哈密顿力学中的演化是在相空间中进行的。相空间中，广义坐标和广义动量处于平等的位置，且互相独立。这时要求广义坐标和广义动量均在两端变分为 0。

根据勒让德变换$L = p_a\dot{q}^a - H(t, q^a, p_b)$，这时$\dot{q}^a = \dot{q}^a(q, p)$，最小作用量原理要求$\delta S[q^a, p_b] = \int dt\, \delta[p_a\dot{q}^a - H(t, q^a, p_b)] = 0$，称为修改的哈密顿原理，由此可以得到哈密顿正则方程。

相空间的变分原理和位形空间的最小作用量原理并不完全相同，前者的变分将受到更多的限制。但这样一来，拉氏量也就具有了差一个时间全导数$\frac{dF(q,p)}{dt}$的任意性。

10.5 相空间中的演化

当我们谈论速度相空间的时候，其中的广义速度不是任何东西的导数，其就是一个矢量，且是任意的。在速度相空间的语境下，广义坐标和广义速度完全独立，也不是时间的函数。但谈论时间的演化时，广义坐标和广义速度被视为时间的函数，不是所有速度相空间中的轨迹都对应某个真实的运动，只有满足$v^a = \frac{dq^a}{dt}$的轨迹才对应真实运动。位形空间中的轨迹必然诱导出速度相空间中的轨迹，$\{q^a\} \Rightarrow \{q^a, \dot{q}^b\}, \{q^a, \dot{q}^b\} \nRightarrow \{q^a\}$。所以，在时间演化意义上，广义速度并不独立，拉氏量是速度相空间的函数，但拉格朗日力学却建立在位形空间。

在哈密顿力学中，广义坐标与广义动量成对出现，互为共轭，所以p_a也称为q^a对应的共轭动量。对于一个自由度为 s 的系统，s 个广义坐标q^a和 s 个广义动量p_a张成 2s 维的相空间。哈密顿力学框架下，系统的演化时在相空间中进行的，与广义坐标和广义速度的关系不同，广义坐标与广义动量在任何情况下都独立且平等。

一个力学系统在任一时刻的力学状态可以用其相空间中的一个点表示，称为该力学系统在其相空间中的代表点。随着时间的演化，力学系统的代表点在相空间移动划出一条轨迹，称为相轨迹。相空间中的点代表系统完整的状态，从相空

间中一个给定的点出发，力学系统的相轨迹完全由其哈密顿正则方程所唯一确定，即相轨迹是永不相交的。

对于不含时系统，$\frac{\partial H}{\partial t}\equiv\frac{dH}{dt}=0, H=const$，而$H=H(q^a,p_b)=const$是 2s 维相空间中的 2s-1 维的超曲面，它意味着不含时系统的相轨迹在相空间中$H=const$的超曲面上。

10.6 劳斯方法

考虑 s 个自由度的系统，$\{q^a\}=\{q^1,\cdots,q^m;q^{m+1},\cdots,q^s\}$，可以定义$R:=\sum_{a=m+1}^{s}p_a\dot{q}^a-L$，它可以视为部分勒让德变换，称为劳斯函数。$R=R(t;q^1,\cdots,q^s;\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^m;p_{m+1},\cdots,p_s)$，可以证明$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t},\frac{\partial R}{\partial q^a}=-\frac{\partial L}{\partial q^a},\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^a}=-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\equiv-p_a,\frac{\partial R}{\partial p_a}=\dot{q}^a$，运动方程也分为两部分，前 m 个为拉格朗日方程，后面为哈密顿正则方程，只不过拉氏量和哈氏量都被换成了劳斯函数。

当存在循环坐标时，劳斯函数更方便。在拉格朗日力学框架中，如果某个广义坐标不出现在拉氏量中，被称为循环坐标或者可遗坐标。循环坐标相应的广义速度仍出现在拉氏量中，即$L=L(t;q^1,\cdots,q^{s-1};\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^s)$。拉氏量中不出现的广义坐标，也不会出现在哈氏量中，它对应的广义动量是常数，失去变量地位，记为$p_s=\alpha$，那么$H=H(t;q^1,\cdots,q^{s-1};p_1,\cdots,p_{s-1},\alpha)$，当然这不代表循环坐标本身不发生变化，$\alpha$是哈氏量的参量。

假设 s 个广义坐标中前 m 个出现在拉氏量，后面的是循环坐标，则可以按上述定义劳斯函数，只对循环坐标作勒让德变换，这样$R=R(t;q^1,\cdots,q^m;\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^m;\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s)$，这样运动方程分为非循环部分$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^a}-\frac{\partial R}{\partial q^a}=0$ 以及循环部分$\dot{q}^a=\frac{\partial R}{\partial \alpha_a},\dot{p}_a=0$。

11 泊松括号

哈密顿力学可以视为相空间上的几何学。

11.1 相空间的辛结构

哈密度正则方程对于广义坐标和广义动量不是完全对称的，它本质上源于相空间内禀反对称结构。

用$\{\xi^\alpha\}$统一表示广义坐标和广义动量，$\xi^\alpha = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q^a \\ p_b \end{pmatrix}$，$\{\xi^\alpha\}$理解为相空间的坐标。

哈氏量对相空间坐标ξ^α的导数$\partial_\alpha H := \frac{\partial H}{\partial \xi^\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q^{a'}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{b'}} \end{pmatrix}$，定义反对称矩阵$\omega^{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{s\times s} & \mathbf{1}_{s\times s} \\ -\mathbf{1}_{s\times s} & \mathbf{0}_{s\times s} \end{pmatrix}$，那么$\dot{\xi}^\alpha = \omega^{\alpha\beta}\partial_\beta H$。

逆矩阵$\omega_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{s\times s} & -\mathbf{1}_{s\times s} \\ \mathbf{1}_{s\times s} & \mathbf{0}_{s\times s} \end{pmatrix}$是反对称矩阵，称为辛形式。

辛形式及其逆满足：$\omega^{\alpha\beta} =- \omega^{\beta\alpha}, \omega_{\alpha\beta} =- \omega_{\beta\alpha}, \omega^{\alpha\rho}\omega_{\rho\beta} = \delta^\alpha{}_\beta, \omega_{\alpha\rho}\omega^{\rho\beta} = \delta_\alpha{}^\beta, \delta_{\rho\sigma}\omega^{\alpha\rho}\omega^{\beta\sigma} = \delta^{\alpha\beta}, \delta^{\sigma\rho}\omega_{\alpha\rho}\omega_{\beta\sigma} = \delta_{\alpha\beta}, det\, \omega^{\alpha\beta} = det\, \omega_{\alpha\beta} = 1$。

$\partial_\alpha H$是哈氏量在相空间中的梯度，哈密顿正则方程右边$\omega^{\alpha\beta}\partial_\beta H := X_H^\alpha$，称为哈密顿矢量场。哈密顿正则方程记为$\dot{\xi}^\alpha = X_H^\alpha$。

直观上，可以将位形流形理解成弯曲的空间。在位形流形上，最重要的一种几何结构即度规，即流形上的 2 阶对称张量场。设流行上坐标$\{q^a\}$，坐标基矢$\{dq^a\}$，于是$\boldsymbol{g} = g_{ab}dq^a \otimes dq^b$，$g_{ab}$即度规分量。

相空间也是一种流形。我们没有在相空间中定义度规。相反，相空间中最重要的几何结构是辛形式，即流形上的 2 阶反对称张量场。$\boldsymbol{\omega} = \omega_{ab}d\xi^a \otimes d\xi^b$，利用它反对称性质，$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\omega_{ab}d\xi^a \wedge d\xi^b$。

数学上，将配备有度规、即具有度规结构的流形称为黎曼流形。所以位形空间是黎曼流形。配备了辛形式、即具有辛结构的流形称为辛流形。所以，相空间是辛流形。

	拉格朗日力学	哈密顿力学
物理对象	位形空间	相空间
数学对象	流形	流形上的余切丛
基本结构	度规（对称）	辛形式（反对称）
流形类型	黎曼流形	辛流形

11.2 泊松括号

在通常的空间中，最重要的一种几何结构即是度规。利用度规可以定义距离，或者两个矢量A^a和B^b的内积，$A\cdot B:=g_{ab}A^aB^b\equiv g^{ab}A_aB_b$，即给出两个矢量，输出一个标量。

相空间中最重要的几何结构不是度规，而是辛形式。普通空间中的度规是对称的，而相空间中的辛形式是反对称的。但是辛形式可以起到和度规类似的作用。仿照内积定义$\omega^{\alpha\beta}A_\alpha B_\beta$，它的作用与内积一样。

如果相空间上中矢量A_α,B_β是相空间上标量函数f,g的梯度，即$A_\alpha=\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}\equiv\partial_\alpha f$，$B_\beta=\frac{\partial g}{\partial\xi^\beta}\equiv\partial_\beta g$，那么定义内积：$[f,g]:=\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial g}{\partial\xi^\beta}\equiv\omega^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\partial_\beta g$，称为标量$f,g$的泊松括号。

$$[f,g]=\frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial g}{\partial p_a}-\frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q^a}$$

泊松括号是相空间上最重要的代数结构。泊松括号有以下性质：

（1）反对称：$[f,g]=-[g,f]$，于是$[f,f]\equiv 0$。

（2）双线性：$[af+bg,cx+dy]=ac[f,x]+ad[f,y]+bc[g,x]+bd[g,y]$。

（3）莱布尼茨规则：$[fx,gy]=xy[f,g]+xg[f,y]+fy[x,g]+fg[x,y]$。泊

松括号是相空间上的求导运算。

（4）雅可比恒等式：$\big[f,[g,h]\big]+\big[g,[h,f]\big]+\big[h,[f,g]\big]=0, \big[[f,g],h\big]+\big[[g,h],f\big]+\big[[h,f],g\big]=0$

泊松括号可以被视为一种二元运算，在此意义上，可以将泊松括号也视为一种乘法，但雅可比恒等式意味着该乘法不满足结合律。

利用泊松括号的性质，任意两个已知函数的泊松括号都可以归结为基本的泊松括号$[\xi^\alpha,\cdot]$。由泊松括号的定义，$[\xi^\alpha,\cdot]=\omega^{\alpha\beta}\partial_\beta\cdot$。用$\{q^a,p_b\}$表示，即$[q^a,\cdot]=\frac{\partial\cdot}{\partial p_a},[p_a,\cdot]=-\frac{\partial\cdot}{\partial q^a}$。那么$\big[q^a,q^b\big]=0,[p_a,p_b]=0,[q^a,p_b]=\delta^a{}_b$，它们称为基本泊松括号，统一写成$\big[\xi^\alpha，\xi^\beta\big]=\omega^{\alpha\beta}$，即相空间坐标的泊松括号即辛形式。

11.3 力学量的演化

对于力学量$f=f(t,\xi^\alpha)$，那么根据哈密顿正则方程，$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]$。

任一力学量$f=f(t,\xi^\alpha)$为运动积分的充要条件是$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]=0$，如果$f$不显含时间，那么$\frac{df}{dt}=[f,H]=0$，即不显含时间的力学量$f$是运动积分的充要条件是其与哈氏量对易。

如果f,g是系统的两个运动积分，那么两者的泊松括号$[f,g]$也是运动积分，这就是泊松定理。

按照两个运动积分做泊松括号产生新运动积分的手续，最终将得到一个运动积分集合$\mathcal{C}:=\{C_1,\cdots,C_n\}$，运动积分的集合$\mathcal{C}$在泊松括号作用下是封闭的。

11.4 角动量的泊松括号

3 维欧式空间中，一个粒子相对于原点的角动量矢量定义为$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}$。

矢量内积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}:=\delta_{ij}A^iB^j\equiv A_jB^j\equiv A^iB_i$，矢量叉乘$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^i:=\epsilon^{ijk}A_jB_k$，那么$J^i=\epsilon^i{}_j{}^k x^j p_k$。

$$\epsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} \delta_i^1 & \delta_j^1 & \delta_k^1 \\ \delta_i^2 & \delta_j^2 & \delta_k^2 \\ \delta_i^3 & \delta_j^3 & \delta_k^3 \end{pmatrix}$$

ϵ_{ijk}的任意两个指标是反对称的，即对所有指标全反对称。

$$\epsilon_{ijm}\epsilon^{klm} = \delta_i^k\delta_j^l - \delta_i^l\delta_j^k$$

设标量函数$f = f(t, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})$，$[J^i, f] = 0$。

设$V^i = V^i(t, x^j, p_k)$是任意矢量，那么$[J^i, V^j] = \epsilon^{ij}{}_k V^k$。

在中心势场讨论中，已知守恒量为总能量E和角动量J^i。对于$V(r) =-\frac{\alpha}{r}$形式的中心势场，存在独立守恒量拉普拉斯-龙格-楞次矢量，即LRL矢量$A^i:= \epsilon^i{}_{jk}p^jJ^k - \alpha\frac{m}{r}x^i$，它可以转化为$A^i(t, x^j, p_k)$，它是守恒量，且$\left[A^i，A^j\right] =- 2mH\epsilon^{ij}{}_kJ^k$。

角动量的泊松括号$\left[J^i，J^j\right] = \epsilon^{ij}{}_kJ^k$反映了系统的 SO(3)对称性，即 3 维空间转动不变性。所有中心势场系统，都有 SO(3)对称性。对于$-\frac{\alpha}{r}$形式的特殊场，对称性被提升了，LRL矢量守恒反映了 SO(4)对称性。

11.5 南部括号

将共轭变量推广至$\chi^\alpha \equiv \{q, p, r\}$，这样相空间变成了奇数维。相应的泊松括号推广为南部括号$[f, g, h] = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial f}{\partial\chi^\alpha}\frac{\partial g}{\partial\chi^\beta}\frac{\partial h}{\partial\chi^\gamma}$。

南部括号有性质：（1）反对称：$[f, g, h] =- [g, f, h] = [g, h, f]$；（2）莱布尼兹规则；（3）“雅可比”恒等式。

泊松括号视为南部括号在$h \to r$的特殊情况。

哈密顿力学中力学量演化由力学量和哈氏量的泊松括号决定，相应地，现在力学量的演化由南部括号决定给，所以就需要两个“哈氏量”H和G：是$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H, G]$。

基于南部括号的力学体系也被称作南部力学。

12 正则变换

12.1 相空间坐标变换

任意的相空间坐标变换下，哈密顿正则方程的形式是变化的。存在一类特殊的相空间坐标变换，使得变换下哈密顿方程形式不变。这样的相空间坐标变换，即正则变换。

12.2 转动

正则变换就是相空间中的转动。

12.2.1 欧式空间中的转动

考虑平直的 s 维欧式空间，度规δ_{ab}，定义内积括号$\langle f,g\rangle_q := \delta^{ab}\frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial g}{\partial q^b} \equiv \delta^{ab}\partial_a f\partial_b g$。

考虑坐标变换$q^a \to Q^a(t,q^b)$，那么$\langle f,g\rangle_q = \left(\delta^{ab}\frac{\partial Q^c}{\partial q^a}\frac{\partial Q^d}{\partial q^b}\right)\frac{\partial f}{\partial Q^c}\frac{\partial g}{\partial Q^d}$。在任意坐标变换下，$\delta^{ab} \to \delta^{ab}\frac{\partial Q^c}{\partial q^a}\frac{\partial Q^d}{\partial q^b}$，$\langle f,g\rangle_q \neq \langle f,g\rangle_Q$。

但是总存在一类特殊的坐标变换$q^a \to Q^a(t,q^b)$，使得$\delta^{ab}\frac{\partial Q^c}{\partial q^a}\frac{\partial Q^d}{\partial q^b} = \delta^{ab}$，即$\langle Q^a,Q^b\rangle_q = \delta^{ab}$。满足$\delta^{cd}\frac{\partial Q^a}{\partial q^c}\frac{\partial Q^b}{\partial q^d} \equiv \delta^{ab}, \delta_{cd}\frac{\partial Q^c}{\partial q^a}\frac{\partial Q^d}{\partial q^b} = \delta_{ab}$的坐标变换称作转动。变换下度规形式不变也被称作保度规结构，即转动是保度规结构的坐标变换。

坐标变换的雅可比矩阵定义为${R_b}^a := \frac{\partial Q^a}{\partial q^b}$。转动定义为$\delta^{cd}{R_c}^a{R_d}^b = \delta^{ab}, \delta_{cd}{R_a}^c{R_b}^d = \delta_{ab}$，矩阵形式为$\boldsymbol{R^T I R} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{R I R^T} = \boldsymbol{I}$。$\boldsymbol{R}$是正交矩阵，即正交矩阵描述欧氏空间中的转动。

正交矩阵的行列式$det\,\boldsymbol{R} = \pm 1$，意味着转动不改变面积、体积等。

欧氏空间的转动是线性变换。

对于 2 维平面上的转动，令$det\,\boldsymbol{R} = 1$，得$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$\theta = 0$ 时是恒等变换，令它在恒等变换附近展开，保留一阶项，$\boldsymbol{R}(\theta) = \boldsymbol{I} + \theta\boldsymbol{X}$，称为无穷

小转动变换。定义$\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$为无穷小转动变换的生成元。可以验证，$\boldsymbol{R}(\theta) = exp(\theta\boldsymbol{X})$，即有限转动是生成元的指数映射。

12.2.2 闵氏时空中的转动

闵氏时空中如果作任意坐标变换$x^\mu \to X^\mu(x^\nu)$，那么$\langle f,g\rangle := \left(\eta^{\mu\nu}\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial f}{\partial X^\rho}\frac{\partial g}{\partial X^\sigma}$，$\eta^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}$。

闵氏时空也存在一类特殊的坐标变换，使得度规形式不变。这就是洛伦兹变换，它是闵氏时空中保度规结构的坐标变换，可以说是闵氏时空中的转动。

定义${\Lambda_\nu}^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}$，闵氏度规形式不变要求$\eta^{\rho\sigma}{\Lambda_\rho}^\mu{\Lambda_\sigma}^\nu = \eta^{\mu\nu}, \eta_{\rho\sigma}{\Lambda_\mu}^\rho{\Lambda_\nu}^\sigma = \eta_{\mu\nu}$，矩阵形式为$\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\eta}^{-1}, \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}^T = \boldsymbol{\eta}$。

洛伦兹变换是线性变换，行列式$det\,\boldsymbol{\Lambda} = \pm 1$。

12.3 正则变换

12.3.1 相空间中的转动

考虑相空间中的任意坐标变换$\xi^\alpha \to \Xi^\alpha(t,\xi^\beta)$，泊松括号变为$[f,g]_\xi = \left(\omega^{\rho\sigma}\frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial \Xi^\beta}{\partial \xi^\sigma}\right)\frac{\partial f}{\partial \Xi^\alpha}\frac{\partial g}{\partial \Xi^\beta}$。经过任意的坐标变换，辛形式变化为$\omega^{\alpha\beta} \to \omega^{\rho\sigma}\frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial \Xi^\beta}{\partial \xi^\sigma}$。

总存在一类特殊的相空间坐标变换，使得变换前后辛形式不变，即$\omega^{\rho\sigma}\frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial \Xi^\beta}{\partial \xi^\sigma} = \omega^{\alpha\beta}, \omega_{\rho\sigma}\frac{\partial \Xi^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \Xi^\sigma}{\partial \xi^\beta} = \omega_{\alpha\beta}$。满足这样条件的相空间坐标变换即所谓正则变换。变换下辛形式不变有时也被称作保辛结构，可以说正则变换是保辛结构的相空间坐标变换。条件第一式即$\left[\Xi^\alpha,\Xi^\beta\right] = \omega^{\alpha\beta}$，正则变换等价于要求基本泊松括号是不变的。

定义${M_\beta}^\alpha := \frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \xi^\beta}$，那么正则条件写为$\omega^{\rho\sigma}{M_\rho}^\alpha{M_\sigma}^\beta = \omega^{\alpha\beta}, \omega_{\rho\sigma}{M_\alpha}^\rho{M_\beta}^\sigma = \omega_{\alpha\beta}$，矩阵形式$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{\omega}^{-1}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega}^{-1}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{\omega}$。$\boldsymbol{\omega}$是辛矩阵。

正则变换一般是非线性变换，$\Xi^\alpha(t,\xi^\beta)$一般是ξ^β的非线性函数。

保辛结构、保泊松括号、保哈密顿正则方程三种说法是等价的，它们分别从几何、代数和微分方程的角度给出正则变换的条件。

12.3.2 点变换是正则变换

点变换是位形空间中坐标变换的另一种说法，即$q^a \to Q^a(t, q^b)$，要求逆变换$q^a = q^a(t, Q^b)$存在。

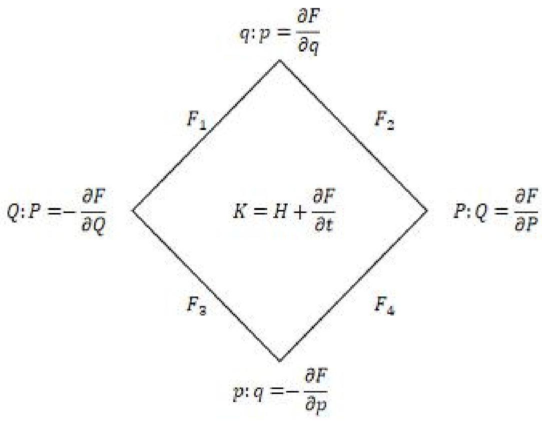
点变换必然诱导出广义动量的变换，$\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{Q}^b} = \frac{\partial q^a}{\partial Q^b}$，拉氏量在点变换下是不变的，变换后的广义动量$P_a = p_b \frac{\partial q^b}{\partial Q^a}$。总之点变换$q^a \to Q^a(t, q^b)$诱导出相空间坐标变换$\{q^a, p_b\} \to \left\{Q^a(t, q^b), p_a \frac{\partial q^a}{\partial Q^b}\right\}$，它是一种正则变换。

12.4 生成函数

在实际应用中，更多的是通过所谓生成函数方法来得到正则变换的具体表达式。生成函数方法基于的是正则变换保哈密顿正则方程不变的性质。

相空间坐标$\{q^a, p_b\}$描述哈氏量为$H = H(t, q^a, p_b)$，哈密顿正则方程为$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \dot{p}^a = -\frac{\partial H}{\partial q_a}$。经过正则变换，新的相空间坐标为$\{Q^a, P_b\}$，必定有$\dot{Q}^a = \frac{\partial K}{\partial P_a}, \dot{P}^a = -\frac{\partial K}{\partial Q_a}$，$K = K(t, Q^a, P_b)$是变换后的哈氏量。

根据变分原理，$p_a \dot{q}^a - H(t, q^a, p_b) = c[P_a \dot{Q}^a - K(t, Q^a, P_b)] + \frac{dF}{dt}$。常数$c$可以通过标度变换移除，不妨设$c = 1$，这时$p_a \dot{q}^a - H(t, q^a, p_b) = P_a \dot{Q}^a - K(t, Q^a, P_b) + \frac{dF}{dt}$，改写成微分形式，即$dF = p_a dq^a - P_a dQ^a + [K(t, Q^a, P_b) - H(t, q^a, p_b)]dt$，它是生成函数方法的基本出发点。$F = F(t, q^a, Q^a)$，且$\frac{\partial F}{\partial q^a} = p_a, \frac{\partial F}{\partial Q^a} = -P_a, \frac{\partial F}{\partial t} = K(t, Q^a, P_b) - H(t, q^a, p_b)$。只要给出一个函数$F = F(t, q^a, Q^a)$，就可以得到完整的正则变换关系，这样的函数称作正则变换的生成函数。



这 4 种生成函数只是基本类型。实际中可以有混合类型。

12.5 单参数正则变换

正则变换可能包含很多参数。考虑正则变换只依赖于某一个连续参数。即考虑一个相空间坐标变换$\xi^\alpha \to \Xi^\alpha(\lambda;\xi)$，假设$\Xi^\alpha(0;\xi) \equiv \xi^\alpha$，于是可以在恒等变换附近做泰勒展开：$\Xi^\alpha(\lambda;\xi) = \xi^\alpha + X_1^\alpha(\xi)d\lambda + \cdots$。

保留到$d\lambda$的线性阶：$\xi^\alpha \to \Xi^\alpha(\lambda;\xi) = \xi^\alpha + X^\alpha(\xi)d\lambda + O(\lambda^2)$。根据正则变换定义，要求$\omega^{\rho\beta}\frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^\rho} = \omega^{\rho\alpha}\frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^\rho}$。当$X^\alpha$为某个标量函数的梯度，即$X^\alpha = \omega^{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}$时，条件可以满足。总之，$\xi^\alpha \to \Xi^\alpha = \xi^\alpha + d\lambda\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}$在$d\lambda$的线性阶是正则变换，称为无穷小正则变换。$G$称为无穷小正则变换的生成函数，是相空间上的标量函数。而$X_G^\alpha := \omega^{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\beta} \equiv \omega^{\alpha\beta}\partial_\beta G$称作无穷小正则变换的生成元，是相空间上的矢量场。写成泊松括号的形式，$\xi^\alpha \to \Xi^\alpha = \xi^\alpha + d\lambda\left[\xi^\beta, G\right]$。

用新的坐标描述同一个点的观点是被动观点，将同一相空间上一个点变换到另一个点的观点为主动观点。在主动观点下，无穷小正则变换将相空间中的一个点变换到相邻的点，进而划出一条连续的曲线$\xi^\alpha(\lambda)$，曲线上任一点都有$\frac{d\xi^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = [\xi^\alpha, G]$。给一个相空间上的标量函数$G$，就存在一个单参数的正则变换，在相空间中划出光滑曲线，称为相流或哈密顿流。相流的切线方向就是X_G^α，它也称为

哈密顿矢量场。当$G=H$，相空间中时间演化即是一种正则变换，生成元是哈密顿矢量场$X_H^\alpha=[\xi^\alpha,H]$。

考虑由G生成的某个无穷小正则变换，在这个变换下，哈氏量变化为$\delta H=\delta\lambda[H,G]$。如果这个变换是一个对称性，那么$\frac{dG}{dt}=[H,G]=0$，即如果$G$是某个对称性，则$G$必守恒，如果$G$守恒，则其必是某个对称性的正则变换的生成函数。

12.6 正则不变量与刘维尔定理

在哈密顿力学框架下，真正有意义的是正则不变量，即在正则变换下不变的量。

除了哈密顿正则方程和泊松括号，相空间的体元也是正则不变量。考虑一个 n 维流形，坐标为$\{x^a\}$，所谓体元，定义为 n 维流形上的 n-形式$dV:=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\frac{1}{n!}\epsilon_{a_1\cdots a_n}dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_n}$，使用另外一个坐标系和雅可比行列式可证坐标变换下，$\widetilde{dV}=det\left(\frac{\partial y^b}{\partial x^a}\right)dV$。

由于相空间中的演化即是一种正则变换，相空间中的某个区域，随着时间演化，虽然形状可能发生变化，但是体积不变，即相流像是不可压缩的流体，这就是刘维尔定理。

相空间中的点代表系统某个确定的状态，于是可以考虑系统处于相空间某点的概率密度$dP=\rho(t,q,p)dV$，假设系统的粒子数是守恒的，则$\int\rho(t,q,p)dV=N$。相空间体元守恒意味着概率密度守恒，即$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+[\rho,H]=0$，这就是刘维尔方程。

如果概率密度是不显含时间，这样的密度分布即平衡分布，$[\rho,H]=0$。满足该条件的概率密度最简单的形式是$\rho=\rho(H)$，最著名的粒子就是玻尔兹曼分布$\rho=e^{-\frac{H}{kT}}$。

12.7 三种空间：对比与总结

13 哈密顿-雅可比理论

13.1 哈密顿-雅可比方程

令$K=0$，取第 2 类生成函数$F \to F_2(t,q^a,P_a)$，要求做正则变换后，新的坐标和动量都是常数，即$\{Q^a,P_b\} \equiv \{\beta^a,\alpha_b\}=const$，于是$F_2(t,q^a,\alpha_b):=S(t,q^a;\alpha_b) \equiv S(t,q^a)$，称为哈密顿主函数，那么$H+\frac{\partial S}{\partial t}=0$。

如果系统的哈氏量不显含时间，那么它守恒，$H=E$，这时哈密顿主函数可以分离变量，$S(t,q^a) \equiv W(q^a)+V(t)$。那么$V=-Et+V_0$，$S \equiv W-Et$称为哈密顿特征函数，满足$H(q^a,\frac{\partial W}{\partial q^b})=E$。

13.2 经典作用量

给定初始t_0时刻的位形和之后t时刻的位形，那么两者之间有一条唯一的经典路径，它对应的作用量，即经典作用量，值为$S_{cl}:=\int_{t_0}^{t} dt\, L(t,q_{cl}^a(t),\dot{q}_{cl}^b(t))$。经典作用量是端点$t$和位形的函数，$S_{cl}=S_{cl}(t,q^a(t))$。

哈密顿主函数就是经典作用量。

13.3 从经典力学到量子力学

在量子力学中，系统的状态$|\psi\rangle$是希尔伯特空间（定义了内积的完备的无穷维线性空间）中的矢量，力学量变成了希尔伯特空间中的算符$f \to \hat{f}$。希尔伯特空间的基称为表象。在位置表象中，$\hat{q}=q,\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial q},\hat{H}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$。

13.3.1 泊松括号与对易子

基本泊松括号$[q,p]=1$的量子力学对应即正则对易子，也称正则对易关系$[\hat{q},\hat{p}]:=\hat{q}\hat{p}-\hat{p}\hat{q}=i\hbar$。对于任何两个力学量，都可以定义量子力学的对易子$[\hat{f},\hat{g}]:=\hat{f}\hat{g}-\hat{g}\hat{f}$，它满足泊松括号的所有性质。实际上，哈密顿力学中所有用

泊松括号表示的式子，在量子力学中都有一模一样的对应，唯一的区别是泊松括号被换成了对易子$[f,g] \to -\frac{i}{\hbar}[\hat{f},\hat{g}]$，这种操作称为正则量子化。

13.3.2 哈密顿-雅可比方程与薛定谔方程

单个粒子的哈氏量$H=\frac{p^2}{2m}+V(q)$，量子力学中所有力学量都成了算符，于是$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{q})$，作用在态上，有$\hat{H}|\psi(t)\rangle=\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{q})\right)|\psi\varphi(t)\rangle$，这就是薛定谔方程。在坐标表象下，$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,q)}{\partial q^2}+V(q)\psi(t,q)=i\hbar\frac{\partial\psi(t,q)}{\partial t}$，这是坐标表象中的薛定谔方程，即波函数$\psi(t,q)$满足的波动方程。

$\psi(t,q)$是复的，总可以写成$\psi(t,q)=\psi_0(t,q)e^{\frac{i}{\hbar}S(t,q)}$，$S(t,q)$即波函数的相位。当考虑经典极限$\hbar\to 0$，或者$\hbar\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}\right|\ll\left|\frac{\partial S}{\partial q}\right|$时，薛定谔方程为$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+V+\frac{\partial S}{\partial t}=0$，即哈密顿-雅可比方程。

德布罗意提出的波粒二象性，即粒子也具有波动性，且波长$\lambda=2\pi\frac{\hbar}{p}$，经典极限就是指粒子的德布罗意波长比任何特征长度都要短，$\lambda\to 0$，即在经典极限下，粒子的波动性消失，粒子真正成为点粒子。

由波函数的定义，$S=\frac{\hbar}{i}ln\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)=-i\hbar ln\Psi$，这里$\Psi=\frac{\psi}{\psi_0}=e^{\frac{i}{\hbar}S(t,q)}$，即波函数中纯相位部分，代入哈密顿-雅可比方程，将之作为拉氏量，对作用量求变分，得到的欧拉-拉格朗日方程即为薛定谔方程。

粗略的说，薛定谔方程的经典极限是哈密顿-雅可比方程；而把哈密顿-雅可比方程当拉氏量，对应的欧拉-拉格朗日方程又是薛定谔方程。

14 可积系统

14.1 作用量-角变量

在某些情况——特别是当系统做周期运动的时候，选择作用量-角变量更方便。其核心思想是，经过正则变换后的新哈氏量不依赖于角度变量，而只是作用

量变量的函数。

考虑 s 个自由度，如果有一种变换$\{q^a, p_b\} \to \{\theta^a, I_b\}$，使得$K = K(I_a)$，这样的系统称为可积的，相应的$\{\theta^a, I_b\}$称为作用量-角变量。

$\{\theta^a, I_b\}$应满足基本泊松括号，反过来，如果能找到 s 个运动积分I_a，且互相对易，那么系统必然可积，这就是可积系统的刘维尔定理。

在作用-角变量描述的相空间中，完全可积系统的轨迹是$I_a = const$的超曲面，对于一维简谐振子，其轨迹就是一维圆周。对于自由度为 s 的完全可积系统，这个超曲面就是$S^1 \times \cdots \times S^1$，称为不变环面。

14.2 作用量-角变量的一般理论

对于保守系统，即$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$。

14.2.1 单自由度

哈氏量$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$，假设势能有底，$q$限制在$q_1 \le q \le q_2$，这时运动必是周期的。

假设找到了$\{\theta, I\}$, $H = K(I) = E$, 新的哈密顿正则方程$\dot{\theta} = \omega = \frac{\partial E}{\partial I}$, 即$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{\omega}$。由于$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) = E$，$p = \sqrt{2m}\sqrt{E - V(q)}$，根据哈密顿正则方程，$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(q)}$, 于是$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}}$。积分得到$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}} = \frac{\partial}{\partial E}\int dq\, p$，那么猜测$I = \frac{1}{2\pi}\int dq\, p$。

证明如下，取正则变换的第一类生成函数$F_1(q, \theta)$，$dF = pdq - Id\theta$，积分可得$\int dq\, p = 2\pi I$，即$I = \frac{1}{2\pi}\int dq\, p$。$I$正是轨道面积，是能量$E$的函数，而频率由$\omega = \frac{\partial E}{\partial I}$给出。

14.2.2 多自由度

对于多自由度系统，一般没有作用量-角变量，哈密顿-雅可比方程可以完全

被分离变量时是特殊的，这意味着正则变换具有形式$p_a = \frac{\partial W_{(a)}(q^a;\alpha^1,\cdots,\alpha^s)}{\partial q^a} \equiv p_a(q^a;\alpha^1,\cdots,\alpha^s)$，这时$I_a := \frac{1}{2\pi}\int p_a dq^a \equiv \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial W_{(a)}(q^a;\alpha^1,\cdots,\alpha^s)}{\partial q^a} dq^a$，显然$I_a = I_a(\alpha^1,\cdots,\alpha^s)$是个常数。

开普勒问题中，$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\phi)^2} = H$，在作用-角坐标下，哈氏量对$I_r$和$I_\phi$是对称的，这意味着轨道周期是闭合的。

14.3 绝热不变量

对于单自由度系统，势能为$V(q,\lambda)$，这里λ是某个联系参数。

如果λ是个常数，那么作用量变量I时运动积分。如果$\lambda = \lambda(t)$，那么能量不再守恒，$\dot{E} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\Big|_E \dot{\lambda} \neq 0$，但是$I = \frac{1}{2\pi}\int dq\, p$仍然近似不变。这时，$I = \frac{1}{2\pi}\int \sqrt{2m}\sqrt{E(t) - V(q,\lambda(t))}dq = I(E,\lambda)$，于是$\dot{I} = \frac{\partial I(E,\lambda)}{\partial E}\dot{E} + \frac{\partial I(E,\lambda)}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$，显然$\dot{I}$不守恒。由于$\frac{\partial I(E,\lambda)}{\partial E} = \frac{1}{\omega(\lambda)} = \frac{T(\lambda)}{2\pi}$，且$\frac{\partial I(E,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \lambda}\int dq\, p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial p}{\partial \lambda}|_E \frac{\partial H}{\partial p}|_\lambda dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}|_p dt$，最终$\dot{I} = \frac{T(\lambda)}{2\pi}\dot{E} - \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}|_p dt\right)\dot{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{2\pi}\left[T(\lambda)\frac{\partial H}{\partial \lambda}\Big|_E - \left(\int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}|_p dt\right)\right]$。

任何一个物理量$Q(t,\lambda)$在一个周期内的平均值定义为$\langle Q(\lambda)\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T Q(t,\lambda)dt$，当$\lambda(t)$变化很慢时，可将$\lambda$在一个周期内视为常数。所以$\langle \dot{I}\rangle = 0$，也就是说在$\lambda(t)$变化很慢，即$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \ll \frac{1}{T}$时，作用量变量$I(E,\lambda)$在时间上的平均值是个常数。

对于单自由度系统，如果系统的运动是周期的，那么其轨道是相空间中一条闭合的曲线。所以作用量变量 I 正好就是闭合曲线所包围的面积。而刘维尔定理告诉我们，相空间中的体元（这里就是曲线所围的有限面积）随时间演化不变。

15 转动理论

15.1 欧式空间中的转动

从坐标变换的角度，转动是保度规的坐标变换。

考虑$D-$维欧式空间，直角坐标为$\{q^a\}=\{q^1,\cdots,q^D\}$，线元$ds^2=\delta_{ab}dq^adq^b$，$\delta_{ab}$是$D-$维欧式空间的度规。

考虑坐标变换$q^a\to Q^a=Q^a(q^b)\Leftrightarrow Q^a\to q^a=q^a(Q^a)$,这种一般的坐标变换被称为广义的坐标变换。在广义坐标变换下，线元值保持不变，但是形式改变，$ds^2=\delta_{cd}\frac{\partial q^c}{\partial Q^a}\frac{\partial q^d}{\partial Q^b}dQ^adQ^b$，度规变成$\delta_{ab}\to\delta_{cd}\frac{\partial q^c}{\partial Q^a}\frac{\partial q^d}{\partial Q^b}$。

有一类特殊的坐标变换，使得$\delta^{cd}\frac{\partial Q^a}{\partial q^c}\frac{\partial Q^b}{\partial q^d}=\delta^{ab},\delta_{cd}\frac{\partial Q^c}{\partial q^a}\frac{\partial Q^d}{\partial q^b}=\delta_{ab}$，这类坐标变换称为转动，即转动是保度规形式不变的坐标变换。

欧式空间的转动是线性变换。

$Q^a(q^b)$是q^b的线性函数，可以写成$Q^a=R^a{}_bq^b+c^a$，c^a对应平移，$R^a{}_bq^b$对应转动，是个与坐标无关的矩阵。转动矩阵满足$\boldsymbol{R^TR}=\boldsymbol{RR^T}=\mathbf{1}$，所以转动的坐标变换矩阵是正交矩阵，有时也将转动称为正交变换。转动变换用矩阵简写成$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Rq},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{R^TQ}$。

$det\,\boldsymbol{R}=\pm1$，即欧式空间的转动不改变体积、面积等。

15.1.2 转动是线性空间中的基矢变换

线性空间的正交归一基矢变换即线性空间中的转动。

15.1.3 转动的主动与被动观点

认为转动是基矢在转，矢量不变的为被动观点；认为矢量在转，基矢不变的为主动观点。

15.2 转动群及其李代数

15.2.1 转动群

满足转动条件的 D 阶矩阵不止一个，两个正交矩阵的乘积也是正交矩阵。

代数上，D 阶正交矩阵的集合在矩阵乘法意义下构成群，称为正交群或者转动群。$det\,\boldsymbol{R}=1$ 的转动称为正常转动，对应群称为特殊正交群，记作$SO(D)$。几何上，D 阶正交矩阵的集合是一个空间，它一般不是线性的，称为流形。这个流形分为 $det\,\boldsymbol{R}=\pm 1$ 互不相通的两块，其中一块为$SO(D)$。正交矩阵的集合是具有群结构的流形，或者可以被视为流形的群，称为李群，相应流形称为李群流形。

D 阶矩阵本来有D^2个分量，但是正交条件给出$\frac{1}{2}D(D+1)$个约束，所以 D 阶正交阵有$\frac{1}{2}D(D-1)$个自由度，即 D 维欧式空间的转动有$\frac{1}{2}D(D-1)$个自由度。等价地，D 维特殊正交群$SO(D)$是$\frac{1}{2}D(D-1)$维的流形，即$dim\,SO(D)=\frac{1}{2}D(D-1)$。

15.2.2 无穷小转动

对于转动来说，线性化的背景，即最简单的转动，就是恒等变换。在恒等变换附近的线性近似即无穷小转动，$R^a{}_b=\delta^a{}_b+\Phi^a{}_b$。根据正交矩阵的定义，$\Phi_{ab}=-\Phi_{ba}$，即$\Phi_{ab}$必须是反对称的，它有$\frac{1}{2}D(D-1)$个自由度。

总之，给定反对称矩阵$\boldsymbol{\Phi}$，那么$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Phi}$对应一个无穷小转动。

12.2.3 生成元

记$\mathscr{so}(D):=\{$所有D阶实反对称矩阵的集合$\}$，它是一个矩阵加法意义下的线性空间。$dim\,\mathscr{so}(D)=\frac{1}{2}D(D-1)$，即作为线性空间的$\mathscr{so}(D)$和作为李群流形的$SO(D)$维数相等。

选取$\mathscr{so}(D)$的基：$\{\boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn}\}$，总共有$\frac{1}{2}D(D-1)$个独立基，令$\boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn}=-\boldsymbol{\mathcal{J}}^{nm}$，每一个基都是一个 D 阶实反对称矩阵，即属于$\mathscr{so}(D)$。

$$(\boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn})_{ab}=\delta_a^m\delta_b^n-\delta_b^m\delta_a^n$$

物理上更喜欢厄密矩阵，即$\boldsymbol{M}^{+}\equiv(\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{T}})^{*}=\boldsymbol{M}$，*表示共轭。引入对应的厄密矩阵$\boldsymbol{J}^{mn}=\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn}$，厄密性要求$\lambda^{*}=-\lambda$，习惯上取$\lambda=-i$，于是$(\boldsymbol{J}^{mn})_{ab}=-$

$i(\mathcal{J}^{mn})_{ab} =- i(\delta_a^m\delta_b^n - \delta_b^m\delta_a^n)$。

于是，任意一个 D 阶实反对称矩阵$\boldsymbol{\Phi}$都可以表示成基的线性组合$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{D}\theta_{mn}\boldsymbol{\mathcal{J}}^{mn} \equiv \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{D}i\theta_{mn}\boldsymbol{J}^{mn}$，这里的实系数$\theta_{mn}$对于指标$m,n$也是反对称的。

任意一个 D 阶实反对称矩阵$\boldsymbol{\Phi}$都对应一个无穷小转动，所以厄密矩阵$\{\boldsymbol{J}^{mn}\}$又称作转动的生成元，对应的系数θ_{mn}即无穷小参数。

15.2.4 李代数

定义矩阵对易子$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}] := \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$。$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]^T =- [\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{B}^T]$，如果$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是（反）对称矩阵，那么$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]^T =- [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$，即（反）对称矩阵的对易子是反对称矩阵。

对生成元$\{\boldsymbol{J}^{mn}\}$进行重新标记为$\{\boldsymbol{J}^{a}\}$，每一个生成元都是反对称矩阵，所以$\left[\boldsymbol{J}^a,\boldsymbol{J}^b\right]$也是反对称矩阵，所以$\left[\boldsymbol{J}^a,\boldsymbol{J}^b\right] = if^{ab}{}_{c}\boldsymbol{J}^c$，生成元的对易关系称为转动群的李代数，也被记作$\mathfrak{so}(D)$，这里的系数$f^{ab}{}_{c}$称为结构常数。

2 维转动的生成元$\boldsymbol{J}^{12} =- i\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，它的李代数$[\boldsymbol{J}^{12},\boldsymbol{J}^{12}] = 0$，是平庸的。

3 维转动的生成元记为$\boldsymbol{J}^i := \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}\boldsymbol{J}^{jk}$，于是$\boldsymbol{J}^1 =- i\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{J}^2 =- i\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{J}^3 =- i\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，它的李代数$[\boldsymbol{J}^i,\boldsymbol{J}^j] = i\epsilon^{ij}{}_{k}\boldsymbol{J}^k$，它的结构常数就是$\epsilon^{ij}{}_{k}$。

4 维转动有 6 个生成元，记为$\boldsymbol{J}^i = \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}\boldsymbol{J}^{jk}, \boldsymbol{K}^i = \boldsymbol{J}^{i4}$，它的李代数$\mathfrak{so}(4)$: $[\boldsymbol{J}^i,\boldsymbol{J}^j] = i\epsilon^{ij}{}_{k}\boldsymbol{J}^k, [\boldsymbol{J}^i,\boldsymbol{K}^j] = i\epsilon^{ij}{}_{k}\boldsymbol{K}^k, [\boldsymbol{K}^i,\boldsymbol{K}^j] = i\epsilon^{ij}{}_{k}\boldsymbol{J}^k$。它表明，三个$\boldsymbol{J}^i$构成封闭的$\mathfrak{so}(3)$代数，是$\mathfrak{so}(4)$的子代数，$\boldsymbol{K}^j$在$\boldsymbol{J}^i$作用下，像一个 3 维矢量，$\mathfrak{so}(4)$是封闭的。

15.3 有限转动与指数映射

15.3.1 D=2

考虑 D=2，无穷小转动$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{I}+i\theta\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I}+\theta\boldsymbol{\mathcal{J}},\boldsymbol{\mathcal{J}}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$\theta$是某个无穷小参数，即无穷小转角。

对于有限的转角ϕ，它可以通过无限次无穷小转动得到。有限转动的变换矩阵$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\phi}{n}\boldsymbol{\mathcal{J}}\right)^n=e^{\phi\boldsymbol{\mathcal{J}}}$，右边是矩阵指数，定义为$e^{i\phi\boldsymbol{J}}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^n\boldsymbol{\mathcal{J}}^n$，代入生成元的表达式，得到$R(\phi)=e^{\phi\boldsymbol{\mathcal{J}}}=\begin{pmatrix}cos\phi & sin\phi\\ -sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}$。

另外，$e^{\phi\boldsymbol{\mathcal{J}}}=cos\phi\boldsymbol{I}+sin\phi\boldsymbol{\mathcal{J}}$，它可以与欧拉公式作比较，容易验证$\boldsymbol{\mathcal{J}}^2=-\boldsymbol{I}$。

用数学语言来说，$\boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{\mathcal{J}}$张成了一个 2 维线性空间，这个空间中的矢量满足复数的一切性质，复共轭对应矩阵转置，复数的模则对应矩阵行列式，换句话说，。$\boldsymbol{I}$和$\boldsymbol{\mathcal{J}}$构成的线性空间和复平面同构。

15.3.2 D=3

对于 D=3，3 维无穷小转动$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{I}+i\theta_1\boldsymbol{J}^1+i\theta_2\boldsymbol{J}^2+i\theta_3\boldsymbol{J}^3$，这里$\{\theta_i\}$是无穷小转角，$\{\boldsymbol{J}^i\}$是 3 维转动的生成元。一个一般的 3 维有限转动$R(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=e^{i\phi_1\boldsymbol{J}^1+i\phi_2\boldsymbol{J}^2+i\phi_3\boldsymbol{J}^3}$。

实际应用更多的是三个基本的有限转动矩阵。

绕 x 轴转ϕ角：$\boldsymbol{R}_1(\phi)=exp(i\phi\boldsymbol{J}^1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\phi & sin\phi\\ 0 & -sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}$；绕 y 轴转$\phi$角：$\boldsymbol{R}_2(\phi)=exp(i\phi\boldsymbol{J}^2)=\begin{pmatrix}cos\phi & 0 & -sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ sin\phi & 0 & cos\phi\end{pmatrix}$；绕 z 轴转$\phi$角：$\boldsymbol{R}_3(\phi)=exp(i\phi\boldsymbol{J}^3)=\begin{pmatrix}cos\phi & sin\phi & 0\\ -sin\phi & cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

$\{\boldsymbol{J}^i\}$并不是唯一满足 3 为转动群的李代群的矩阵，另一种重要的矩阵是泡利矩阵$\boldsymbol{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，它是厄密的，即$\boldsymbol{\sigma}_i^+=\boldsymbol{\sigma}_i$，满足对易关系$[\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j]=2i\epsilon^{ij}{}_k\boldsymbol{\sigma}_k$，它与$\mathscr{so}(3)$代数的$[\boldsymbol{J}^i,\boldsymbol{J}^j]=i\epsilon^{ij}{}_k\boldsymbol{J}^k$有同样的形式。

此外，泡利矩阵还满足（1）反对易关系：$\{\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}$；（2）对合：$\boldsymbol{\sigma}_i^2 = \boldsymbol{I}$；（3）行列式：$det\,\boldsymbol{\sigma}_i = -1$；（4）无迹：$tr\,\boldsymbol{\sigma}_i = 0$；

对于 3 维空间中的一个矢量$\boldsymbol{x}$，可以定义$\boldsymbol{P} = x^i\boldsymbol{\sigma_i}$，$\boldsymbol{P}$是一个无迹的厄密矩阵。$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{x}$一一对应，可以将厄密矩阵$\boldsymbol{P}$视为$\boldsymbol{x}$的等价物。

$det\,\boldsymbol{P} = -|\boldsymbol{x}|^2$，如果 3 维转动矩阵$\boldsymbol{R}$也有一个 2*2 矩阵对应物$\boldsymbol{U}$，那么当它作用于$\boldsymbol{P}$上时，应保持$det\,\boldsymbol{P}$不变。即$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{Rx}$，$\boldsymbol{R}$是正交矩阵，相应的，$\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{UPU}^+$，$\boldsymbol{U}$是幺正矩阵。显然，$det\,\boldsymbol{U} = \pm 1$。其中$det\,\boldsymbol{U} = 1$ 的幺正矩阵称为特殊幺正矩阵。定义$SU(2) = \{$所有的$det\,\boldsymbol{U} = 1$ 的幺正矩阵集合$\}$，这一集合在矩阵乘法下构成群，称为特殊幺正群。

$SU(2)$矩阵的常用表示为$\boldsymbol{U} = x^0\boldsymbol{I} + i\boldsymbol{P}$，它就是哈密顿发明的四元数。

2 维平面上的转动$SO(2)$和$SU(1)$存在对应，对应模长为 1 的复数；3 维转动$SO(3)$和$SU(2)$存在对应，对应行列式为 1 的四元数。

15.3.3 指数映射

D 维的有限转动表示成$\boldsymbol{R}(\phi_a) = exp\left(\sum_{a=1}^{\frac{1}{2}D(D-1)} i\phi_a\boldsymbol{J}^a\right)$，所以粗略地说，李群$= exp($李代数$)$，即李群是李代数的指数映射（但是李代数的指数映射并不能覆盖整个李群）。

$\frac{1}{2}D(D-1)$个参数ϕ_a即李群流形的参数化，即李群流形的坐标。

从几何的角度，作为线性空间的李代数$\mathscr{so}(D)$是李群流形$SO(D)$在单位元附近的线性近似，或者说线性化，李代数$\mathscr{so}(D)$是李群流形$SO(D)$在单位元的切空间，李群的单位元即李代数的零元，它就像 $1 = e^0$。

15.4 角速度

15.4.1 角速度矩阵

时空中每一点可以建立正交归一基矢$e_A=\{e_0,\cdots\}$，基矢对坐标的导数$\partial_\mu e_A=\omega_\mu{}^B{}_A e_B$，$\omega_\mu{}^B{}_A$称为联络系数。取$e_0$为类时，$e_a=\{e_1,\cdots\}$为类空，则有$\partial_t e_a=\omega_t{}^B{}_a e_B=\omega_t{}^0{}_a e_0+\omega_t{}^b{}_a e_b$，在非相对论极限下，$\omega_t{}^b{}_a\approx\Omega_a{}^b$。$\frac{de_a(t)}{dt}=\Omega_a{}^b e_b(t)$，$\Omega_a{}^b$反对称。

15.4.2 角速度矩阵在基矢变换下的性质

两组基矢满足$\tilde{e}_a(t)=R_a{}^b(t)e_b(t)$，那么$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\boldsymbol{R}^T+\boldsymbol{R\Omega R}^T$，角速度矩阵不是基矢变换下的张量。

15.4.3 角速度矩阵与转动矩阵的关系

考虑两组基，一组无旋转，一组旋转，$\tilde{e}_a(t)=R_a{}^b(t)e_b(t)$，$R_a{}^b$就是旋转基相对于无旋基的转动矩阵，那么$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\boldsymbol{R}^T$。

对于 D=2，$R(\phi)=\begin{pmatrix}cos\phi & sin\phi\\ -sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}$，那么$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\phi}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$。

15.4.4 速度和加速度

给定基矢$\{e_a(t)\}$，那么$\boldsymbol{q}(t)=q^a(t)e_a(t)$，速度$\boldsymbol{v}(t)=v^a(t)e_a(t),v^a(t)=\frac{dq^a}{dt}-\Omega^a{}_b q^b\neq\frac{dq^a}{dt}$。

定义协变时间导数$\frac{D}{dt}:=\frac{d}{dt}-\boldsymbol{\Omega}$，它应视为列矩阵$\frac{D}{dt}\equiv\delta^a{}_b\frac{d}{dt}-\Omega^a{}_b$，作用于任一矢量的分量，那么$v^a=\frac{Dq^a}{dt}$，即当基矢存在转动时，矢量时间导数的分量不是分量的普通时间导数，而是分量的协变时间导数。

同理，$a^a=\frac{Dv^a}{dt}=(\frac{D}{dt})^2q^a$。

15.4.5 D=3

角速度矩阵总可以写成$\Omega_{ij}=\begin{pmatrix}0 & \omega^3 & -\omega^2\\ -\omega^3 & 0 & \omega^1\\ \omega^2 & -\omega^1 & 0\end{pmatrix}$，$\omega^1,\omega^2,\omega^3$是三个独立分量。基于 3 维空间的巧合，将角速度矩阵的分量重新解释为$\boldsymbol{\omega}(t)=\omega^i e_i(t)$，即角速度矢量。$\omega^i:=\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Omega_{jk}$，或者$\Omega_{ij}=\epsilon_{ijk}\omega^k$。$\boldsymbol{\omega}$并不是一个真矢量，只是角

速度矩阵的 3 维对应，称为赝矢量。

D=3 时，基矢满足$e_i \times e_j = \epsilon_{ij}{}^k e_k$，于是$\frac{de_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times e_i$。

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v_0} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q})$。

15.4.6 有限转动与角速度

$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(t)\boldsymbol{R}(t)$，这是关于$\boldsymbol{R}$的一阶矩阵微分方程。

取级数形式的解$\boldsymbol{R} \equiv \sum_{n=0} \boldsymbol{R}_{(n)}$，那么$\frac{d}{dt}\boldsymbol{R}_{(i)} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{R}_{(i)}$，即$\boldsymbol{R}(t) = \mathcal{T}\{exp(\int dt' \,\boldsymbol{\Omega}(t'))\}$，$\mathcal{T}$表示编时，即对指数做泰勒展开时，所有的矩阵必须按照时间由晚到早的顺序排序。

16 刚体

16.1 刚体

刚体可以看成是有无穷多个粒子所构成的一个粒子系。其特点是任意两个粒子之间的距离都不变。

3 维空间中的刚体具有 6 个自由度，其中 3 个是刚体上某点的平动自由度，3 个是刚体整体绕这个点的定点转动自由度。

描述刚体，通常选择一个固定在刚体上、随着刚体一起运动的坐标系（基矢），称为本体系$\{e_i\}$，相应地，地面上固定不动的坐标系称为空间系$\{\bar{e}_i\}$。

刚体的概念与相对论不兼容，此外，刚体的刚性意味着运动状态的改变瞬间传递，也与相对论的光速上限矛盾，即刚体概念本质上是非相对论性的。

16.2 欧拉角

3 维空间中的转动有三个自由度，根据欧拉定理，3 维空间中的任意转动可以表示为绕三个不同方向轴转动的叠加。设空间系固定不动，本体系随刚体一起转动。取变换$e_i = R_i{}^j \bar{e}_j$，它可以通过$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{(3)}(\boldsymbol{\phi}_3)\boldsymbol{R}^{(2)}(\boldsymbol{\phi}_2)\boldsymbol{R}^{(1)}(\boldsymbol{\phi}_1)$得到，它们

取三种基本的有限转动矩阵，共有 12 种，分两类。

•3 次涉及 3 个不同的基本转动，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_k, i\neq j\neq k$，其中的参数统称为 Tait-Bryan 角。

•3 次涉及 2 个不同的基本转动，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i, i\neq j$，其中的参数称为欧拉角。

上述参数也可统称为欧拉角。

常见欧拉角选择是$\boldsymbol{R}_3(\psi)\boldsymbol{R}_2(\theta)\boldsymbol{R}_3(\phi)$，具体而言，绕$\bar{e}_3$轴转$\phi$角，绕$e'_1$轴转$\theta$角，绕$e''_3$轴转$\psi$角。

矩 阵 指 数 关 系 ： $e^{\boldsymbol{X}}e^{\boldsymbol{Y}}=e^{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}+\frac{1}{2}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]+\frac{1}{12}\big[\boldsymbol{X},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\big]-\frac{1}{12}\big[\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\big]+\cdots$。

$\boldsymbol{\Omega}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\boldsymbol{R}^T=\begin{pmatrix}0 & \omega^3 & -\omega^2\\ -\omega^3 & 0 & \omega^1\\ \omega^2 & -\omega^1 & 0\end{pmatrix}$，其中$\omega^i$可以用欧拉角表示出。

16.3 转动惯量

考虑 N 个粒子组成的刚体，它定点转动时的动能$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha(\delta_{ij}(r_\alpha)^2-(r_\alpha)_i(r_\alpha)_j)\omega^i\omega^j$，即$T=\frac{1}{2}I_{ij}\omega^i\omega^j$，其中$I_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha(\delta_{ij}(r_\alpha)^2-(r_\alpha)_i(r_\alpha)_j)$称为转动惯量。

对于 3 维空间中的任意一个矢量$\mathbf{A}$,定义投影张量$\prod_{ij}=\delta_{ij}-\hat{A}_i\hat{A}_j=\delta_{ij}-\frac{A_iA_j}{|\boldsymbol{A}|^2}$,它将任意一个矢量投影到与$\boldsymbol{A}$垂直的平面上。$\prod_{ij}A^j=0$，$A^j$是$\prod_{ij}$的零本征矢，$det\prod_{ij}=0$。

惯量张量可以写成$I_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha r_\alpha^2(\prod_\alpha)_{ij}, (\prod_\alpha)_{ij}=\delta_{ij}-(\hat{r}_\alpha)_i(\hat{r}_\alpha)_j$,写成矩阵形式，$I_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha\begin{pmatrix}y_\alpha^2+z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha\\ -y_\alpha x_\alpha & x_\alpha^2+z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha\\ -x_\alpha z_\alpha & -z_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2+y_\alpha^2\end{pmatrix}$。转动张量是对称的，它与时间无关。对于连续分布的质量，$I_{ij}=\int d^3x\,\rho(\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -yx & x^2+z^2 & -yz\\ -zx & -zy & x^2+y^2\end{pmatrix}$。

由于转动惯量是实对称矩阵，所以存在正交矩阵$\mathbf{R}$，使得$\boldsymbol{RIR}^T = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}$，即选择合适的本体系，使得转动惯量是对角化的，这样的本体系称为惯量主轴，本征值I_i称为主轴转动惯量。

通常，刚体相对于不同两点的惯量张量的关系比较复杂。一个特例是其中一点是刚体的质心 C。这时，如果另一点 P 相对质心的位矢为$\boldsymbol{q}$，那么$(I_P)_{ij} = (I_C)_{ij} + M(q^2\delta_{ij} - q_i q_j)$，这就是平行轴定理。

刚体对于某点的角动量$J_i = I_{ij}\omega^j$。

16.4 欧拉方程

忽略质心运动，刚体不受外部作用时，角动量守恒，$\boldsymbol{J} = const$。

当空间系为惯量主轴，有欧拉方程$\epsilon_{ijk}(I_i\dot{\omega}_i - \omega^j\omega^k(I_j - I_k)) = 0$。

力学（朗道）

1.运动方程

1.广义坐标

唯一地确定系统所需独立变量的数目称为系统的自由度（完整系统），N 个质点组成的系统自由度为 3N。

对于 s 个自由度的系统，可以完全刻画其位置的任意 s 个变量$q_1,\cdots,q_s$称为该系统的广义坐标，其导数$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$称为广义速度。

加速度与坐标、速度的关系式称为运动方程。对于函数$q(t)$来说，这个关系式是二阶微分方程，原则上，将其积分可以求出$q(t)$，进而确定系统的运动轨迹。

2.最小作用量原理

每一个力学系统都可以用一个确定的函数$L(q_1,\cdots,q_s,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s,t)$或简记为$L(q,\dot{q},t)$所表征，并且要求$S=\int_1^2 L(q,\dot{q},t)dt$取最小值（在小区段取最小，整轨迹取极值）。函数$L$称为给定系统的拉格朗日函数，积分$S$称为作用量。

最小作用量原理可以写成$\delta S=\delta\int_1^2 L(q,\dot{q},t)dt=0$，即$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$。

从数学来看，运动方程是包含 s 个未知函数$q_i(t)$的 s 个二阶微分方程组，这个方程组通解包含 2s 个任意常数，为了确定常数，必须知道系统初始状态。

设力学系统由 A 和 B 两部分组成，如果每个部分都是封闭的，拉格朗日函数分别为L_A和L_B。在两个部分相距足够远以至于他们的相互作用可以忽略的极限情况下，系统的拉格朗日函数趋向于极限：$lim\, L=L_A+L_B$，它表明每一独立部分的运动方程不可能包含与另一部分相关的物理量。

如果两个拉格朗日函数$L'(q,\dot{q},t)$和$L(q,\dot{q},t)$相差了某个坐标和事件的函数$f(q,t)$对时间的全导数，即$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$，那么$\delta S'=\delta S=0$，

微分方程相同。

3 伽利略相对性原理

为了研究力学现象必须选择参考系。

相对于任意参考系，空间是非均匀且各向异性的，一般情况下任意参考系中事件也是非均匀的。

似乎总存在某种参考系，空间相对于它是均匀的各向同性的，时间相对于它是均匀的。这样的参考系称为惯性参考系。特别地，在这样的惯性参考系中，在某个时刻静止的自由物体将永远保持静止。

在惯性参考系中，拉格朗日函数不显含质点矢径和时间，且与速度方向无关，那么L只能是速度$\boldsymbol{v}^2 = v^2$的函数，即$L = L(v^2)$，拉格朗日方程可写成$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = const$，由于$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$只是速度的函数，故$\boldsymbol{v} = const$。所以在惯性参考系中质点任何自由运动的速度都不改变，这就是惯性定律。

如果在已有的惯性系中再引进一个惯性参考系，它相对于第一个惯性参考系作匀速直线运动，则相对这两个参考系的自由运动规律完全相同：自由运动仍是匀速直线运动。

存在无穷多个惯性参考系，他们相互作匀速直线运动，在这些参考系中时间和空间性质相同，力学规律也相同，这个结论称为伽利略相对性原理。它表明，不存在比其他参考系更优先选取的一个“绝对”惯性参考系。

设有两个不同的参考系 K 和 K’，其中 K’相对 K 以速度$\boldsymbol{V}$运动，同一个质点相对这两个参考系的坐标$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{r}'$满足关系式$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t$，我们认为这两个参考系中时间是相同的，即$t = t'$。绝对时间假设是经典力学的基础之一。上述变换称为伽利略变换。伽利略相对性原理可以表述为：力学运动方程在伽利略变换下具有

不变性。

4.自由质点的拉格朗日函数

如果惯性参考系 K 以无穷小速度$\boldsymbol{\varepsilon}$相对另一参考系 K'运动，则有$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\varepsilon}$。拉格朗日函数$L(v^2)$经过伽利略变换后得到$L'$,由于在所有惯性系中运动方程都相同，那么$L'=L(v'^2)=L(v^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\varepsilon^2)=L(v^2)+2\frac{\partial L}{\partial v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}$，只有当$\frac{\partial L}{\partial v^2}$与速度无关第二项才为时间和坐标的全导数，那么$L=\frac{m}{2}v^2$。

出现在自由运动质点的拉格朗日函数中的物理量m称为质点的质量。对于无相互作用的质点组成的自由质点系，有$L=\sum\frac{m_a}{2}v_a^2$。

质量不可能是负值。

由于$v^2=\frac{dl^2}{dt^2}$，故只需求出弧长微元的平方就可以得到拉格朗日函数。

5 质点系的拉格朗日函数

质点之间有相互作用，但不受外部任何物体作用，称为封闭质点系。那么$L=\sum\frac{m_a}{2}v_a^2-U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots)$。$U$称为质点系的势能，而$T=\sum\frac{m_a}{2}v_a^2$称为质点系的动能。

势能仅依赖于所有指点在同一时刻的位置，那么相互作用瞬间传递。

时间是各向同性的，遵循经典力学定律的所有运动都是可逆的。

势能可以增加任意常数而不改变运动方程，选择常数的自然方法是当无限增大质点间距离时势能趋向于零。

如果描述运动不是用笛卡尔坐标而是任意广义坐标q_i，则需变换$x_a=f_a(q_1,\cdots,q_s),\dot{x_a}=\sum\frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q_k}$，那么$L=\frac{1}{2}\sum_{l,k}a_{lk}(q)\dot{q}_l\dot{q}_k-U(q)$。

对于非封闭质点系 A，它与运动完全已知的质点系 B 相互作用，这种情况下称 A 在给定外场中运动，$L_A=T_A(q_A,\dot{q_A})-U(q_A,t)$。

均匀外场中势能可以写成$U=-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$。

2 守恒定律

6 能量

在力学系统运动过程中，描述状态的 2s 个变量$q_i, \dot{q}_i$随时间变化，但是存在关于它们的某个函数在运动过程中保持恒定，且仅由初始条件决定，这样的函数称为运动积分。

对于具有 s 个自由度的封闭力学系统，独立的运动积分数等于 2s-1。

一些运动积分源自时间和空间的均匀性和各向同性这样的基本性质，由它们表示的量是守恒量，具有可加性。

由于时间均匀性，封闭系统（或位于定常外场）拉格朗日函数不显含时间，因此有守恒量$E=\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i}-L$在封闭系统运动中保持不变，与$L$具有线性关系，具有可加性。能量守恒的系统也称为保守系统。

封闭（或位于定常外场）系统的拉格朗日函数$L=T(q,\dot{q})-U(q)$，T是速度的二次函数，由齐次函数的欧拉定理，$\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i}=2T$，那么$E=T(q,\dot{q})+U(q)$，用笛卡尔坐标写成$L=\sum \frac{m_a}{2} v_a^2+U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots)$，即系统的能量可以表示为依赖于速度的动能依赖于质点坐标的势能。

7 动量

根据空间均匀性，封闭力学系统在空间中整体平移时性质不变。作变换$\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{\varepsilon}$，则$\delta L=\sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot \delta \boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}=0$，即$\sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}=\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=0$，封闭力学系统的矢量$\boldsymbol{P}=\sum \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}$在运动中保持不变，矢量$\boldsymbol{P}$称为系统的动量。用笛卡尔坐标系，$\boldsymbol{P}=\sum m_a \boldsymbol{v}_a$。动量具有可加性。

8 质心

封闭系统的动量对于不同的参考系有不同的值，如果参考系 K'相对参考系 K

以速度$\boldsymbol{V}$运动，那么$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{V}\sum m_a$。特别地，一定存在使得总动量为零的参考系 K’，此时$\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_a}=\frac{\sum m_a \boldsymbol{v}_a}{\sum m_a}$。如果在给定参考系下力学系统的总动量为零，则称系统相对该参考系静止。记$\mu=\sum m_a$，系统整体运动的矢径$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_a \boldsymbol{r}_a}{\sum m_a}$，该点称为系统的质心。

封闭系统动量守恒定律表述为：系统的质心作匀速直线运动。

整体静止的力学系统的能量称为内能E_{int}，以速度$\boldsymbol{V}$作整体运动的系统的能量可以写成$E=\frac{\mu V^2}{2}+E_{int}$。不同参考系中，$E=E'+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P}'+\frac{\mu V^2}{2}$。

9 角动量

各向同性意味着封闭系统整体在空间任意转动时，力学性质保持不变。引入无穷小转动矢量$\delta\boldsymbol{\varphi}$，那么$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}$，则$\delta L=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\sum\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a=0$，即$\frac{d}{dt}\sum\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a=0$，那么矢量$\boldsymbol{M}=\sum\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a$保持不变，称为角动量，具有可加性。

可加的运动积分只有七个：能量、动量分量、角动量分量。

在系统静止时，角动量不依赖于坐标原点的选择。不同参考系中，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}'+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$，也就是说，力学系统的角动量由其相对静止的参考系中的“内禀角动量”和整体运动角动量$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$构成。

10 力学相似性

势能函数满足条件$U=(\alpha\boldsymbol{r_1},\cdots,\alpha\boldsymbol{r_n})=\alpha^k U(\boldsymbol{r_1},\cdots,\boldsymbol{r_n})$，引入变换，$\boldsymbol{r_i}\to\alpha\boldsymbol{r_i},t\to\beta t$，那么所有速度变为$\alpha/\beta$倍，动能变为$\alpha^2/\beta^2$倍，势能变为$\alpha^k$倍。如果$\alpha^2/\beta^2=\alpha^k$，即$\beta=\alpha^{1-k/2}$，那么结果是拉格朗日函数乘以常数$\alpha^k$，运动方程表示不变。

所有质点的坐标改变相同的倍数，意味着运动轨迹几何上相似。如果系统的势能是笛卡尔坐标的 k 次齐次函数，那么由运动方程可以得到一系列几何上相似

的不同轨迹，运动时间之比$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}$，除时间外，相应时刻不同运动轨迹相应点的任何力学量之比是$\frac{l'}{l}$的幂。

如果力学系统在有限空间中运动，势能是坐标的齐次函数，则动能和势能的时间平均值之间存在非常简单的关系，这个关系称为位力定理。

根据欧拉齐次函数定理，$\sum\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a}\boldsymbol{v}_a=2T$。

函数$\bar{f}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt$，若$f(t)$是某个有界函数$F(t)$对时间的全导数，则$\bar{f}=0$。

假设系统在有限空间以有限速度运动，那么 $2\bar{T}=\sum\overline{\boldsymbol{r_a}\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r_a}}}$，右式也称系统位力。如果势能是所有矢径$\boldsymbol{r_a}$的 k 次齐次函数，则根据欧拉定理，$2\bar{T}=k\bar{U}$，于是$\bar{U}=\frac{2}{k+2}E,\bar{T}=\frac{k}{k+2}E$。

3 运动方程的积分

11 一维运动

定常外部条件下，拉格朗日函数一般形式为$L=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-U(q)$，特别地，笛卡尔坐标下$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U(x)$。由能量守恒定律，$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)=E$，那么$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+C$。

由于动能是正值，运动只能发生在$E>U(x)$下，故$E=U(x)$确定了运动边界，称为转折点。如果运动由两个转折点，则运动发生于有限区域，称为有界运动，如果运动区域不受限制或只有单侧限制，称为无界运动。

一维有界运动时振动，质点在两个边界之间往复运动，运动周期$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$，它表明了振动周期对于质点总能量的依赖关系。

12 根据振动周期确定势能

设势能$U(x)$存在极小值，定为 0，取极小值点为原点，则有$x_2(U)-x_1(U)=$

$\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$，如果$U(x)$关于$U$轴对称，那么不存在多值问题，$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$。

13 约化质量

两体问题中，相互作用的两个质点势能仅依赖于它们之间的距离，即矢径差，拉格朗日函数$L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$，令相对矢径$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$，将坐标原点置于质心，那么$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$。于是$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(r)$，其中$m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$称为约化质量。形式上拉格朗日函数等同于在外场$U(r)$中一个质点$m$的拉氏函数，外场关于坐标原点对称。

14 有心力场内的运动

如果质点势能只质点与某一固定点的距离有关，称外场为有心力场，作用力$F =-\frac{\partial U(r)}{\partial \boldsymbol{r}} =-\frac{dU}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$的大小只依赖于$r$，方向沿着矢径。

有心力场内的运动对场中心的角动量守恒，即$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = const$，意味着质点总是在垂直于$\boldsymbol{M}$的平面内运动。

采用极坐标，$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$。它有循环坐标$\varphi$，那么$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = const$，即角动量$M_z = M = mr^2\dot{\varphi} = const$，可以解释为掠面速度守恒（开普勒第二定律）——无限邻近的矢径与轨道微元围成的扇形面积为$\frac{1}{2}r^2d\varphi$，记为df，那么$M = 2m\dot{f}$。

由已知的两个运动积分，即能量和动量，可以得到$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$，故$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const$，那么$\varphi = \int \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - M^2/r^2}} + const$，这就是轨道方程。$\varphi$总是随$t$单点变化。

径向运动可以看成在某个场中的一维运动，有效势能为$U_{eff} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$，其中$\frac{M^2}{2mr^2}$称为离心势能。$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E$给出了运动区域边界到力心的距离，此

时$\dot{r}=0$，表示轨道转折点，$r(t)$在这个点从增加变为减小或相反。

如果r的变化区域$r \geq r_{min}$的限制，则运动是无界的，即质点从无穷远处来又回到无穷远去。

如果r的变化区域有两个边界r_{min}和r_{max}，则运动是有界的，轨道完全位于r_{min}和r_{max}确定的环形区域内。然而，这并不表明轨道是封闭曲线。在r从r_{max}至r_{min}再回r_{max}这一时间间隔内矢径转过的角度$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}$。轨道封闭的条件是这个转角等于 2π的有理数倍。

对于任意形式$U(r)$，角$\Delta\varphi$不等于 2π的有理数倍。因此一般情况下作有界运动的质点的轨道不封闭，轨道最终覆盖两个有界圆环的整个环形区域。

只有两种类型的有心力场，其中的一切有界运动的轨道是封闭的，这两种场的势能与$\frac{1}{r}$或者r^2成正比。

$t(r)$和$\varphi(r)$方程中被积函数在转折点改变符号。如果角φ从指向转折点的矢径方向算起，则轨道在该转折点两侧的每个部分，对同一r值，其区别在于φ的符号不同，也就是说轨道相对于$\varphi = 0$ 的线是对称的，即整个轨道可以通过来回重复相同的轨道段得到。

当$r \to 0$ 时，离心势能像$\frac{1}{r^2}$一样趋向无穷大，因此质点通常不可能通过场中心。只有当$r \to 0$ 时势能能够足够快地趋向于$-\infty$，质点才可能坠落到场的中心。r可能趋于零的条件是$r^2U(r)|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m}$，即$U(r)$应该或者像$-\frac{\alpha}{r^2}(\alpha > \frac{M^2}{2m})$，或者正比于$-\frac{1}{r^n}(n>2)$的方式趋向于$-\infty$。

15 开普勒问题

势能与r成反比，因而力与r^2成反比的有心力场是非常重要的一类有心力场。

设$U=-\alpha/r$，有效势能$U_{eff}=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$曲线如图，当$r \to 0$，$U_{eff}$趋于$+\infty$，

当$r \to \infty$，U_{eff}从负方向趋于 0。当$r = \frac{M^2}{m\alpha}$时取极小值$\left(U_{eff}\right)_{min} =- \frac{m\alpha^2}{2M^2}$。当$E > 0$时质点运动是无界的，$E < 0$ 时运动是有界的。

轨道形状$\varphi = arccos\frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/M^2}}$，引入$p = \frac{M^2}{m\alpha}, e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$，轨道方程写成$p/r = 1 + ecos\varphi$，这是焦点位于坐标原点的圆锥曲线方程，$2p$和$e$分别称为轨道的正焦弦和离心率。$\varphi = 0$ 处称为轨道近心点。

当$E < 0$ 时$e < 1$，即轨道是椭圆，半长轴$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$，半短轴$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$。

能量的最小可能值对应于$\left(U_{eff}\right)_{min}$，这时$e = 0$，椭圆变成圆。

由角动量守恒面积积分形式，$2mf = TM$。对于椭圆$f = \pi ab$，那么$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$。

当$E \geq 0$ 时运动是无界的。如果$E > 0$ 则偏心率$e > 0$，即轨道是原点为内焦点的双曲线，$a = \frac{\alpha}{2E}$是双曲线的半轴。

$E = 0$ 时，$e = 1$，质点沿着近心点距离$p/2$ 的抛物线运动。

对于椭圆轨道，以参数a和e描述，$t = \sqrt{\frac{m\alpha}{\alpha}}\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}}$，利用变换$r - a =- aecos\xi$，那么$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - esin\xi) + const$，最终可得$r = a(1 - ecos\xi), t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - esin\xi)$。参数$\xi$还可以表示出质点笛卡尔坐标，$x = a(cos\xi - e), y = a\sqrt{1 - e^2}sin\xi$，$\xi$从 0 至 2π。

对于双曲线轨道，$r = a(ecosh\xi - 1), t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esinh\xi - \xi), x = a(e - cosh\xi), y = a\sqrt{e^2 - 1}sinh\xi$，$\xi$从$-\infty$到$+\infty$。

相斥场中，势能$U = \frac{\alpha}{r}$，$U_{eff} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$，当$r$从 0 到∞变化时，它从+∞单调减少到零，质点能量只能是正的，运动总是无限的。轨道是双曲线$\frac{p}{r} =- 1 + ecos\varphi$，近心点距离$r_{min} = a(e + 1)$。轨道参数方程$r = a(ecosh\xi + 1), t =$

$\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(esinh\xi+\xi), x=a(e+cosh\xi), y=a\sqrt{e^2-1}sinh\xi$。

有心力场$U=\pm\frac{\alpha}{r}$中，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}+\frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r}=const$，守恒矢量的方向沿着长轴从焦点指向近心点，大小等于ae，这就是 LRL 矢量。

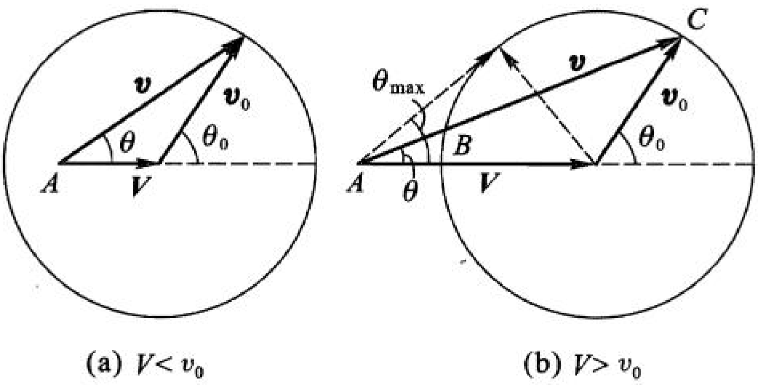
4 质点碰撞

16 质点分裂

动量守恒和能量守恒不依赖于质点间相互作用的具体形式。

对于质点自发分裂成两个组成部分的过程，选取质点分裂前静止的参考系，分裂后两质点的动量大小p_0可由能量守恒定律$E_{int}=E_{1int}+\frac{p_0^2}{2m_1}+E_{2int}+\frac{p_0^2}{2m_2}$确定。定义分裂能$\varepsilon=E_{int}-E_{1int}-E_{2int}$，这时有$\varepsilon=\frac{p_0^2}{2\mu}$，$\mu$为约化质量，两质点速度为$v_{10}=p_0/m_1, v_{20}=p_0/m_2$。

实验室参考系（L 系）不同于质心参考系（C 系），设分裂前质点以速度$\boldsymbol{V}$相对 L 系运动，$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v_0}$是分裂后其中一个质点分别相对于两系的速度，有$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v_0}$，那么$v^2+V^2-2vVcos\theta=v_0^2$，$\theta$是支点相对速度$\boldsymbol{V}$的方向偏离的角度。当$V<v_0$时，$\theta$可取任意值，当$V>v_0$时，$\sin\theta_{max}=\frac{v_0}{V}$。两系中偏离角有关系$tan\,\theta=\frac{v_0 sin\,\theta_0}{v_0 sin\,\theta_0+V}$，即$cos\,\theta_0=-\frac{V}{v_0}sin^2\theta\pm cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}sin^2\theta}$，当$V<v_0$时，取正号，当$V>v_0$时，有两解。



(a) $V<v_0$　　(b) $V>v_0$

对于多个相同质点的分裂，假设原始质点在空间中平均意义下各向同性。在

质心参考系中，在立体角dO_0内质点数比例$f(O_0)dO_0=dO_0/4\pi$，按照θ_0有分布$f(\theta_0)d\theta_0=\frac{1}{2}sin\theta_0 d\theta_0$。在实验室系中，有按照 T 的分布$f(T)dT=\frac{dT}{2mv_0V}, T_{min}=\frac{m}{2}(v_0-V)^2, T_{max}=\frac{m}{2}(v_0+V)^2$。

当质点分裂成多于两个部分时，动量守恒和能量守恒定律允许自然分裂后的质点速度和方向具有更大任意性。特别是，质心系中分裂后的质点能量不再有确定的值，虽然动能存在上限$(T_{10})_{max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon$。

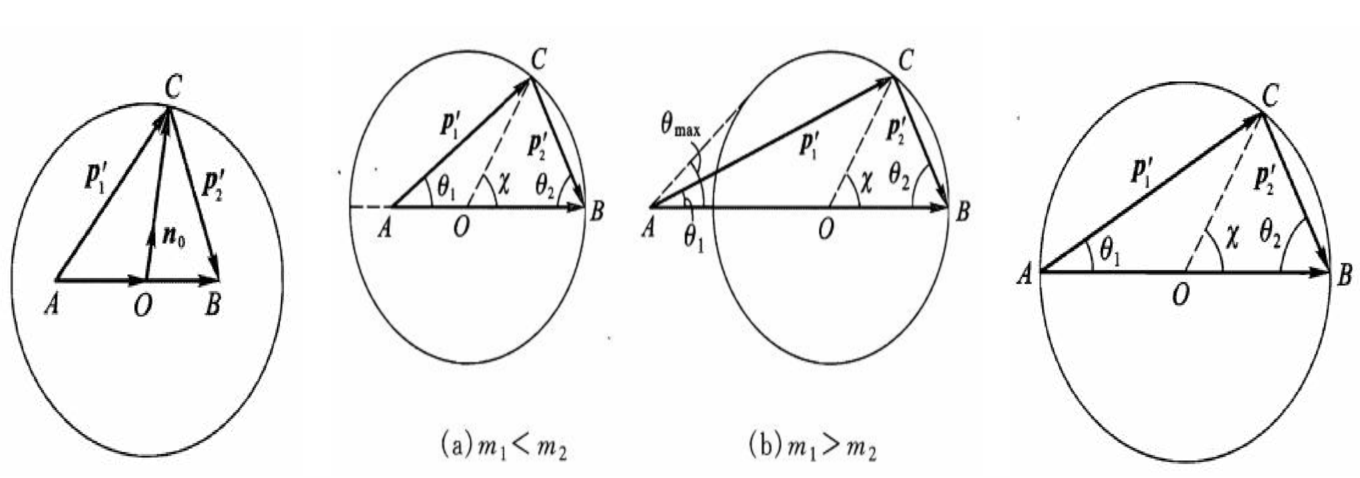
17 质点弹性碰撞

如果两个质点碰撞不改变它们的内部状态，则称为弹性碰撞。这时能量守恒中可以忽略内能。

碰撞前两质点在质心系（C 系）中速度为$\boldsymbol{v}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_{20}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}$，其中$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$。

质心系中碰撞转动了两质点的速度，速度方向保持相反，大小不变。以$\boldsymbol{n}_0$表示碰撞后m_1的速度方向矢量，则$\boldsymbol{v}'_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{v}'_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0$。在质心系需加上质心速度$\boldsymbol{V}$，两质点动量有$\boldsymbol{p}'_1=\mu v\boldsymbol{n}_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2), \boldsymbol{p}'_2=-\mu v\boldsymbol{n}_0+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)$。

确定了$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$，A,B 以及半径就确定了，C 可以在圆周上任何位置。



(a) $m_1<m_2$　(b) $m_1>m_2$

对于m_2静止的情况，B 在圆周上，如果$m_1<m_2$，则 A 在圆内，如果$m_1>m_2$，

则 A 在圆外。设θ_1,θ_2是碰撞后质点运动方向偏离撞击方向的角度，用χ表示圆心角，代表m_1在质心系的偏转角，那么有$tan\theta_1=\frac{m_2 sin\chi}{m_1+m_2 sin\chi},\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}$。用$\chi$表示碰撞后质点速度：$v'_1=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2cos\chi}}{m_1+m_2}v,v'_2=\frac{2m_1v}{m_1+m_2}sin\frac{\chi}{2}$。$\theta_1+\theta_2$是碰撞后两质点速度夹角，当$m_1<m_2$时大于$\frac{\pi}{2}$，当$m_1>m_2$时小于$\frac{\pi}{2}$。

当碰撞后两个质点沿着一条直线运动（正碰）时，相应有$\chi=\pi$，这时，$\boldsymbol{v}'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}$，此时$\boldsymbol{v}'_2$取到最大值，因此$m_2$获得了最大能量$E'_{2max}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1$，其中$E_1=\frac{m_1v_1^2}{2}$是运动质点的初始能量。

如果$m_1<m_2$，碰撞后第一个质点速度可以沿任意方向，如果$m_1>m_2$，则偏离方向不能超过最大值$\theta_{1max}=arcsin\frac{m_2}{m_1}$。

如果$m_1=m_2$，则$\theta_1=\frac{\chi}{2},\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2},v'_1=vcos\frac{\chi}{2},v'_2=vsin\frac{\chi}{2}$，两质点飞出方向垂直。

18 质点散射

要确定偏转角χ，必须求解相互作用具体规律的运动方程。

对于一个质量为m的质心在中心静止力场$U(r)$中的偏转问题，质点在有心力场中的轨道，相对于过中心和轨道近心点的直线对称。所以轨道的两条渐近线与该直线的夹角相同。如果记为φ_0，那么质点飞过中心附近产生的偏转角$\chi=|\pi-2\varphi_0|$。$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{(M/r^2)dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}$，$r_{min}$是 $2m[E-U(r)]-M^2/r^2$的根。

对于无界运动情况，引入质点在无穷远处速度v_∞和瞄准距离ρ来代替常数E和M。瞄准距离指中心到v_∞方向的垂直距离。于是$E=\frac{mv_\infty^2}{2},M=m\rho v_\infty$，那么$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{(\rho/r^2)dr}{\sqrt{1-\rho^2/r^2-2U/mv_\infty^2}}$，可以求出$\chi(\rho)$。

对于以相同速度v_∞飞过散射中心的全同质点数的散射，束内不同质点有不

同瞄准距离，以不同角度散射。用dN表示单位时间内偏转角在χ和$\chi+d\chi$之间散射质点数，为了刻画散射过程，引入比值$d\sigma=dN/n$，n是单位时间内通过质点数单位截面积上的质点数（设质点束在横截面上均匀）。$d\sigma$有面积量纲，称为有效散射截面。它完全由散射场决定。

假定χ与ρ一一对应。这样只有瞄准距离在$\rho(\chi)$和$\rho(\chi)+d\rho$之间的质点被散射到χ和$\chi+d\chi$之间，故$d\sigma=2\pi\rho d\rho=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$。通常$d\sigma$对应的是立体角微元$do=2\pi sin\chi d\chi$，因此$d\sigma=\frac{\rho(\chi)}{sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do$。

对于被初始静止的其他质点散射的实际问题，可以认为上式是质心系中本题的讨论。利用实验室系与质心系偏转角关系式可以得到入射质点束散射截面表达式和初始静止质点散射截面的表达式。

19 卢瑟福公式

令$U=\alpha/r$，那么$\varphi_0=arccos\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}$，即$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}cot^2\frac{\chi}{2}$。于是$d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}{sin^3\left(\frac{\chi}{2}\right)}d\chi$或$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{sin^4\left(\frac{\chi}{2}\right)}$，这就是卢瑟福公式。

对于初始静止质点，$d\sigma_2=\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{do_2}{cos^3\theta_2}$。如果$m_2\gg m_1$，则$\chi\approx\theta_1,m\approx m_1$，$d\sigma_1=\left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2\frac{do_1}{sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}$。如果$m_2=m_1$，则$\chi=2\theta_1$，$d\sigma_1=2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{cos\theta_1}{sin^4\theta_1}do_1$。如果两质点完全相同，则不能区分，$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{cos^4\theta}+\frac{1}{sin^4\theta}\right)cos\theta do$。

有效截面对损失能量ε有关系$d\sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{m_2v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$,$\varepsilon$取值从0至$\varepsilon_{max}=2m^2v_\infty^2/m_2$。

20 小角度散射

瞄准距离很大，场U很弱，因而χ很小的小角度散射的有效截面计算很简单，可以直接在实验室系计算，$\theta_1=-\frac{2\rho}{m_1v_\infty^2}\int_0^\infty\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$，实验室系中有效截面$d\sigma=\left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}do_1$。

5 微振动

21 一维自由振动

在稳定平衡位置附近的运动是力学系统的一种非常普遍的运动类型，称为微振动。

稳定平衡位置是指势能$U(q)$取极小值的位置，偏离位置会导致产生力$-dU/dq$，使系统返回平衡位置。用q_0表示广义坐标q在平衡位置的值。在偏离平衡位置很小的情况下，$U(q)-U(q_0)$按照$q-q_0$的幂次展开，保留第一个非零项。一般情况下，$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2, k=U''(q_0)>0$。假设$U(q_0)=0$，引入记号$x=q-q_0$表示坐标对平衡位置的偏离。于是$U(q)=\frac{k}{2}x^2$。

一个自由度系统的动能一般可以写成$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2$，同样的近似下$a(q)=a(q_0)$。引入记号$a(q_0)=m$，最后可以得到一维微振动系统的拉格朗日函数表达式$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2$。相应运动方程$m\ddot{x}+kx=0$，即$\ddot{x}+\omega^2x=0$，$\omega=\sqrt{k/m}$，通解为$x=acos(\omega t+\alpha)$。

系统在稳定平衡位置附近的运动是简谐振动$x=acos(\omega t+\alpha)$。a称为振动的振幅，$\omega t+\alpha$称为振动的相位，α是相位的初始值，ω称为振动的圆频率，简称频率。

频率是振动的基本特征量，不依赖运动初始条件，完全由力学系统本身性质决定。但是他与小振幅振动假设有关，在更高阶近似时没有该性质。从数学上看，它与势能是坐标的二次函数有关。

为振动系统的能量为$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$，能量与振幅平方成正比。

振动系统坐标对时间的关系可以写成$x=Re\{Ae^{i\omega t}\}, A=ae^{i\alpha}$称为复振幅，模

是振幅，幅角是初相位。

22 强迫振动

可变外力场作用下系统的振动，称为强迫振动。此时系统除了固有势能$\frac{k}{2}x^2$，还有与外力场作用相关的势能$U_e(x,t)$，展开得$U_e(x,t)\approx U_e(0,t)+x\frac{\partial U_e}{\partial x}\Big|_{x=0}$，第一项只是时间的函数，可以从拉格朗日函数中略去，第二项中$-\frac{\partial U_e}{\partial x}$是外力，作用在处在平衡位置的系统上，是时间的给定函数，记为$F(t)$。系统的拉格朗日函数为$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2+xF(t)$，运动方程$m\ddot{x}+kx=F(t)$，或$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{1}{m}F(t)$，它的通解$x=x_0+x_1$，$x_0$是自由振动解。

当强迫力时频率为γ的简单时间周期函数，即$F(t)=fcos(\gamma t+\beta)$，那么有解$x=acos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}cos(\gamma t+\beta)$。

在周期性强迫力作用下，系统的运动是两个振动的合成，频率分别为固有频率ω和强迫力频率γ。

当$\gamma=\omega$时，称为共振，此时$x=acos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{2m\omega}tsin(\gamma t+\beta)$。于是，在共振情况下，振动的振幅随时间线性增大（直到微振动假设失效）。

当$\gamma=\omega+\varepsilon$，$\varepsilon$是小量。那么$x=(A+Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t}$，$A+Be^{i\varepsilon t}$在因子$e^{i\omega t}$的周期内变化很小，所以共振附近运动可以看成微振动，但振幅会变化。

记振幅$\mathrm{C}=|A+Be^{i\varepsilon t}|$，$C^2=a^2+b^2+2abcos(\varepsilon t+\beta-\alpha)$，振幅以频率$\varepsilon$周期变化，变化范围是$|a-b|\le C\le a+b$，这种现象称为拍。

引入复变量$\xi=\dot{x}+i\omega x$，运动方程改写成$\frac{d\xi}{dt}-i\omega x=\frac{1}{m}F(t)$，利用常数变易法，得到通解$\xi=e^{i\omega t}\left[\int_0^t\frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}dt+\xi_0\right]$，$x(t)=\frac{1}{\omega}Im\,\xi$。

系统作强迫振动时能量不守恒，从外场源获得能量。假设初始能量为零，在$t\to\infty$时有$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2$，另一方面$E=\frac{m}{2}|\xi|^2$，可知外力作用

时间内传递到系统的总能量$E=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2$。

特别地，如果外力作用时间与 $1/\omega$ 相比很短，则$e^{-i\omega t}\approx 1$，$E=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt\right|^2$。

23 多自由度系统振动

设系统的势能U是广义坐标q_i的函数，在$q_i=q_{i0}$处取极小值。引入偏离平衡位置的微小位移$x_i=q_i-q_{i0}$，把U展开成x_i的级数，保留到二阶项，可得二次正定的势能$U=\frac{1}{2}\sum_{i,k}k_{ik}x_ix_k$，取势能的极小值为零，式中$k_{ik}=k_{ki}$。动能的一般形式为$\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k$，微振动假设下，$\frac{1}{2}\sum_{i,k}m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k\,,m_{ik}=m_{ki}$。于是体系的拉格朗日动能为$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)$，拉格朗日方程为$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k k_{ik}x_k=0$。

设解$x_k=A_ke^{i\omega t}$，那么可以得到线性方程组$\sum_k(-\omega^2m_{ik}+k_{ik})A_k=0$，特征方程$\left|-\omega^2m_{ik}+k_{ik}\right|=0$，一般情况下，它有 s 个不同的正实根$\omega_\alpha^2$，称为特征频率或本证频率。

如果ω_α各不相同，那么系数A_k正比于$\left|-\omega^2m_{ik}+k_{ik}\right|$的代数余子式，故$x_k=\Delta_{k\alpha}C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$，$C_\alpha$为复常数。

所有的特解求和，可以给出通解，$x_k=Re\{\sum_{\alpha=1}^{s}\Delta_{k\alpha}C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}\equiv\sum_\alpha\Delta_{k\alpha}\Theta_\alpha\,,\Theta_\alpha=Re\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}$。即，系统每个坐标随时间的变化都是 s 个简单周期振动Θ_α的叠加，它们的振幅和相位都是任意的，频率则完全确定。

$\{\Theta_i\}$可以看做新的广义坐标，称为简正坐标，它们进行简单的周期振动，称为系统的简正振动。采用简正坐标，运动学方程变为 s 个独立的二阶方程$\ddot{\Theta}_\alpha+\omega_\alpha^2\Theta_\alpha=0$。

这样，拉格朗日函数$L=\sum_\alpha\frac{m_\alpha}{2}(\dot{\Theta}_\alpha^2-\omega_\alpha^2\Theta_\alpha^2)\,,m_\alpha$是正常数。定义新的简正坐

标$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\Theta_\alpha$，那么$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)$。

当特征方程有重根时，$\Delta_{k\alpha} = 0$。

一个多重（简并）频率相应的简正坐标的个数等于这个频率的重数，但是简正坐标的选择不唯一，它们以和形式包含在动能和势能中，可以按照相同的任意线性方式变换，只要不改变平方和。

对于常外场中一个质点的三微振动，取笛卡尔坐标系于势能极小值处，那么$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2)$，沿着 x,y,z 三个方向的振动是简正振动，频率为$\omega_k = \sqrt{k_k/m}$，在有心对称力场的情况下，三个频率相等。

考虑作用在系统上的可变外力，拉格朗日函数为$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k$，$L_0$是自由振动的拉格朗日函数。采用简正坐标，$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t)Q_\alpha$，$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t)\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}$，相应的运动方程$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t)$。

24 分子振动

相互作用质点组成的系统，不处于外场中，则不是所有的自由度都具有振动特性。

平动有 3 个自由度，一般情况下，转动也有 3 个自由度，所以由 n 个原子组成的分子中有 3n-6 个振动自由度。所有原子沿着直线排列的是特殊情况，它仅有 2 个转动自由度。

为了消除平动，可以认为分子的总动量为 0，即质心的 3 个坐标为常数。设$\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}_{a0} + \boldsymbol{u}_a$（$\boldsymbol{r}_{a0}$是平衡位矢，$\boldsymbol{u}_a$是偏离矢量），那么$\sum m_a\boldsymbol{r}_a = const \equiv \sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}$表示为$\sum m_a\boldsymbol{u}_a = 0$。为了消除转动，应令分子总角动量为 0，略去$\boldsymbol{u}_a$的二阶小量，分子角动量$\boldsymbol{M} = \sum m_a\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a \approx \sum m_a\boldsymbol{r}_{a0} \times \dot{\boldsymbol{u}}_a = \frac{d}{dt}\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0} \times \boldsymbol{u}_a$，那么消除转动的条件为$\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0} \times \boldsymbol{u}_a = 0$。

分子简正振动可以根据原子运动特征分类，它是基于在分子中原子的平衡位置对称性。

如果分子的所有 n 个原子位于同一平面，则可以区分原子的面内简正振动和面外简正振动。面内简正振动自由度为 2n-3，面外为 n-3。

在线性分子情况下，可以区分纵向振动和横向振动。它有 n-1 个纵向振动自由度，2n-4 个横向振动自由度（仅有 n-2 个不同的频率）。

25 阻尼振动

物体在介质中运动时，介质会产生阻力使运动有减慢的趋势，运动物体的能量不断转化为热能。这种情况下运动过程不再是纯力学过程，需要考虑介质自身运动，以及物体和介质内部热状态。一般情况下不能认为加速度仅是给定时刻坐标和速度的函数，即不存在力学意义的运动方程。

振动频率小于介质内耗散过程频率的情况是特殊的，可以认为在物体上作用了仅依赖于速度的摩擦力（给定均匀介质）。

如果速度足够小，可以将摩擦-力按速度的幂次展开，于是作用在广义坐标 x 的一维微振动系统的广义摩擦力$f_{fr}=-\alpha\dot{x}$，那么运动方程$m\ddot{x}=-kx-\alpha\dot{x}$。引入记号$\omega_0^2=\frac{k}{m},2\lambda=\frac{\alpha}{m}$，$\lambda$称为阻尼系数（阻尼衰减率），$\lambda T$称为对数阻尼衰减率，运动方程改写为$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$。

设解$x=e^{rt}$，有特征方程$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$，那么$x=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t},r_{1,2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$。

如果$\lambda<\omega_0$，那么$x=Re\left\{Aexp\left(-\lambda t+it\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)\right\}$，或者写成$x=ae^{-\lambda t}cos(\omega t+\alpha),\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$。它们表示阻尼振动，可以看作振幅按指数规律衰减的简谐振动，振幅衰减率由λ确定。

如果$\lambda \ll \omega_0$，则在一个周期之内阻尼振动的振幅几乎不变。系统的平均能量衰减规律为$\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}$。

若$\lambda > \omega_0$，那么$x = c_1 exp[-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t] + c_2 exp[-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t]$。它表明，在摩擦力足够大时，运动$|x|$单调递减，渐进趋近于平衡位置，称为非周期阻尼。

若$\lambda = \omega_0$，$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}$，这是非周期阻尼的特殊情况。

对于多自由度系统，相应于广义坐标x_i下广义摩擦力$f_{ifr} =- \sum \alpha_{ik}\dot{x}_k$，可以证明$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$，故$f_{ifr} =- \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}, F = \frac{1}{2}\sum \alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$称为耗散函数。

拉格朗日方程$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$，可以证明$\frac{dE}{dt} =- \sum \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} =- 2F$，即系统能量变化率等于 2 倍耗散函数。

微振动方程$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k =- \sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k$，令$x_k = A_k e^{rt}$，得$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik})A_k = 0$，特征方程$\left|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}\right| = 0$，它是$r$的 2s 阶方程，方程的根或为负实数，或为实部为负的复共轭对。

26 有摩擦的强迫振动

一维情形下，运动方程$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}cos\gamma t$，采用复数形式，$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}e^{i\gamma t}$。

设解$x = Be^{i\gamma t}$，那么$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} = be^{i\delta}, b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, tan\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$。加上相应齐次方程通解即得本方程通解。

$\lambda < \omega_0$，$x = ae^{-\lambda t}cos(\omega t + \alpha) + bcos(\gamma t + \delta)$，第一项随时间指数衰减，足够长时间后$x = bcos(\gamma t + \delta)$。

强迫振动的振幅b在γ趋于ω_0时也会增大，但不会像无摩擦力共振那样趋向

无穷。对于给定力幅值f，在$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$时振动振幅最大。

设$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$，$\varepsilon$时小量，假设$\lambda \ll \omega_0$，那么$\gamma^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0\varepsilon$，$2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0$，因此$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0}$，或者$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}}, tan\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}$。振动与强迫力之间的相位差$\delta$总是负的，即振动落后于外力。当从$\gamma < \omega_0$一侧远离共振时，$\delta$趋近于零，从$\gamma > \omega_0$一侧远离，$\delta$趋近于$-\pi$。在接近$\omega_0$的狭窄区域（宽度为$\lambda$量级）内，$\delta$从零变化为$-\pi$，当$\gamma = \omega_0$时相位差$\delta$经过$-\pi/2$。无摩擦力时强迫振动相位在$\gamma = \omega_0$时产生量值$\pi$的突变，考虑摩擦力时就消除了这个突变。

当系统的强迫振动处于稳定运动是，系统的能量保持不变。这时系统不断从外力源吸收能量，又因摩擦而耗散。用外力频率函数$I(\gamma)$表示单位时间内平均吸收的能量，那么$I(\gamma) = 2\overline{F}$。对于一维运动，耗散函数表达式为$F = \lambda m\dot{x}^2 = \lambda mb^2\gamma^2 sin^2(\gamma t + \delta)$，所以$I(\gamma) = \lambda mb^2\gamma^2$，在共振附近，$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}$。

能量吸收对频率的这种依赖关系称为色散。在某个ε值时$I(\varepsilon) = \frac{1}{2}I(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$，则称$|\varepsilon|$为共振曲线的半宽度，此时$|\varepsilon| = \lambda$。最大值$I(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{f^2}{4m\lambda}$与$\lambda$成反比。随着阻尼系数减小，共振曲线变得更窄更高。但共振曲线面积不变，它由$\int_0^\infty I(\gamma)d\gamma = \int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{\pi f^2}{4m}$给出。

27 参变共振

存在一种非封闭振动系统，外力作用可以归结为参数随时间的变化。

一维系统的拉格朗日函数$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$，参数为$m$和$k$，如果它们依赖于时间，那么运动方程$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$，用新的独立变量$\tau$代替$t$，使$d\tau = dt/m(t)$，那么$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0$。不失一般性，只需研究方程$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0$。

假设函数$\omega(t)$是频率为γ，周期为T的函数。如果$x_1(t)$和$x_2(t)$是两个独立的解，那么变量替换$t \rightarrow t + T$后解必是他们的线性组合。选择x_1和x_2使$t \rightarrow t + T$

后 $x_1(t+T)=\mu_1 x_1(t), x_2(t+T)=\mu_2 x_2(t)$，这种函数的一般形式为 $x(t)=\mu^{t/T}\prod(t), \prod(t)$ 只是时间的周期函数。

可以证明，$\mu_1\mu_2=1$。由于方程系数为实数，所以要么 $\mu_1={\mu_2}^*$，要么 μ_1, μ_2 都是实数。

第一种情况下，$|\mu_1|=|\mu_2|=1$。

第二种情况下，$x_1(t)=\mu^{t/T}\prod_1(t), x_2(t)=\mu^{-t/T}\prod_2(t)$，且 $|\mu|\neq 1$。两解之一随时间指数增长，即系统在平衡位置 $x=0$ 的静止状态不稳定，偏离这个状态任意小量都会使位移随时间快速增长，称为参变共振。但是当 $x, \dot{x}$ 初值严格等于 0 时，他们以后也等于零，不同于通常共振。

函数 $\omega(t)$ 与常数 ω_0 相差很小，且是简单周期函数 $\omega^2(t)=\omega_0^2(1+hcos\gamma t)$，其中常数 $h\ll 1$。假设 $\gamma=2\omega_0+\varepsilon, \varepsilon\ll\omega_0$，求解运动方程。

设解 $x=a(t)cos(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t+b(t)sin(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t$，$a(t)$ 和 $b(t)$ 是随时间变化很慢的函数，该解是不精确的，忽略了 h 的高阶小量。代入方程并保留 ε 的一阶项，假设 $\dot{a}\sim\varepsilon a, \dot{b}\sim\varepsilon b$，求 $a(t)$ 和 $b(t)$ 正比于 e^{st} 的解，可以得到 $s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right]$。发生参变共振的条件是 $s^2>0$，即 $-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2}$，区间宽度与 h 成正比，振动放大系数 s 在该区间也是 h 量级。

在系统存在微弱摩擦时，也存在参变共振现象，但不稳定区间更窄。参变共振时振动像 $e^{(s-\lambda)t}$ 一样放大，不稳定边界由 $s-\lambda=0$ 确定，共振区间 $-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-4\lambda^2}$，此时 h 有发生参变共振的阈值 $h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}$。可以证明，对于接近频率 $2\omega_0/n$ 的共振，阈值 $h_k\propto\lambda^{1/n}$。

一般地，在频率 $2\omega_0/n$ 附近共振的不稳定区间宽度 $\Delta\varepsilon=n^{2n-3}h^n\omega_0/2^{3(n-1)}[(n-1)!]^2$。

28 非简谐振动

更高阶近似（非简谐振动或非线性振动）会出现运动的某些次要但不同的性质。

将拉格朗日函数展开至 3 阶项，$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ik}x_ix_kx_l$。采用简正坐标，$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$，运动方程可以写成$\ddot{Q}_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q})$,$f_\alpha$是$Q,\dot{Q},\ddot{Q}$的二次齐次函数。

利用逐阶近似的方法，求形式解$Q_\alpha=Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)}$，其中$Q_\alpha^{(2)}\ll Q_\alpha^{(1)}$，函数$Q_\alpha^{(1)}$满足$\ddot{Q_\alpha^{(1)}}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(1)}=0$，即$Q_\alpha^{(1)}=a_\alpha cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha)$。

在高一阶近似中，f_α只保留到二阶项，那么$\ddot{Q_\alpha^{(2)}}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(2)}=f_\alpha(Q^{(1)},\dot{Q}^{(1)},\ddot{Q}^{(1)})$，得到线性非齐次微分方程，右端可以变换为简单周期函数之和，包含相应于频率为系统固有频率之和、差的振动项。解应该包含同样周期性因子，因此断定，在二阶近似中，在频率为ω_α的简正振动上叠加了频率为$\omega_\alpha\pm\omega_\beta$的振动，这些频率称为组合频率。组合振动的振幅正比于相应的简正振动的振幅之积$a_\alpha a_\beta$。

在更高阶近似中，出现的组合频率是更多频率ω_α的和与差。

在 3 阶近似的组合频率中出现与原频率ω_α相同的频率，应用上述方法时，运动方程右端将有共振项，导致方程的解中出现振幅随时间增长的项。然而，事实上在高阶近似中基频ω_α与出现在势能二次表达式中无扰值$\omega_\alpha^{(0)}$相比发生了变化，解中出现随时间增长项，是因为展开式$cos(\omega_\alpha^{(0)}+\Delta\omega_\alpha)t\approx cos(\omega_\alpha^{(0)}t)-t\Delta\omega_\alpha sin(\omega_\alpha^{(0)}t)$，在时间足够大时，不合理。因此，在研究下一阶近似时，逐阶近似方法需使出现在解中的周期性因子应包含准确而非近似的频率。

以一维为例，$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2-\frac{1}{3}m\alpha x^3-\frac{1}{4}m\beta x^4$，相应的运动方程为 $\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3$，逐阶近似解$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$，且$x^{(1)}=acos\omega t$中精确地$\omega=\omega_0+\omega^{(1)}+\omega^{(2)}+\cdots$。

运动方程等价为$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}$，此时假设$x=x^{(1)}+x^{(2)}$，$\omega=\omega_0+\omega^{(1)}$,可得$x^{(2)}$方程,使之无共振项可以给出$\omega^{(1)}$,并可以解出$x^{(2)}$。

进一步假设$x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)},\omega=\omega_0+\omega^{(1)}+\omega^{(2)}$，可得$x^{(3)}$方程，使之无共振项可以给出$\omega^{(2)}$，并可以解出$x^{(3)}$。

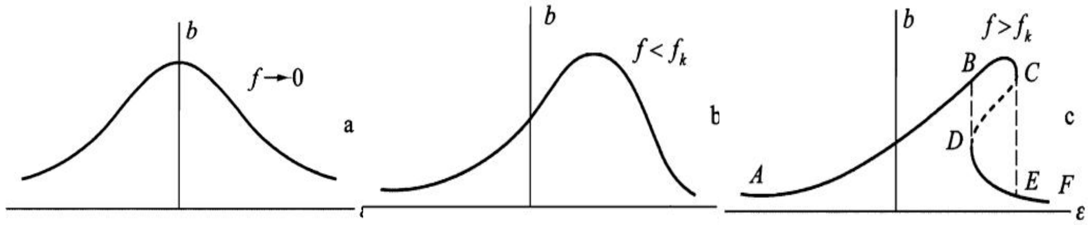
29 非线性振动中的共振

当在系统的强迫振动中计入非简谐项时，共振现象中会出现本质的新特性。

运动方程$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}cos\gamma t-\alpha x^2-\beta x^3$。严格来说，自由振动方程也应考虑强迫力幅值中的高阶项，但它不影响定性结果。设$\gamma=\omega_0+\varepsilon,\varepsilon$是小量。

在线性近似中，共振附近强迫振动的振幅b对外力幅值f和频率γ的关系为 $b=\frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}}$，可以写成$b^2(\varepsilon^2+\lambda^2)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}$。振动的非线性导致固有频率对振幅有依赖，将固有频率写成$\omega_0+\kappa b^2$，κ是非简谐系数确定的函数，以$\omega_0+\kappa b^2$代替ω_0，可得$b^2[(\varepsilon-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}$，或者$\varepsilon=\kappa b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2-\lambda^2}$。

当f足够小时，振幅b也很小，忽略b的二阶以上项，就回到了线性近似中的$b(\varepsilon)$。随着f增大，$b(\varepsilon)$曲线发生变形，开始还保持极大值特性，但极大值移动到正ε一边（$\kappa>0$），这时b只有一个实根。从特定值f_k（$f_k^2=\frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\kappa|}$）开始，对于每个$f>f_k$都存在方程有 3 个实根的频率区间。



在 D 点和 C 点的条件是$db/d\varepsilon=\infty$，即位置由$\varepsilon^2-4\kappa\varepsilon b^2+3\kappa^2b^4+\lambda^2=0$和$b(\varepsilon)$方程确定。相应的$\varepsilon$值都是正的。在$db/d\varepsilon=0$的点，振幅达到最大值，此时$\varepsilon=\kappa b^2, b_{max}=\frac{f}{2m\omega_0\lambda}$。

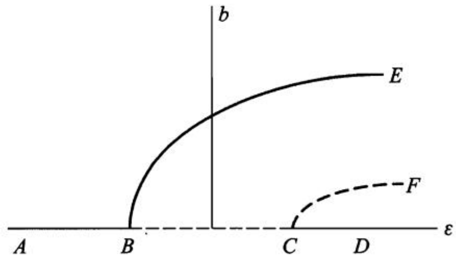
可以证明，方程的 3 个实根中的中间根相应于系统的不稳定。任意小的作用都会使此态系统转到 BC 段或 DE 段。

只有 ABC 和 DEF 段对应系统的实际振动，存在允许两个不同振幅的频率区间。

振动的非线性除了使在频率$\gamma\approx\omega_0$处共振性质改变外，还导致出现新的共振，即频率显著不等于ω_0的外力可以激发频率接近ω_0的振动。

设外力频率$\gamma\approx\omega_0/2$，即$\gamma=\omega_0/2+\varepsilon$，在一阶线性近似中，外力激发系统同频率的振动，振幅与外力幅值成正比，即$x^{(1)}=\frac{4f}{3m\omega_0^2}cos(\omega_0/2+\varepsilon)t$。当在二阶近似中考虑非线性项后，这些振动导致在运动方程右端出现频率 $2\gamma\approx\omega_0$的项。代入$x^{(1)}$后，可得函数关系$b(\varepsilon)$：$b^2[(2\varepsilon-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{16\alpha^2f^4}{81m^4\omega_0^{10}}$，这种共振与$\gamma\approx\omega_0$共振性质相同，但强度较小。

设外力频率$\gamma=2\omega_0+\varepsilon$，$x^{(1)}=-\frac{f}{3m\omega_0^2}cos(2\omega_0+\varepsilon)t$，$x^{(2)}$方程并没有出现表示共振外力的项。但是正比于$x^{(1)}x^{(2)}$的 3 阶项产生参变共振，如果仅保留这一项，方程类似于参变共振方程，会在一定频率范围内导致振动不稳定。有效振幅的建立与非线性效应相关，故还应保留$x^{(2)}$的非线性项。在方程右端，令$x^{(2)}=bcos[(\omega_0+\varepsilon/2)t+\delta]$，可得通常类型的共振项$\frac{\alpha fb}{3m\omega_0^2}cos[(\omega_0+\varepsilon/2)t-\delta]$，问题简化为非线性系统共振，函数关系$b(\varepsilon)$：$b^2[(\varepsilon/2-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{\alpha^2f^2b^2}{36m^2\omega_0^6}$,。$b$的可能振幅值：$b=0, b^2=\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\right]$。



上图是$\kappa > 0$ 情形。B 点和 C 点相应于$\varepsilon = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2 - 4\lambda^2}$。在 B 点左侧没有共振。BC 段对应共振区间，有$|h| = \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}, \left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\right| > 4\lambda$对应阈值。图中实线部分是稳定共振。BE 和 CF 以后相交于一点，这时振动停止，$b = 0$。

在更高阶近似中会在其他频率处出现共振。共振发生在满足关系式$n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$的每一个频率$\gamma$，即$\gamma = p\omega_0/q$都应该发生共振。随着近似阶数的正价，共振强度（及频率区间宽度）迅速减小，实际上只能在$\gamma \approx p\omega_0/q$且$p, q$都不大时观察到共振。

30 快速振动场中的运动

对于受定常势场U和随时间变化的高频力$f = f_1 cos\omega t + f_2 sin\omega t$作用的质点运动，其中$f_1, f_2$仅是坐标的函数。高频值$\omega \gg 1/T, T$与质点在定常场$U$中运动的周期有同样的数量级。大小上并不假设$f$比定常场力弱，但假设力引起的质点振动位移$\xi$很小。

对于一维运动，运动方程为$m\ddot{x} =- \frac{dU}{dx} + f$。由力场性质，质点的运动是沿着某条平滑的轨道移动，同时绕该轨道作频率为ω的微振动。

记$x(t) = X(t) + \xi(t)$，函数$\xi(t)$在周期之内平均值为零，但$X(t)$变化很小，有$\bar{x} = X(t)$，即函数$X(t)$描述了按快速振动平均化后得到的质点的平稳运动。

将运动方程转化，并按ξ的幂展开，精确到一阶项，$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} =- \frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}$，它包含振动项和平稳项。对于振动项，只需有$m\ddot{\xi} = f(X,t)$，其他

项包含小量ξ，是高阶小量，因此$\xi=-\frac{f}{m\omega^2}$。对运动方程平均，可得$m\ddot{X}=-\frac{dU}{dX}-\frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}}$，可以写成$m\ddot{X}=-\frac{dU_{eff}}{dX}, U_{eff}=U+\frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2}=U+\frac{1}{4m\omega^2}\left(f_1^2+f_2^2\right)=U+\frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}$，附加项正是振动动能的平均值。可见对振动平均后的质点运动，与在定常势场U加上正比于边长幅值平方的定常场中运动相同。

对于广义坐标q_i描述的任意自由度系统，$U_{eff}=U+\frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k}a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k}=U+\sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}$，$a_{ik}^{-1}$是系统动能系数矩阵之逆矩阵的元素。