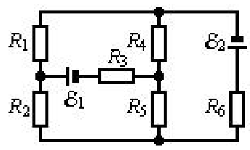
物理常数：e=1.602×10^{-19}C，ε_0=8.854×10^{-12}F/m。注：非特别声明，取无穷远处为电势零点。

一、 填空题（30 分，2 分/小题）

1. 相距 1.06×10^{-10}m 的正负电子之间的静电力=____________，相互作用能=____________eV。
2. 半径分别为 a 和 b（b>a）的同心金属薄球壳之间的电势差为 U，如果 b 固定，a 可调节，则当 a=____________时，内球壳外表附近有最小电场强度____________。
3. 两个电容器并联后再与另一个电容器串联，这三个电容器的标称值均为 6.0pF，20V，该体系的总电容=____________，总耐压值=____________。
4. 一无限大导体板位于 z=0 平面，在$(a, 0, a)$和$(-a, 0, a)$处分别有两个点电荷$+q$ 和$-q$，则$+q$ 所受总静电力大小=____________，点$(a, 0, 0)$处的面电荷密度=____________。
5. 介电常数为ε的无限大均匀介质中有一半径为 R 的球形空腔，腔内充满体电荷密度为常数ρ_e的空间电荷，则腔内、外静电能分别为____________和____________。
6. 一根长 l，横截面 S 的铜棒，电流强度为 I。已知铜的电导率是σ，导电电子数密度为 n，则铜棒电阻=____________，电子平均漂移速度=____________，焦耳热功率=____________。
7. 已知$\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2$=10V，$R_3$=2Ω，$R_1=R_2=R_4=R_5$=8Ω，$R_6$=6Ω，则该电路的支路数=____________，通过 R_3 的电流强度=____________。



二、 判断题（10 分，1 分/小题）

1. (　　) 一个点电荷与带电体的距离越近，所受到的静电力越大。
2. (　　) 真空静电场情形下库仑定律与高斯定理不可以相互导出。
3. (　　) 闭合曲面上各点电场均为零时，面内必没有宏观电荷。
4. (　　) 一区域内场强处处为零，则该区域等电势；反之亦然。
5. (　　) 未接地的空腔导体，当腔内电荷位置改变后，导体外的电场不变。
6. (　　) 均匀带正电的细圆环，在环面的圆周之内，中心点的电势最低。
7. (　　) 水在电场作用下主要发生取向极化。
8. (　　) 一电介质只在表面带电荷，面电荷密度为σ，则表面外侧附近的电场强度为σ/ε_0。
9. (　　) 电介质中退极化场与外电场方向总是相反。
10. (　　) 平板电容器接上电源，在两极板之间缓慢插入电介质板，则电容器的储能变大。

三、 简答题（20 分，5 分/小题）

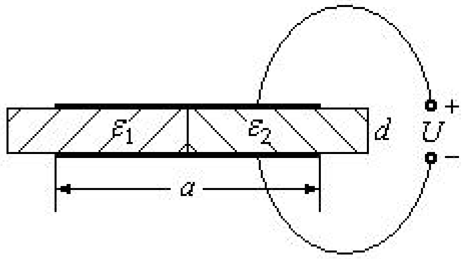
1. 静电场的什么性质保证了引入“电势”的合理性？引入“电势”对求解静电场带来什么便利？
2. 静电平衡时，孤立导体表面各处的电荷可否异号？为什么？
3. 定性画出铁电体的电滞回线，标明横、纵坐标的物理量以及沿回线演化的箭头，箭头方向能不能反过来？
4. 为什么强电场中欧姆定律失效？

四、计算题（40 分，其中第 1、2 题各 10 分，第 3 题 20 分）

1. 半径为 a 的导体球 A 的外面是一个内、外半径分别为 b 和 c、带净电 Q 的同心导体球壳 B，将 A 接地，在静电平衡时，求
   (1) A 上的电量；
   (2) 该体系的电容。

2. 一半径为 R，厚度为 h（$h<<R$）的均匀介质圆板被均匀极化，极化强度 $\boldsymbol{P}$ 平行于板面，求
   (1) 面极化电荷密度；
   (2) 圆板中心的退极化场强。

3. 平板电容器极板长 a，宽 b，极板间距 d，极板间充有ε_1和ε_2两种电介质，体积各占一半，介质界面垂直于极板，当电容器加上电压 U 时，求
   (1) 每个电介质中的电位移和电场强度；
   (2) 自由电荷密度和极化电荷密度；
   (3) 电容器的宏观静电能；
   (4) 若介质与极板间无摩擦，为维持平衡，应在介质上施加怎样的外力？



期中考试样题详细解答

填空题

1.

静电力

$$F=\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\approx\frac{(1.602\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.854\times10^{-12}\times(1.06\times10^{-10})^2}\mathrm{N}\approx2.05\times10^{-8}\mathrm{N}$$

相互作用能「请详见习题 3.1」

$$E=\frac{Q(-Q)}{4\pi\epsilon_0 r}=-\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r}\approx-\frac{(1.602\times10^{-19})^2}{4\times3.14\times8.854\times10^{-12}\times1.06\times10^{-10}}\mathrm{J}\approx2.17\times10^{-18}\mathrm{J}$$

但是题目需要以电子伏特 eV 为单位，$1\mathrm{eV}\approx1.602\times10^{-19}\mathrm{J}$，就和电子电荷量数值一样，因此

$$E\approx\frac{2.17\times10^{-18}}{1.602\times10^{-19}}\mathrm{eV}\approx13.6\mathrm{eV}$$

2.

令内部的金属球壳电荷量为 Q，根据高斯定理

$$E(r)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

因此

$$U=\int_a^b E(r)dr=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

内球壳外表附近电场强度为

$$E(a)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}=\frac{U}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)a^2}=\frac{U}{a-\frac{a^2}{b}}=\frac{Ub}{-\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}}\leq\frac{Ub}{\frac{b^2}{4}}=\frac{4U}{b}$$

因此，当 $a=\dfrac{b}{2}$ 时，内球壳外表附近有最小电场强度 $\dfrac{4U}{b}$。

3.

两个电容器并联后的电容为

$$C_0 = C_1 + C_2 = 6.0 + 6.0\text{pF} = 12.0\text{pF}$$

与第三个电容器串联后的电容为

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{12.0} + \frac{1}{6.0}}\text{pF} = 4.0\text{pF}$$

可以画一下电路图，分析各个电容器极板带电量「请详见习题 **2.8**」当电源电动势为 $\mathscr{E}$ 时，前两个电容器电压为 $\dfrac{1}{3}\mathscr{E}$，第三个电容器电压为 $\dfrac{2}{3}\mathscr{E}$，因此需要满足

$$\frac{1}{3}\mathscr{E} \le 20\text{V}$$

$$\frac{2}{3}\mathscr{E} \le 20\text{V}$$

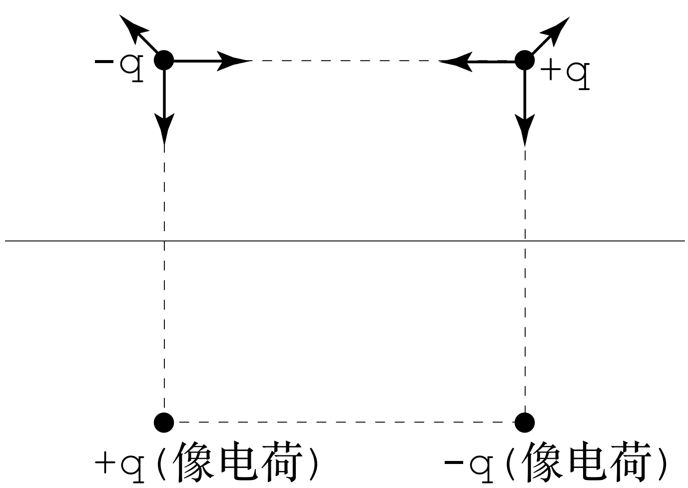
可以得出

$$\mathscr{E} \le 30\text{V}$$

因此最大只能加 30V 电压，总耐压值为 30V。

4.

电像法，+q电荷与−q电荷在无限大导体板对面都有一个镜像−q与+q，分别位于 (a,0,−a) 与 (−a,0,−a) 位置。因此+q受到三个电荷给它的作用力，可以通过矢量叠加得到「这个自己算吧」+q受到的总静电力大小为 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{32\pi\epsilon_0 a^2}q^2$，关于 (a,0,0) 处的电荷面密度，我们需要计算 (a,0,0) 处上方，并且非常靠近平面处的电场强度大小。相当于计算「请利用高斯定理证明如下表达式」



$$\sigma = \lim_{(x,y,z)\to(a,0,0)} \mathbf{E}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}$$

其中 $\mathbf{n}=(0,0,1)$ 是垂直于平面的向上法线方向，$\mathbf{E}(x,y,z)$ 是这四个电荷产生的电场强度分布。

你可以利用电场强度的叠加定理计算出来，这个我就不具体计算了。

5.

腔内电场强度分布为「请利用高斯定理证明如下表达式」

$$E(r)=\frac{\rho_e}{3\epsilon_0}r,(0<r<R)$$

静电能为

$$W=\int_0^R \frac{1}{2}\epsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 dr=\frac{2\pi\rho_e^2}{9\epsilon_0}\int_0^R r^4 dr=\frac{2\pi\rho_e^2R^5}{45\epsilon_0}$$

腔外电位移矢量分布为

$$D(r)=\frac{Q}{4\pi r^2}=\frac{\rho_e\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi r^2}=\frac{\rho_e R^3}{3r^2},(r>R)$$

电场强度分布为

$$E(r)=\frac{D(r)}{\epsilon}=\frac{\rho_e R^3}{3\epsilon r^2},(r>R)$$

静电能为

$$W=\int_R^\infty \frac{1}{2}D(r)E(r)4\pi r^2 dr=\frac{2\pi\rho_e^2R^6}{9\epsilon}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr=\frac{2\pi\rho_e^2R^5}{9\epsilon}$$

6.

电阻

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}$$

电流「这个要记住的，因为高中学过」

$$I = neSv$$

电子平均漂移速度

$$v = \frac{I}{neS}$$

焦耳热功率

$$P = I^2R = \frac{I^2 l}{\sigma S}$$

7.

支路数这个概念我也不懂，自己看课件吧。遇到这类题目我也没办法，有些时候，这种偏门知识你根本预测不到。

电流强度自己列回路方程与节点电流定理「基尔霍夫定理」，解这个方程即可，难度不大。

判断题

1. 错误。这个很坑人，比如带电体是均匀带电的球体，那么点电荷进入球体内部时，受到的静电力是会逐渐变小的「$E(r) = \dfrac{\rho_e}{3\epsilon_0}r, (0 < r < R)$」。这类题真的很无聊。
2. 这题我觉得答案有误。

首先，库仑定理是可以推出高斯定理的「当然，是静电场情形下」：

因为函数 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV'$ 的散度为 $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$「不要浪费时间计算这个」；

其次，高斯定理是可以推出库仑定理的。静电场情形下，$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r})$，可以用电势的梯度来表达电场强度。高斯定理 $\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ 可以化为 $-\Delta V(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$，这是Poisson方程。

求解Poisson方程的步骤是，先计算Laplace方程 $\Delta u(\mathbf{r})=0$ 的Fundamental solution：

$$\Phi(\mathbf{r})=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\log r & (n=2)\\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\frac{1}{r^{n-2}} & (n\geq 3)\end{cases}$$

其中 $\alpha(n)$ 是半径为1的n维球的体积，

$$\alpha(n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

所以在n=3的情况下，$\alpha(n)=\dfrac{4}{3}\pi$，此时 $\Phi(\mathbf{r})=\dfrac{1}{4\pi r}$

可以通过非常复杂的计算得出，函数 $u(\mathbf{r})=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV'$ 满足Poisson方程 (i) $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$；(ii) $-\Delta u=f$「也不要浪费时间计算这个」。这个是一个卷积，卷积在信号与系统中是非常重要的运算。

「以上部分请参考 Partial Differential Equations SECOND EDITION by Lawrence C. Evans, ISBN: 978-0-8218-4974-3，书本的P20 - P43部分」

所以在n=3的情况下，Poisson方程 $-\Delta V(\mathbf{r})=\dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ 存在一个解

$$V(\mathbf{r})=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0}dV'$$

因此

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\operatorname{grad}\ V(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV'$$

这种题是非常非常没水平的，毫不客气地说，就是垃圾。

3.

错误。这个只能说明电荷总和为 0，不能说明处处为 0。因为可以某些地方为正电荷，某些地方为负电荷，只要加起来刚好为 0 即可。也是很无聊的概念题。

4.

正确。$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\operatorname{grad}\ V(\mathbf{r})$，如果 $\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{0}$，那么 $-\dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{\partial V}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial z}=0$，$V$ 是与坐标 (x,y,z) 完全无关的量，当然就是常量。反过来更加显然，如果 V 是常量，那么 $-\dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{\partial V}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial z}=0$，$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\operatorname{grad}\ V(\mathbf{r})=\mathbf{0}$。

5.

正确。因为静电屏蔽效应，腔内电荷分布不会影响导体外的电场。

6.

正确。直接计算可以是可以，但是你不一定能把积分算出来。可以定性分析，靠近边缘的地方，边缘处的电荷更加倾向于把你推回中心，因为边缘处的电荷和你的距离较小，所以库仑力较大。因此，电场强度是径向向内分布的，所以中心点的电势最低。

7.

正确。翻课件吧，我也不是特别清楚。很无聊。

8.

错误。因为电介质不是金属，表面内侧很有可能存在非零的电场强度，那么根据高斯定理，表面外侧附近的电场强度不一定是 $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$。

9.

错误。因为电介质并不一定是线性的，它很有可能是非线性的，有些特殊的材料，介电常数是这个表示形式

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

它产生的退极化场 $\mathbf{P}$ 与外电场方向就不一定相反了，很可能是带有角度的。「这题我自己都做错了」

10.

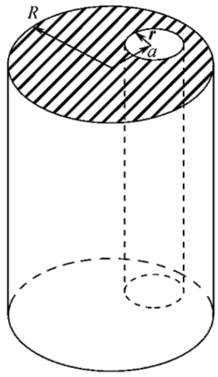
正确。因为 $W = \int_{A_1} \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dV + \int_{A_2} \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 dV$，A1代表电介质区域，A2代表真空区域。因为 $\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} > \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2$，所以电介质插入以后，电容器的储能变大。

简答题

1. 答出“curl $\mathbf{E} = \mathbf{0}$” 或 “保守场”这一点，第一问就可以满分。答出“标量”这一点，第二问就可以满分。
2. 答出“正电荷附近电势高于负电荷附近电势”这一点即可满分。
3. 不管他，期中不考。
4. 我自己也不知道。

电磁学 A 小测参考答案

1.（20 分）外半径为R的无穷长圆柱形导体管，管内空心部分的半径为r，空心部分的轴线与圆柱的轴线平行，但不重合，相距为 a，管的一段如图所示.今有电流I沿轴线方向流动，I均匀分布在管的横截面上, 求



（1）圆柱轴线上的磁感应强度$\boldsymbol{B_1}$.（10 分）

（2）证明空心部分的磁场为匀强磁场，并求出其磁感应强度$\boldsymbol{B_2}$.（10 分）

【解】

（1）空心部分可看作实心圆柱体的均匀电流加上该部分的反向电流构成，则空间中的磁场可以视为这两部分电流产生的磁场的叠加。

对实心圆柱体，电流密度 $\boldsymbol{j}_1 = \frac{I}{\pi(R^2-r^2)}\hat{z}$，

对空心部分，反向电流密度$\boldsymbol{j}_2 = -\boldsymbol{j}_1 = -\frac{I}{\pi(R^2-r^2)}\hat{z}$.

由于均匀圆柱电流在各自的轴线上产生的磁感强度均为零，则圆柱轴线上的磁感应强度仅由$\boldsymbol{j}_2$，由安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}_1 \cdot d\boldsymbol{l} = B_1 \cdot 2\pi a = \mu_0 j_2 \pi r^2 = -\mu_0 \frac{Ir^2}{R^2-r^2}$$

因此，

$$\boldsymbol{B}_1 = -\mu_0 \frac{Ir^2}{2\pi a(R^2-r^2)}\hat{\phi}$$

（2）由安培环路定理，对电流密度为j的均匀圆柱电流内部，距离轴线为ρ处的磁感应强度，有

$$B \cdot 2\pi\rho = \mu_0 j \pi \rho^2$$

因此

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 j \rho}{2}\hat{\phi} = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{\rho}$$

因此，对空心部分任意一点，其距离实心圆柱的轴线为$\boldsymbol{\rho}_1$,距离空心部分轴线为$\boldsymbol{\rho}_2$,则有

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0}{2}(\boldsymbol{j}_1 \times \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{j}_2 \times \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j}_1 \times (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) = \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j}_1 \times (a\hat{\rho})$$

故

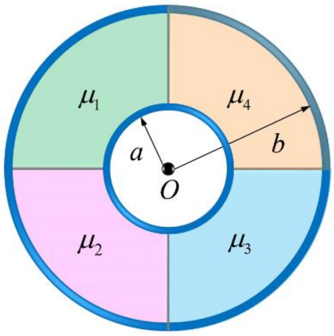
$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(R^2-r^2)}\hat{\phi}$$

2.（20 分）如图，两同轴导体圆柱面通有反向电流，二者之间填充有磁导率分别为μ_1,μ_2,μ_3,μ_4的四种介质，各占 1/4。设通过电流的电流强度为I. 求

（1）介质内的磁场强度分布（10 分）

（2）介质—内侧导体交界面上($s=a$)的磁化面电流分布（5 分）

（3）介质—外侧导体交界面上($s=b$)的传导面电流分布（5 分）



【解】

由于题中介质界面与磁感应线垂直，因此在各介质处磁感应强度大小相等，各介质处磁场强度

$$H_i=\frac{B}{\mu_i}\ (i=1,2,3,4)$$

由安培环路定理，介质内距离轴线s处

$$\frac{B}{\mu_1}\cdot\frac{\pi s}{2}+\frac{B}{\mu_2}\cdot\frac{\pi s}{2}+\frac{B}{\mu_3}\cdot\frac{\pi s}{2}+\frac{B}{\mu_4}\cdot\frac{\pi s}{2}=I$$

因此

$$B=\frac{2I}{\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4}\right)\pi s}=\frac{2I\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{(\mu_2\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_3)\pi s}$$

则对于介质中磁场强度

$$H_i=\frac{B}{\mu_i}=\frac{2I}{\mu_i\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4}\right)\pi s},$$

即

$$H_1=\frac{2I\mu_2\mu_3\mu_4}{(\mu_2\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_3)\pi s}$$
$$H_2=\frac{2I\mu_1\mu_3\mu_4}{(\mu_2\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_3)\pi s}$$
$$H_3=\frac{2I\mu_1\mu_2\mu_4}{(\mu_2\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_3)\pi s}$$
$$H_4=\frac{2I\mu_1\mu_2\mu_3}{(\mu_2\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_2\mu_3)\pi s}$$

（2）由于$s<a$和$s>b$内，$B=H=M=0$

$$M_i=\left(\frac{\mu_i}{\mu_0}-1\right)H_i=\frac{2I(\mu_i-\mu_0)}{\mu_0\mu_i\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4}\right)\pi s}$$

则介质 i 与内侧导体交界面上的磁化面电流密度为

$$K_i'=M_i(s=a)=\frac{2I(\mu_i-\mu_0)}{\mu_0\mu_i\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4}\right)\pi a}$$

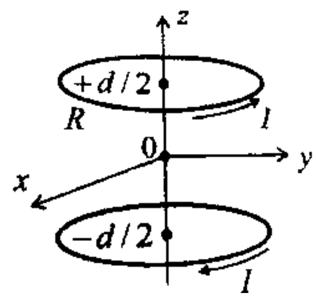
（3）介质 i 与内侧导体交界面上的磁化面电流密度为

$$K_i=-H_i(s=b)=-\frac{2I}{\mu_i\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}+\frac{1}{\mu_4}\right)\pi b}$$

3.（20 分）两个半径为 R 的载流圆线圈同轴放置，相距为 d，取两个线圈中心连线的中点为坐标原点 O，圆线圈的中心在 z 轴上，如图所示，两个线圈通有恒定电流 I，电流方向相反. 求

（1）z 轴上任一点的磁感应强度（8 分）

（2）利用高斯定理求 O 点附近任一点 $P(x,y,z)$ 处的磁感应强度.$(x,y,z \ll R,d)$（12 分）



【解】

（1） 半径为 R 的载流圆线圈在轴线距离圆形a处产生的磁感应强度

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

故对上圆，z轴上一点$Q(0,0,z), a=\frac{d}{2}-z$，对下圆，$a'=\frac{d}{2}+z$，

由于两线圈电流方向相反，则磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[\left(\frac{d}{2}-z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_0 I R^2}{2\left[\left(\frac{d}{2}+z\right)^2+R^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

（2）在 O 点附近，$z \ll R,d$，由泰勒展开，轴线上磁感应强度可以近似写为

$$\vec{B} \approx \frac{3d\mu_0 I R^2 z}{2\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}\hat{z}$$

在 O 点附近作一个高为$\delta z \ll d$，半径为ϵ的圆柱面，其中P点在圆柱侧面（即$\epsilon^2=x^2+y^2 \ll R^2$），由于$x,y,z \ll R,d$，可以认为，在圆柱内磁感应强度 z 方向分量与轴线上磁感应强度相同，即$B_z=\frac{3d\mu_0 I R^2 z}{2\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}$，且由对称性和环路定理，圆柱侧面任意点无切向分量，且近似认为圆柱侧面各点磁感应强度的法向分量相同，记为B_ρ,由高斯定理

$$2\pi\epsilon\delta z B_\rho + [B_z\left(z=\frac{\delta z}{2}\right) - B_z\left(z=\frac{\delta z}{2}\right)]\pi\epsilon^2 = 0$$

即

$$2\pi\epsilon\delta z B_\rho + \frac{3d\mu_0 I R^2 \delta z \pi \epsilon^2}{2\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

故

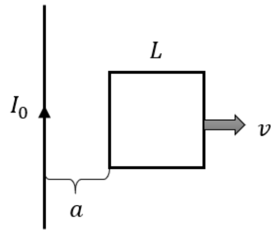
$$B_\rho = -\frac{3d\mu_0 I R^2 (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{4\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

因此，$\vec{B}(P) = \frac{3d\mu_0 I R^2 z}{2\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}\hat{z} - \frac{3d\mu_0 I R^2 (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{4\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}\hat{\rho} = \frac{3d\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}(z\hat{z}-\frac{x}{2}\hat{x}-\frac{y}{2}\hat{y})$

4.（20 分）一边长为L、电阻为R的正方形导线圈，其两条边与载有电流 I_0 的长直导线平行，现将线圈以恒定的速度v拉离直导线，求当导线圈左侧边与长直导线距离为x时,

（1）感应电流 I（10 分）

（2）外界施加的力的大小及其功率（10 分）



【解】

（1）线圈平面内的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\hat{y}$$

取线圈所围曲面的法向沿着 y 轴正向（纸内），则线圈内磁通量

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = L\int_x^{x+L} B da = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi}\int_x^{x+L}\frac{da}{a} = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi}\ln\frac{x+L}{x}$$

因此，线圈中的电流

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt}$$

由于$\frac{dx}{dt} = v$,因此

$$I = \frac{\mu_0 I_0 L v}{2\pi R}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L}\right)$$

（2）线圈上下两边受力抵消，左右两边受到的安培力分别为

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = IL\hat{z}\times\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi x}\hat{y} = -\dfrac{\mu_0 I_0 IL}{2\pi x}\hat{x} \\ \vec{F}_2 = -IL\hat{z}\times\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi(x+L)}\hat{y} = +\dfrac{\mu_0 I_0 IL}{2\pi(x+L)}\hat{x} \end{cases}$$

由于线圈作匀速运动，线圈所受合力为 0，外界拉力为

$$\vec{F}_{外} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \frac{\mu_0 I_0 IL}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L}\right)\hat{x} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 L^2 v}{(2\pi)^2 R}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L}\right)^2\hat{x} = \frac{I^2 R}{v}\hat{x}$$

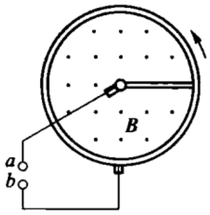
功率

$$P_e = \vec{F}_{外}\cdot\vec{v} = I^2 R = \frac{\mu_0^2 I_0^2 L^2 v^2}{(2\pi)^2 R}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L}\right)^2$$

5. （20 分）法拉第圆盘发电机是一个在磁场中转动的导体圆盘. 设圆盘的半径为R. 它的轴线与均匀外磁场$\boldsymbol{B}$平行，它以角速度ω绕轴线转动, 如图所示.

(1) 求盘边与盘心间的电势差 U.（12 分）

(2) 盘边与盘心哪处电势高？（4 分）当盘反转时，电势的高低是否也会反过来?（4 分）



【解】

（1） 由于圆盘转动产生的电动势由非静电力$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$产生，则盘边与盘心的电势差大小为

$$U=\int_0^R vBdr=\int_0^R r\omega Bdr=\frac{1}{2}\omega BR^2$$

（2）由于非静电力方向沿径向向外，因此盘边电势更高，当盘反向旋转时，非静电力方向发生改变，电势高低会反过来。

一、　填空题 (20 分，2 分/小题)

1. 氢原子半径为 0.529×10^{-10}m，电子绕核旋转的速度为 2.19×10^{6} m/s，则氢原子的轨道磁矩=______________，中心处的磁感应强度=______________。

2. 一电子以 5×10^{6}m/s 的初速度进入 2mT 磁场中，初速度与磁场夹角为 60°，则该电子运动的回旋半径=____________，螺距=____________。

3. 闭合铁环的周长 125mm，磁导率 400，其上绕有安匝数 500 的线圈。则铁环内的磁感应强度=____________；若切割出 2.0mm 的气隙，则铁环内的磁感应强度=____________。

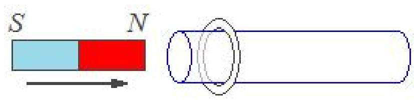
4. 在____________阻尼情形下，*RLC* 暂态电路的电流振荡衰减。

5. 一 *RLC* 串联电路，其中 R=30Ω，L=10mH，C=20μF，电源电动势 $e = 200\cos(1000\,t)$V (t 的单位是秒)，则电源平均功率=____________，功率因数=____________，串联上____________元件 (填电阻、电感或电容) 可以增大功率因数。

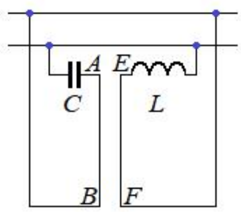
二、　简答题 (15 分，5 分/小题)

1. 给出三种产生均匀磁场的办法。

2. 一个圆环穿在光滑水平绝缘杆上，当条形磁铁的 N 极向右靠近圆环时，圆环会向什么方向运动？为什么？分别就圆环是铁环、铝环和塑料环三种情形讨论。

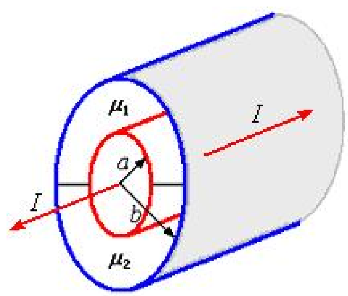


3. 从同一交流电路接出两个支路，一个连接电容，一个连接电感，则导线 AB 和 EF 之间是相吸还是相斥？为什么？



三、　计算题 (65 分，第 1、2、4 题各 15 分，第 3 题 20 分)

1. 半径分别为 a 和 b 的两个空心导体圆柱面共轴，组成一长直电缆，两圆柱面之间填满两种磁导率分别为μ_1, μ_2 磁介质，各占一半，如图所示，设内外导体壳通有方向相反的电流 I，　求：
   (1) 介质内外 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的分布。
   (2) 介质和外导体壳分界面处的传导电流密度和磁化电流密度。



2. 在磁化强度为常量 $\boldsymbol{M}$ 的均匀磁介质中挖去一半径为 R 的球形空穴，求磁化电流的磁矩及其在球心处产生的磁感应强度。

解： 球面上的线磁化电流密度 $i'=M\sin\theta$,

球面上半径为 $r=R\sin\theta$、宽度为 $R\mathrm{d}\theta$的圆电流环的磁矩

$$\mathrm{d}m=i'R\mathrm{d}\theta\pi r^2=\pi R^3M\sin^3\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$\Rightarrow m=\pi R^3M\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi R^3M,\quad (\text{或}m=VM=\frac{4}{3}\pi R^3M)$$

方向与 $\boldsymbol{M}$ 相反；

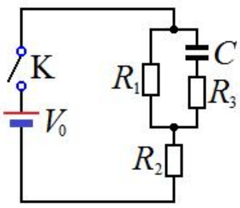
球面上半径为 $r=R\sin\theta$、宽度为 $R\mathrm{d}\theta$的圆电流环在球心处的磁感强度

$$\mathrm{d}B'=\mu_0 i'R\mathrm{d}\theta r^2/2R^3=\mu_0M\sin^3\theta\mathrm{d}\theta/2,$$

$$B'=\mu_0M\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta/2=(2/3)\mu_0M,$$

方向与 $\boldsymbol{M}$ 相反.

3. 三个电阻 R_1、R_2 和 R_3，与一个电容器 C 组成的电路如图所示。电源电动势为 V_0，电容器由两个圆形极板组成，其半径为 b，间距为 d，$d<<b$。当电路达到稳定状态时将开关 K 断开，此时记为零时刻。求：



(1) 电容器正极板的电量所满足的电路方程；
(2) 在 t 时刻电容器的放电电流强度和极板间的位移电流强度；
(3) 在 t 时刻极板间的磁场强度；
(4) 在 t 时刻从电容器流出的能流密度。

解： 采用柱坐标(r, θ, z)，

(1) 电路达到稳定时，电容器极板电压 $V_C=\dfrac{R_1V_0}{R_1+R_2}$，

开关 K 断开时，电容器在 R_1 和 R_3 所在的回路中放电，正极板电量满足电路方程

$$(R_1+R_3)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=0$$

(2) 上式解得 $q=q_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{(R_1+R_3)C}}=C\dfrac{R_1V_0}{R_1+R_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{(R_1+R_3)C}}$，

所以 t 时刻电容器放电电流

$$I=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{R_1V_0}{(R_1+R_2)(R_1+R_3)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{(R_1+R_3)C}}$$

电容器内部的位移电流

$$I_d=I=\frac{R_1V_0}{(R_1+R_2)(R_1+R_3)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{(R_1+R_3)C}}$$

(3) 由安培环路定理，$2\pi rB=\mu_0\frac{r^2}{b^2}I_d$，

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 r}{2\pi b^2}I_d\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\mu_0 r}{2\pi b^2}\frac{R_1V_0}{(R_1+R_2)(R_1+R_3)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{(R_1+R_3)C}}\boldsymbol{e}_\theta$$

(4) 在 t 时刻电容器内的能流密度

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}=\frac{q/C}{d}\frac{B}{\mu_0}(-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_\theta)=\frac{R_1^2V_0^2}{(R_1+R_2)^2(R_1+R_3)}\frac{r}{2\pi b^2 d}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{(R_1+R_3)C}}\boldsymbol{e}_r$$

4. 两个共轴等长的薄圆柱壳，内壳半径为 a，均匀分布正电荷 Q，外壳半径为 b，均匀分布$-Q$，圆柱壳长度 $l>>b$. 内外壳以相同角速度$\omega=kt$ 同步转动，其中 k 为正的常数，t 为时间。求全空间的
   (1) 磁场分布；
   (2) 电场分布；
   (3) 能流密度分布。

解：将全空间分为三个区域，I 区：$r<a$，II 区：$a<r<b$，III 区：$r>b$。

(1) 设圆柱的中心轴为 z 轴，内圆柱壳的面电荷密度和面电流分别为

$$\sigma_1=\frac{Q}{2\pi al},\quad \boldsymbol{i}_1=\sigma_1\omega a\boldsymbol{e}_\theta=\frac{Qkt}{2\pi l}\boldsymbol{e}_\theta,$$

外圆柱壳的面电荷密度和面电流分别为

$$\sigma_2=-\frac{Q}{2\pi bl},\quad \boldsymbol{i}_2=-\frac{Qkt}{2\pi l}\boldsymbol{e}_\theta,$$

三个区域的磁场分别为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\mu_0(i_1+i_2)\boldsymbol{e}_z=0,\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=-\mu_0 i_2\boldsymbol{e}_z=-\frac{\mu_0 Qkt}{2\pi l}\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{III}}=0.$$

(2) 电荷 Q 和$-Q$ 在三个区域的电场分别为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}Q}=0,\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}Q}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 lr}\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}Q}=0,$$

变化磁场产生的感应电场在三个区域分别为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}感}=0,\ \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}感}=\frac{\mu_0 Qk(r^2-a^2)}{4\pi rl}\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}感}=\frac{\mu_0 Qk(b^2-a^2)}{4\pi rl}\boldsymbol{e}_\theta.$$

所以三个区域内的总电场分别为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}=0,\ \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 lr}\boldsymbol{e}_r+\frac{\mu_0 Qk(r^2-a^2)}{4\pi rl}\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}}=\frac{\mu_0 Qk(b^2-a^2)}{4\pi rl}\boldsymbol{e}_\theta.$$

(3) 能流密度分布

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{II}}&=\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}\times\frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}}{\mu_0}=\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 lr}\boldsymbol{e}_r+\frac{\mu_0 Qk(r^2-a^2)}{4\pi rl}\boldsymbol{e}_\theta\right)\times\left(-\frac{Qkt}{2\pi l}\right)\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{Q^2kt}{4\pi^2\varepsilon_0 l^2 r}\boldsymbol{e}_\theta-\frac{\mu_0 Q^2k^2(r^2-a^2)t}{8\pi^2 rl^2}\boldsymbol{e}_r,\end{aligned}$$

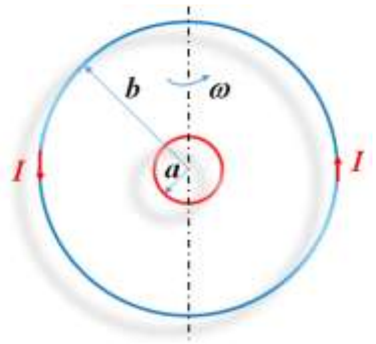
$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}}=0.$$

中 国 科 学 技 术 大 学

2019—2020 学年第二学期《电磁学 A》期末考试试卷

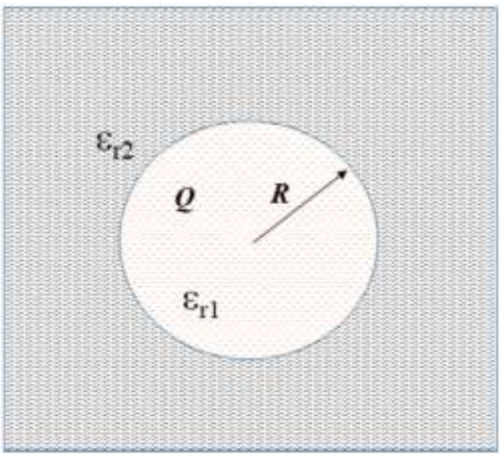
第一题 (10 分)

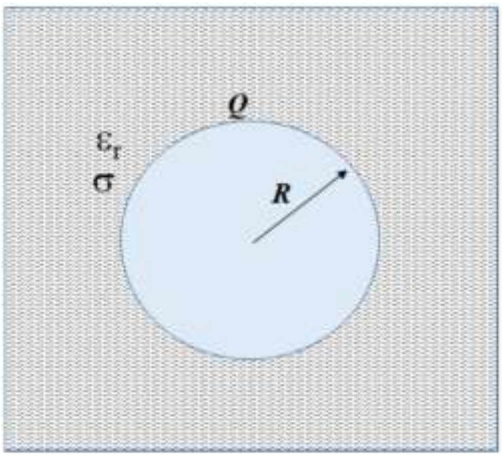
一半径为 a 的导体小线圈，电阻为 R，开始时与一个半径为 b（$b \gg a$）的大线圈共面且同心，固定大线圈，并在其中维持恒定电流 I，使小线圈绕其直径以匀角速度 ω 转动（线圈自感可以忽略），求：(1) 两线圈的互感系数；(2) 小线圈中的感应电流；(3) 维持小线圈转动需要的外力矩；(4) 大线圈中的感应电动势。



第二题 (20 分)

一个半径为 R 的介质球（见左图所示），相对介电常数为 ε_{r1}，球内均匀带电，总带电量为 Q，置于一个无限大相对介电常数为 ε_{r2} 的介质中。 求（1）球内和球外的电场；（2）系统的总静电能；（3）该介质球的等效电容值；（4）如果该球为导体球（见右图所示），球外介质是导电介质，电导率是 σ，求介质中电场随时间的变化规律，并求电荷全部到达无限远处过程中导电介质中产生的焦耳热。

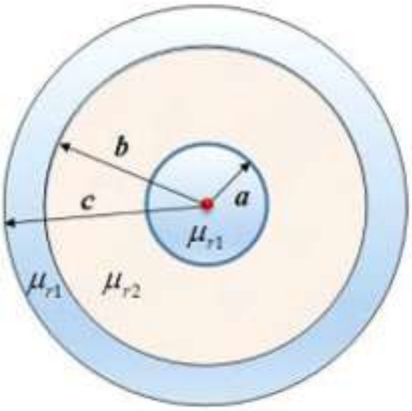


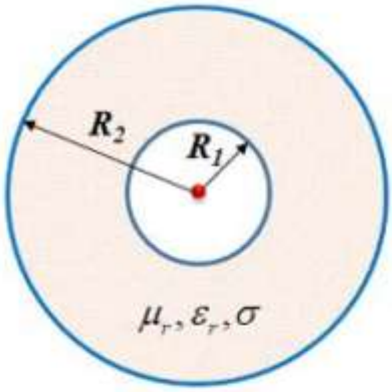


第三题 (20 分)

（1）一个同轴电缆，内实心导体的半径为 a， 外导体圆筒的内半径为 b, 外半径为 c，导体的相对磁导率都为 μ_{r1}， 内外筒之间充满相对磁导率为 μ_{r2} 的磁介质，内外筒沿轴线方向通有等量反向的电流 I，电流均匀分布，见左图。求各区间的磁感应强度，磁场强度和磁化强度，并求单位长度的自感系数。

（2）一个同轴电缆如果内圆柱体是空心的导体，半径为 R_1， 外筒是薄导体筒，半径为 R_2，长度为 d，不考虑边缘效应，内外筒之间填充电磁介质，介质的电导率为 σ，相对介电常数为 ε_r，相对磁导率为 μ_r，见右图所示，若该同轴电缆单位长度的自感、电容和电阻分别为 L、C 和 R，证明：RC=常数，L/R=常数，LC=常数，三个常数只与电磁介质特性有关，请给出三个常数值。





第四题 (18 分)

内、外半径分别为 a、b 的固定导体球壳，球心位于原点 O。已知带电量为 e 的点电荷位于 A 点 $(OA = 2b)$ 时，导体球壳对其所施加的静电力恰好为零。

（1）试求导体球壳所带电量；

（2）如果将点电荷 e 从 A 点移至无穷远处，外界需要抵抗静电力做多大功？

（3）如果将点电荷 e 从 O 点移至 B 点 $(OB = a/2)$，外界需要抵抗静电力做多大功？

第五题 (14 分)

自由空间中传播的单色平面电磁波，已知磁场为

$$\vec{B}(x,y,z,t) = 10^{-4}\cos\left(\frac{8\pi}{3}\times10^{6}x + 2\pi\times10^{6}y + \omega t\right)\hat{z}\ (\mathrm{T})$$

其中 ω 为大于零的常数。真空中的光速设为 $c = 3.0\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$。

（1）试确定沿着电磁波传播方向的单位矢量；

（2）试确定电磁波的波长和频率；

（3）确定电场强度；

（4）求电磁场的平均能量密度以及平均能量流密度的大小（计算中出现的 π 保留，不必代入具体数值）。

第六题 (18 分)

（1）电极化强度为 $\vec{P}$ 的均匀极化介质球，已知其在球内产生的电场是均匀的，而在球外产生的电场则与位于球心处的电偶极子所产生的电场相同。由此可知球内的电场为

$$\vec{E}_{内}=\underline{\qquad\qquad\qquad}。$$

（2）磁化强度为 $\vec{M}$ 的均匀磁化介质球，已知其在球内产生的磁场是均匀的，而在球外产生的磁场则与位于球心处的磁偶极子所产生的磁场相同。由此可知球内的磁场为

$$\vec{B}_{内}=\underline{\qquad\qquad\qquad}。$$

（3）设 O 是一块很大的电介质内部远离边界的一点，已知 O 点的电场强度为 $\vec{E}_0$、电极化强度为 $\vec{P}$，因此 $\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0+\vec{P}$。用 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 分别表示挖出一个以 O 点为中心的很小空腔后 O 点处的电场强度和电位移矢量。试就三种不同的空腔形状，完成下表（用 $\vec{E}_0$、$\vec{P}$ 表示 $\vec{E}$，用 $\vec{D}_0$、$\vec{P}$ 表示 $\vec{D}$）：

空腔形状	$\vec{E}=\vec{E}(\vec{E}_0,\vec{P})$	$\vec{D}=\vec{D}(\vec{D}_0,\vec{P})$
球形		
对称轴平行于 $\vec{P}$ 的细长圆柱		
对称轴平行于 $\vec{P}$ 的薄圆盘		

（4）设 O 是一块很大的磁介质内部远离边界的一点，已知 O 点的磁感应强度为 $\vec{B}_0$、磁化强度为 $\vec{M}$，因此 $\vec{H}_0=\vec{B}_0/\mu_0-\vec{M}$。用 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 分别表示挖出一个以 O 点为中心的很小空腔后 O 点处的磁感应强度和磁场强度。试就三种不同的空腔形状，完成下表（用 $\vec{B}_0$、$\vec{M}$ 表示 $\vec{B}$，用 $\vec{H}_0$、$\vec{M}$ 表示 $\vec{H}$）：

空腔形状	$\vec{B}=\vec{B}(\vec{B}_0,\vec{M})$	$\vec{H}=\vec{H}(\vec{H}_0,\vec{M})$
球形		
对称轴平行于 $\vec{M}$ 的细长圆柱		
对称轴平行于 $\vec{M}$ 的薄圆盘		

装订线 答题时不要超过此线

2021-2022 第一学期 电磁学(C) 期末考试试卷

姓名　　　　　　　　　　　　学号

一. 简答题（30 分）

1) 请写出麦克斯韦方程组的微分形式并阐释麦克斯韦的两个重要假设（10 分）

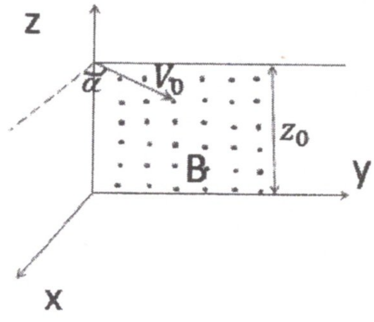
2) 在动生电动势中的非静电力是如何产生的？电动势的能量从何而来？（8 分）

3） 请分析科大校园内的电路是否可以按似稳电路处理？为什么？（6分）

4） 请用安培分子环流假说定性解释物质的磁化过程。（6分）

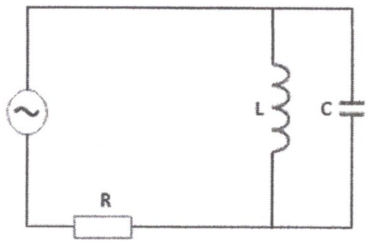
三．分析计算题（70分）

1. （10分） 空间中有沿 x 方向的均匀磁场，其磁感应强度为 B。一质量为 m，带电量为 q 的粒子从位置(0，0，$mV_0\sin\alpha/qB$)进入磁场，其初始速度为 V_0，方向与 z 轴垂直且与 B 的夹角为 α，求 t 时刻粒子所在的位置以及沿 z 方向的速度。



装订线 答题时不要超过此线

2. （10 分） 如图所示的电路，电源提供频率为 ϖ 、振幅为 V_0 的交流电压 ，ϖ 可调。请计算一个周期内电路的存储能量与损耗能量之比？

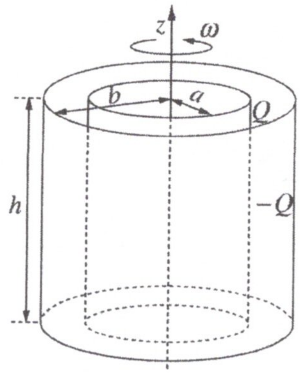


3.（18 分）两个同轴的圆柱面半径分别为 a 和 b，$\boldsymbol{b > a}$，高度为 h，且$\boldsymbol{h \gg b}$。内圆柱面带$\boldsymbol{+Q}$电荷，外圆柱面带$\boldsymbol{-Q}$的电荷，两个圆柱面共同沿中心轴以匀角速度转动，忽略边缘效应。

（1）求空间的磁感应强度分布（6 分）；

（2）计算外圆柱面单位面积的磁场力，并与电场力相比较；（8 分）

（3）计算磁场的能量（4 分）；

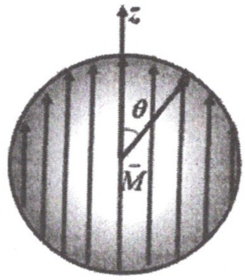


装订线 答题时不要超过此线

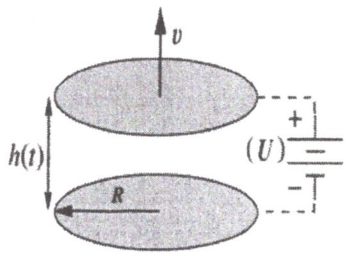
4. （17 分）

（1）一个半径为 R 的磁化球，相对磁导率为 μ_r，磁化强度 M 沿 z 轴方向，且均匀磁化。已知球内磁感应强度是均匀的，球外为等效磁偶极矩产生的磁场。求球内外的磁感应强度；（10 分）

（2）该磁化球产生的总磁场能量。（7 分）



5.（15 分）一个平行板电容器由两个半径为 R 的金属圆盘组成，初始间距为 h_0，下极板保持静止，上极板以速度 v 匀速离开下极板，因此在 t 时刻的间距为 $h(t)=h_0+vt$，设任何时刻均有 $h \ll R$，即忽略边缘效应并忽略变化的磁场带来的电场，假设速度 v 很小，两个极板之间始终接有恒定的电源，电压为 U。求：



（1）两个极板之间的磁场，并求玻印廷矢量；（8 分）

（2）求从电容器侧面单位时间流出的能量，并求电源所接收的功率。（7 分）

装订线 答题时不要超过此线

2021-2022 第一学期 电磁学期中考试试卷（闭卷）

姓名 学号

一. 简答题

1） 请写出介质中静电场基本定理（高斯和环路定理），并简述其物理意义。（6 分）

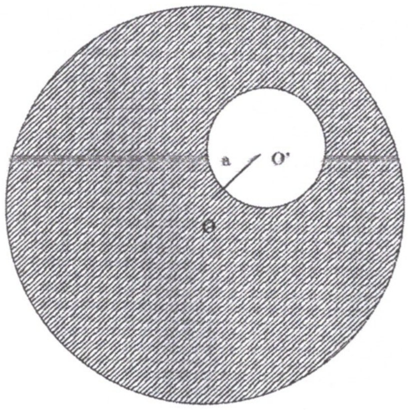
2） 请简述极化电荷和自由电荷之间的异同？（6 分）

3） 请简述电势定义与静电场基本定理的关系。（5 分）

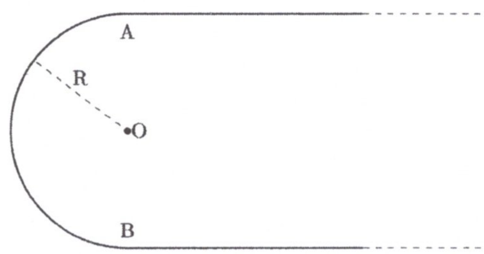
装订线 答题时不要超过此线

4）请简述电动势的定义及其作用。（5 分）

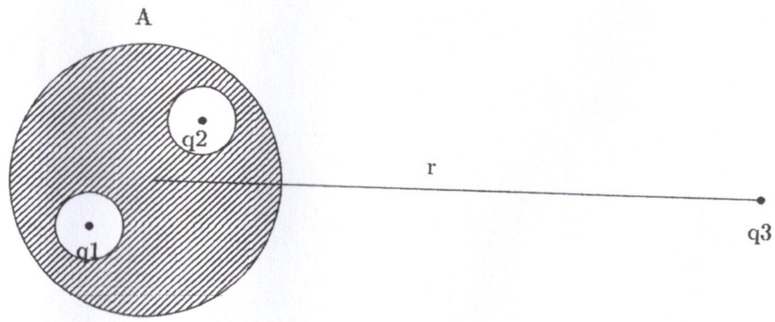
二. 若下图中均匀带电球体的电荷密度为 ρ，球体中心到空腔中心的距离为 a。求空腔中的电场强度。（10 分）



三. 一无限长均匀带电导线，导线上的线电荷密度为λ，一部分弯成半圆形，其余部分为两条无穷长平行直导线，两直线都与半圆的直径 AB 垂直，求圆心 O 的电场强度。（10 分）



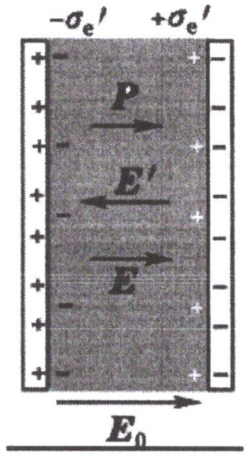
四. 导体 A 内有两个球形空腔。A 上的总电量为 0，两个空腔中心处分别带有+q1 和+q2 的点电荷，在与球相距 r（远远大于导体 A 的几何尺度）有一个点电荷，电量为+q3。求导体 A 受到的静电力。（12 分）



装订线 答题时不要超过此线

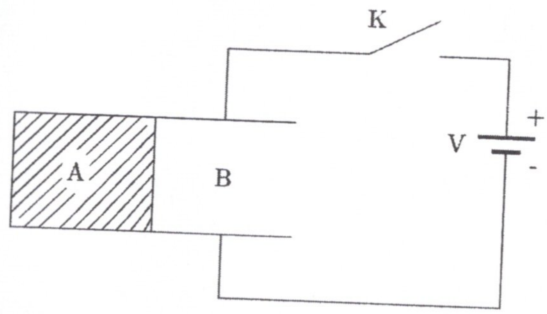
装订线 答题时不要超过此线

五. 平行板电容器间充满极化率为 χ 的均匀线性各向同性介质，电容器极板上的自由电荷面密度为σ，极板面积为 S，板间距为 d，求介质的极化电荷、总电场强度和电容器电容。（12 分）



五：（1）把平行板电容器的两极板接到电源上（接通 K），然后在电容器的左半区域放入介电常量为ε的电介质。计算 A, B 两点的场强以及电容器中能量。

（2）对电容器充电后，先将 K 开关断开，再在左半区放入介电常量为ε的电介质，此时 A、B 处的电场强度相比于（1）有何变化？（12）



六. 一个半径为 R 的带点球，电荷体密度在球内随球心距离 r 成正比，即 $\rho = Ar$（A 为常数）。求：

（1） 球内球外各处电场

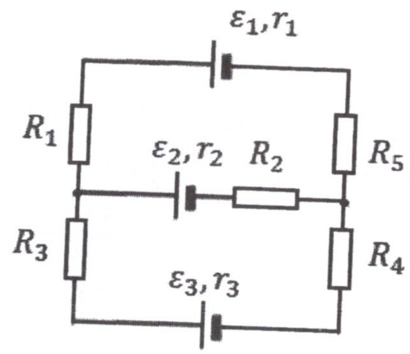
（2） 球内球外各处电势

（3） 球体等效电容

装订线 答题时不要超过此线

装订线 答题时不要超过此线

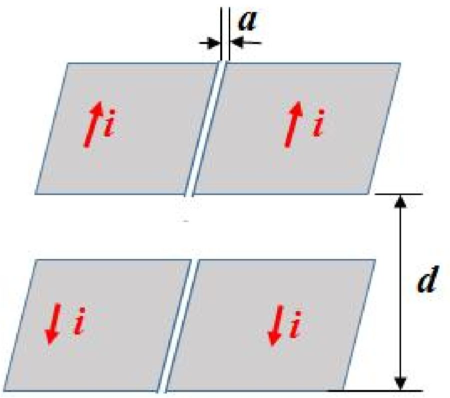
七．一电路图如图所示．已知$\varepsilon_1 = 12V$，$\varepsilon_2 = 10V$，$\varepsilon_3 = 8V$，$r_1 = r_2 = r_3 = 1\Omega$，$R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\Omega$，$R_2 = 3\Omega$，求通过$R_1$的电流（10 分）。

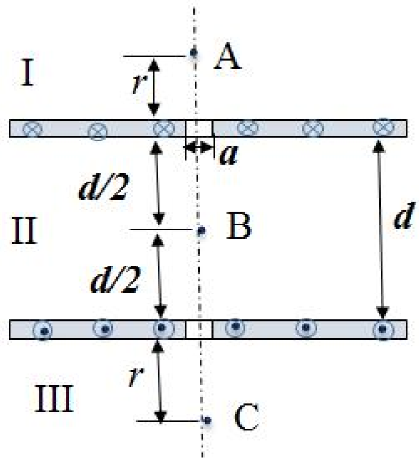


2017 年《电磁学》期末考试公共试题解答

（总分 50 分）

1.（15 分）两个无限大载流平面间距为 d，载有电流密度为 i，电流方向相反，但每块平面中间都有一个小槽，小槽宽度为 a，两条槽中无电流，且距离也为 d. 求三个区域（I,II,III）中 A、B 和 C 三点处的磁感应强度大小与方向，距离见图所示，平面的厚度不计。

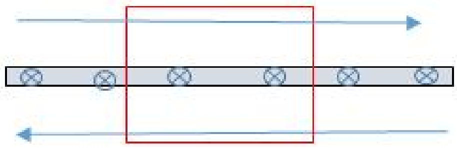




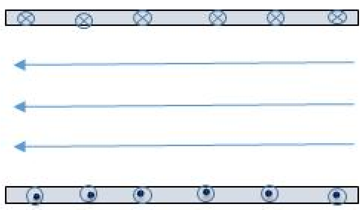
【解】本题可以用叠加原理求解，把每个无电流的槽等效于两个电流方向相反，大小为 $I=ia$ 的叠加， 结果就为无电流的槽。 因此相当于整个无限大载流平面（无槽）面电流为 i，和两根无限长直导线，电流为 I， i 方向与 I 相反所产生的磁感应强度的叠加。

如图，一个无限大载流平面的磁场可利用安培环路定理，有

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



$2BL = \mu_0 iL$， $B = \dfrac{\mu_0}{2} i$，方向如图所示。



两个无限大载流平面， 电流方向相反。叠加后磁场为

I,III 区域为零；

中间区域（II）的磁场为：

$$\vec{B} = -\mu_0 i\vec{e}_z$$

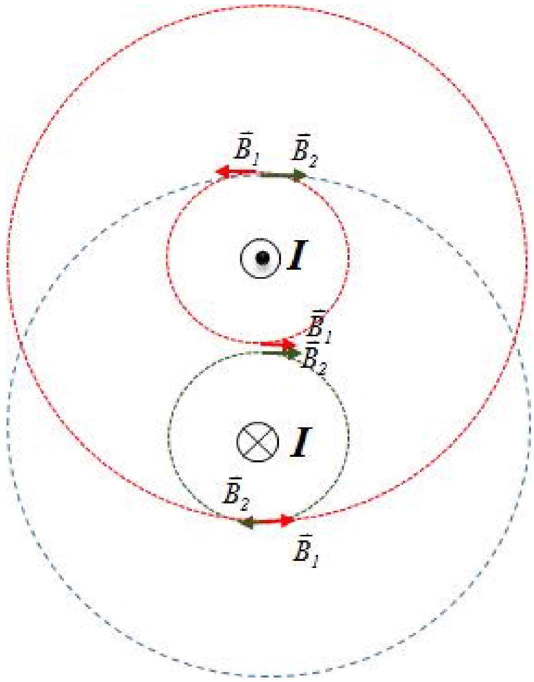
$\vec{e}_z$ 方向水平向右为正方向。

一根无限长直导线的产生的磁场，由安培环路定理有：

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 ia$$

即：

$$B=\frac{\mu_0 ia}{2\pi r}$$



A 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

$$\vec{B}_A=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi r}\vec{e}_z+\frac{\mu_0 ia}{2\pi(r+d)}\vec{e}_z$$

$$=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+d}\right)\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\frac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z$$

B 点由两根无限长导线产生的磁场大小为：

$$\vec{B}_B=\frac{\mu_0 ia}{\pi d}\vec{e}_z+\frac{\mu_0 ia}{\pi d}\vec{e}_z=\frac{2\mu_0 ia}{\pi d}\vec{e}_z$$

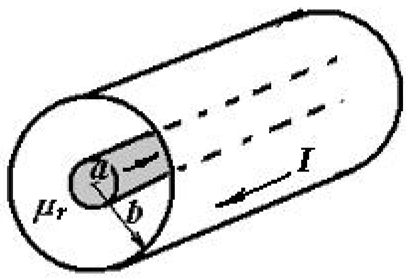
C 点由两根无限长导线产生的磁场大小为

$$\vec{B}_C=\vec{B}_A=-\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\frac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z$$

综合以上结果。 得到 A,B,C 三点的磁感应强度为：

$$\begin{cases} A\text{点：} & \vec{B}_A=-\dfrac{\mu_0 ia}{2\pi}\dfrac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z \\ B\text{点：} & \vec{B}_B=\mu_0 i\left(\dfrac{2a}{\pi d}-1\right)\vec{e}_z \\ C\text{点：} & \vec{B}_C=-\dfrac{\mu_0 ia}{2\pi}\dfrac{d}{r(r+d)}\vec{e}_z \end{cases}$$

2. (15 分)一同轴电缆，中心是半径为 a 的圆柱实心导线，外部是半径为 b 的导体薄圆筒，之间充满相对磁导率为μ_r的介质。电流从实心圆柱导线流进，从外筒流出，设内、外导线电流分布均匀，求:



(1) 介质内外 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的分布；（6 分）

(2) 界面处的磁化电流密度；（6 分）

(3) 电缆单位长度的自感系数。（8 分）

解：（1）由安培环路定理，有

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I$$

有：$r<a$, $2\pi rH_1=\dfrac{I}{\pi a^2}\pi r^2$， $H_1=\dfrac{I}{2\pi a^2}r$， $B_1=\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}$， $M_1=0$

$a<r<b$, $H_2=\dfrac{I}{2\pi r}$， $B_2=\dfrac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}$， $M_2=\dfrac{(\mu_r-1)I}{2\pi r}$

$r>b$, $H_3=0$, $B_3=0$, $M_3=0$

（2）内表面，$r=a$ 处，

$$i_{m1}=\vec{n}\times(\vec{M}_1-\vec{M}_2)=-\vec{n}\times\vec{M}_2=-(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi a}\vec{n}\times\vec{e}_I=(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi a}\vec{e}，$$

e_I 为电流右旋方向单位矢量，e 为电流方向单位矢量。

外表面，$r=b$ 处

$$i_{m2}=\vec{n}\times(\vec{M}_2-\vec{M}_3)=\vec{n}\times\vec{M}_2=(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi b}\vec{n}\times\vec{e}_I=(1-\mu_r)\frac{I}{2\pi b}\vec{e}$$

（3）能量密度：

$$\begin{cases} r<a,\quad \omega_{m1}=\dfrac{1}{2}B_1H_1=\dfrac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} \\ a<r<b, \omega_{m2}=\dfrac{1}{2}B_2H_2=\dfrac{\mu_0\mu_r I^2}{8\pi\ r^2} \\ r>b,\quad \omega_{m3}=0 \end{cases}$$

磁场的能量：$W_m=\iiint\limits_V \omega_m r d\varphi dr dz$

$$\begin{cases} W_{m!}=\dfrac{\mu_0 l I^2}{16\ \pi}, & r<a \\ W_{m2}=\dfrac{\mu_0\ \mu_r l I^2}{4\ \pi}\ln\dfrac{b}{a}, & a<r<b \\ W_{m3}=0, & r>b \end{cases}$$

磁场能量为：$W=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}=\dfrac{1}{2}LI^2$

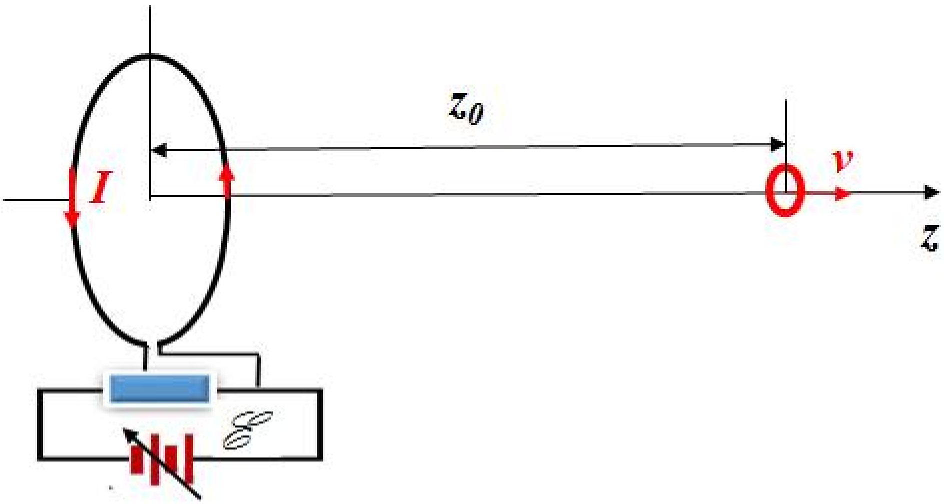
所以单位长度的自感系数 L_0 为：$L_0=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\left[\dfrac{1}{4}+\mu_r\ln\dfrac{b}{a}\right]$

3.（20 分）一个半径为 a 的大线圈接到一个电动势为 $\mathscr{E}$ 的电源上，使之通有电流 I, 其轴上有一个无限小线圈，两者共轴，小线圈面积为 S，电阻为 r.

(1) 设 t=0 时刻两者距离为 z_0，此时小线圈沿轴运动的速度为 v，求小线圈中感应电流大小和方向。（6 分）

(2) 求出此时小线圈受到的安培力；（提示 $\vec{F}=m\dfrac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z$，$m$ 为小线圈的磁矩）（4 分）

(3) 在线圈运动过程中，为了维持大线圈中的电流 I 不变，则需要改变其电动势的值，请给出$\Delta\mathscr{E}$ 的大小，是增加还是减少？（10 分）
(近似认为此时的 v 为常数)



解：（1）大线圈在轴线上的磁感应强度为：

$$B(z)=\frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

小线圈在 t=0 瞬间的磁通量为：

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS=\frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2S}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

小线圈中的感应电流为：

$$i=\frac{\mathscr{E}}{r}=-\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{S}{r}\frac{dB}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{3\mu_0}{2r}\frac{Ia^2Svz}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$

即：$i(z_0)=\dfrac{3\mu_0Ia^2Sv}{2r}\dfrac{z_0}{\left(a^2+z_0^2\right)^{5/2}}$

电流的方向同 I，即按右手螺旋方向为 z 正方向。

（2）小线圈的磁矩为：$\vec{m}=iS\vec{e}_z$，其所受到的梯度力为：

$$\vec{F}=m\frac{\partial B}{\partial z}\vec{e}_z=m\left(-\frac{3\mu_0Ia^2}{2}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\vec{e}_z$$

$$=\left(\frac{3\mu_0Ia^2S^2v}{2r}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\left(-\frac{3\mu_0Ia^2}{2}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\vec{e}_z$$

$$=-\left(\frac{3\mu_0Ia^2S}{2}\right)^2\frac{z^2v}{r\left(a^2+z^2\right)^5}\vec{e}_z$$

z 用 z_0 代入，即为小线圈在 z_0 处受到的作用力， 其方向沿-z 方向，即为阻尼力。

（3）无源小线圈向右运动，而远离大线圈时，其贡献于后者的正向磁通量Φ_{21}要减少， 相应的互感电动势$\mathscr{E}_{21}$为正向, 即$\mathscr{E}_{21}>0$， 为维持 I 不变， 有源大线圈中的电动势需要改变一个$\Delta\mathscr{E}$ ，即使$\Delta\mathscr{E}+\mathscr{E}_{21}=0$, 即

$$\Delta\mathscr{E}=-\mathscr{E}_{21}=-\left(-\frac{d\Phi_{21}}{dt}\right)=M\frac{di}{dt}$$

由上面（1）的磁通量结果，可以得到两线圈之间的互感系数为：

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{2}\frac{a^2S}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

由（1）得到的 i， 有

$$\frac{di}{dt}=\frac{3\mu_0a^2ISv}{2r}\frac{d}{dt}\frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}=\frac{3\mu_0a^2ISv^2}{2r}\frac{\left(1-\frac{5z^2}{\left(z^2+a^2\right)}\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{5/2}}$$
$$=\frac{3\mu_0a^2ISv^2}{2r}\frac{\left(a^2-4z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}}$$

最终有：

$$\Delta\varepsilon=M\frac{di}{dt}=\frac{\mu_0}{2}\frac{a^2S}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\frac{3\mu_0a^2ISv^2}{2r}\frac{\left(a^2-4z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{7/2}}$$
$$=\frac{3\mu_0^2a^4IS^2v^2}{4r}\frac{\left(a^2-4z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)^{52}}$$

可见，$\Delta\mathscr{E}>0$ 或$\Delta\mathscr{E}<0$ 取决于（a^2-$4z^2$），当

$$z>a/2\text{时，}\Delta\mathscr{E}<0$$

$$z<a/2\text{时，}\Delta\mathscr{E}>0$$

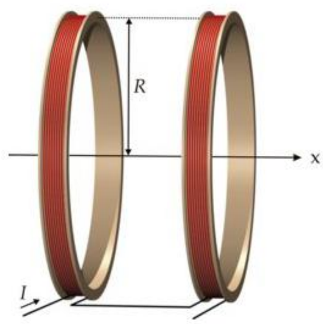
《电磁学》期末考试公共试题

（50 分）

（任意矢量 A 满足：$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$）

一、公共题（共 50 分）

1. (17 分) 磁镜



（1）一个半径为 R，电流为 I 的电流圆环，求在轴线上的磁感应强度。（5 分）

（2）设两个线圈各有 N 匝线圈，通以相同的电流为 I，两个线圈的半径都为 R. 如果两个线圈之间的距离为 $10R$，这时两个线圈之间的磁场就形成了一个磁镜，带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量。宇宙射线中的带电粒子在各个方向均匀进入这个磁镜中，则什么角度范围内的带电粒子进入这个磁镜后会被捕获？（6 分）

（3）带电粒子在磁镜中运动，如果磁感应强度为 B 处的回旋半径 a，证明：（6 分）

$$a\sqrt{B}=\text{不变量}$$

【解】(1) 设电流环的轴线为 x 轴，在圆环上取一段圆弧，则该电流元在轴线上的磁感应强度为：

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{\left(R^2+x^2\right)}$$

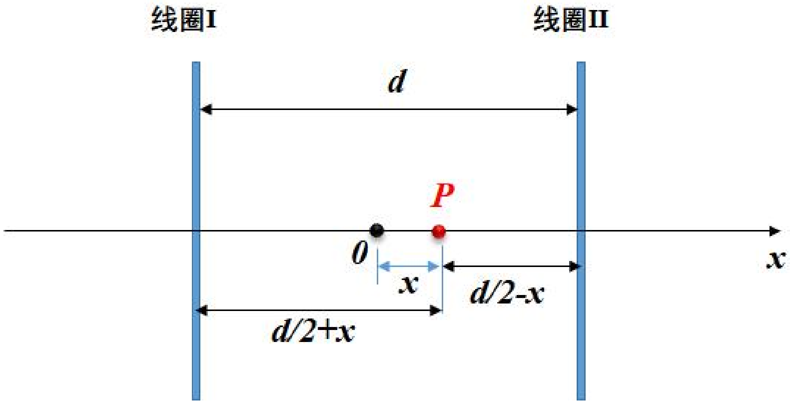
方向垂直于 r 方向，整个电流环在该点叠加的磁感应强度沿 x 轴方向， 所以

$$B=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{\left(R^2+x^2\right)}\sin\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2d\varphi}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

（2）载流 N 匝圆线圈(位于坐标原点)在轴线上某点的磁感应强度为：

$$B_x=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

坐标原点取在两个线圈的中心处，假设两个线圈中心距离为 d， 则两组线圈叠加的磁场为：



$$B_x=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+\left(\frac{d}{2}+x\right)^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+\left(\frac{d}{2}-x\right)^2\right)^{3/2}}$$

如果两个线圈之间的距离为 *10R*，则每个线圈中心处的磁场为最大，其值为

$$B_{\max}=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+(5R+5R)^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(R^2+(5R-5R)^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(101R^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R}\approx\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{1000R}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R}\approx\frac{\mu_0}{2}\frac{NI}{R}$$

中心处磁场为最小， 其值为：

$$B_{\min}=\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(26R^2\right)^{3/2}}+\frac{\mu_0}{2}\frac{NIR^2}{\left(26R^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 NI}{\sqrt{17576}R}\approx 0.0075\frac{\mu_0 NI}{R}$$

带电粒子在磁镜中磁矩是守恒量，磁矩为

$$\mu=SI=\pi R^2\frac{q}{T}=\frac{1}{2}\frac{mv_\perp^2}{B}=\frac{mv^2\sin^2\theta}{2B}$$

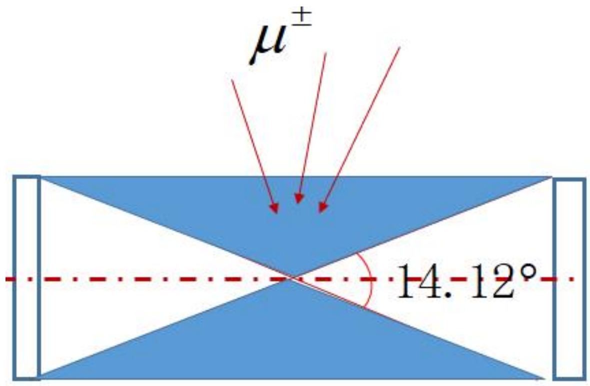
所以

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta}{B_{\min}}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{B_{\max}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{B_{\min}}{B_{\max}}}=\sqrt{\frac{0.0075}{0.5}}=0.1228$$

$$\theta=7.06°$$

即宇宙射线中的带电粒子是以水平轴线成 14.12°的左右两个锥体之外上下两个锥体内进入该磁镜时，会被磁镜捕获。



（3）因为带电粒子在 B 处的回旋半径为

$$a=\frac{mv\sin\theta}{qB}，\quad 则\ a^2=\frac{m^2v^2\sin^2\theta}{q^2B^2}$$

$$\mu=\frac{\frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta}{B}，\quad v^2\sin^2\theta=\frac{2\mu B}{m}，代入上式，\ 有$$

$$a^2=\frac{m^2 2\mu B}{q^2B^2m}=\frac{2m\mu}{q^2B}$$

即：

$$a\sqrt{B}=\sqrt{\frac{2m\mu}{q^2}}=守恒量$$

因为电量，质量（非相对论）和磁矩都是不变量；所以该式是不变量。

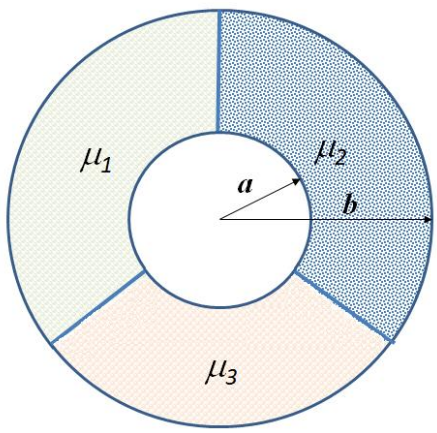
2.（16 分）同轴电缆

同轴电缆的内导体是半径为 a 的空心圆柱，外导体是半径为 b 的薄圆柱面，其厚度可以忽略不计，内、外导体间填充有绝对磁导率分别为μ_1、μ_2 和μ_3 的三种磁介质，每种磁介质均占三分之一的圆柱间体积，分界面正好沿半径方向，如图所示．设内圆柱面内沿轴线方向流有大小相等，方向相反的电流，电流面密度为 i；求：

（1）各区域的磁感应强度和磁场强度；（8 分）

（2）同轴电缆单位长度所储存的磁场能量；（4 分）

（3）同轴电缆单位长度的自感。（4 分）



【解】(1) 由安培环路定律，得:

$$\begin{cases} \vec{H}_0 = 0 \quad (0<r<a) \\ \vec{H}_1+\vec{H}_2+\vec{H}_3 = \dfrac{3i2\pi a}{2\pi r}\vec{e}_\phi = \dfrac{3ia}{r}\vec{e}_\phi \quad (a<r<b) \\ \vec{H}_4 = 0 \qquad\qquad (r>b) \end{cases}$$

由于 $\vec{B}=\mu\vec{H}$，所以

$$\begin{cases} \vec{B}_0 = 0 \quad (0<r<a) \\ \dfrac{\vec{B}_1}{\mu_1}+\dfrac{\vec{B}_2}{\mu_2}+\dfrac{\vec{B}_3}{\mu_3} = \dfrac{3ia}{r}\vec{e}_\phi \quad (a<r<b) \\ \vec{B}_4 = 0 \qquad\qquad (r>b) \end{cases}$$

因为同轴电缆线内外导体间的磁场沿φ，即沿圆柱体的圆周方向，在三种介质分界面上只有法向分量，由边界条件知， $B_1=B_2=B_3$，所有

$$\vec{B}_1=\vec{B}_2=\vec{B}_3=\frac{3ia}{r(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3})}\vec{e}_\phi=\frac{3\mu' ia}{r}\vec{e}_\phi, \quad (a<r<b)$$

$\vec{e}_\varphi$ 是沿圆周方向的单位矢量，按圆柱体内电流的右手螺线方向；$\dfrac{1}{\mu'}=\dfrac{1}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2}+\dfrac{1}{\mu_3}$.

（2）长度为 l 的同轴电缆内的磁场能量为

$$W_m=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{B_1^2}{\mu_1}\frac{2}{3}\pi rldr+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{B_2^2}{\mu_2}\frac{2}{3}\pi rldr+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{B_3^2}{\mu_3}\frac{2}{3}\pi rldr$$

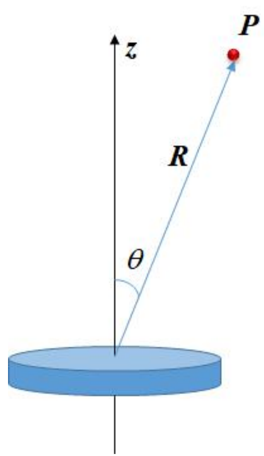
$$=3\pi\mu' i^2a^2l\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

单位长度的磁能为：$\dfrac{W_m}{l}=3\pi\mu' i^2a^2\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

（3）由 $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$；得到： $W_m=\dfrac{1}{2}L\left(2\pi ai\right)^2=2\pi^2a^2Li^2$

单位长度的自感为：

$$L=\frac{2W_m}{I^2l}=\frac{W_m}{2\pi^2a^2i^2l}=\frac{3\pi\mu' i^2a^2l\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi^2a^2i^2l}=\frac{3\mu'}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



3. (17 分) “涡流”

（1）一个半径为 a，非常薄（厚度为 b）的导体圆盘放置在 xy 平面上，导体的电导率为 σ，磁导率为 μ_0, 原点在圆盘中心，空间加上磁场为：$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \varphi)\vec{e}_z$，请给出圆盘上半径为 r 处的涡流密度 j_f.（6 分）

(2)请求出圆盘的总磁矩，并给出远处 P 点（$r>>a$）由涡流产生的磁感应强度。（6 分）

（3）导体置于随时间变化的磁场中时，导体内部会出现“涡流”，即导体中自由电子在涡旋电场作用下形成的电流，涡旋电流又产生磁场，相当于一种“自激”效应。如果导体的电导率为σ，磁导率为 μ_0，当涡流达到稳恒流动时（$\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$），请证明：涡流密度 j_f 满足以下方程：(5 分)

$$\nabla^2 \vec{j}_f = \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_f}{\partial t}$$

解：（1）取一半径为 r 的圆，根据电磁感应定律，由于涡旋电场沿圆的切线方向，大小处处相等，故

$$2\pi r E = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2 = B_0 \omega \pi r^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{E} = \frac{B_0 \omega r}{2}\sin(\omega t + \varphi)\vec{e}_\theta$$

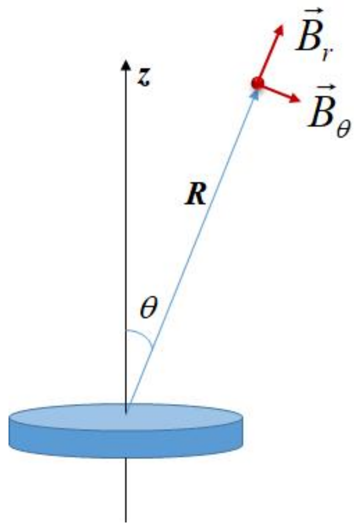
所以，有：

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E} = \frac{B_0 \sigma \omega r}{2}\sin(\omega t + \varphi)\vec{e}_\theta$$

（2）圆盘的磁矩为：

$$dm = \pi r^2 dI = \pi r^2 j_f b dr = \frac{\pi B_0 \sigma b \omega \sin(\omega t + \varphi) r^3 dr}{2}$$

总磁矩为：



$$m = \int_0^a dm = \frac{\pi B_0 \sigma b \omega \sin(\omega t + \varphi)}{2}\int_0^a r^3 dr = \frac{\pi B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{8}$$

$$\vec{m} = m\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2m_{//}}{R^3} = \dfrac{\mu_0}{16}\dfrac{B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{R^3}\cos\theta \\ B_\theta = -\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m_\perp}{R^3} = -\dfrac{\mu_0}{32}\dfrac{B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{R^3}\sin\theta \end{cases}$$

或者总磁感应强度为：(这部分可计算，如没有计算不扣分)

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{\mu_0}{32}\frac{B_0 \sigma b \omega a^4 \sin(\omega t + \varphi)}{R^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

方向，与 r 方向成α角度，其值为：

$$\tan\alpha = \frac{B_\theta}{B_r} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

（3）根据电磁感应定律， 有

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

稳定的涡流满足：$\nabla\cdot\vec{j}=0$， 涡流产生的磁感应强度满足$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_f$，

根据欧姆定律， $\vec{j}_f=\sigma\vec{E}$，代入上式

$$\nabla\times\sigma\vec{E} = -\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\vec{j}_f = -\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

对该式两边用∇左叉乘， 则

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{j}_f\right) = -\sigma\frac{\partial\left(\nabla\times\vec{B}\right)}{\partial t} = -\sigma\mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t}$$

因为：

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{j}_f\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{j}_f\right) - \nabla^2\vec{j}_f = -\nabla^2\vec{j}_f$$

最终得：

$$\nabla^2\vec{j}_f = \sigma\mu_0\frac{\partial\vec{j}_f}{\partial t}$$