§13.4　含参变量反常积分

13.4.1　含参变量反常积分的一致收敛性

这一节我们进一步考虑含参变量的反常积分. 为确定起见, 只讨论具有无穷上限的积分. 其结果可以类推到具有无穷下限及无界函数的积分（即瑕积分）.

假设函数 $f(x,u)$ 在 $I=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 若对任意给定的 $u\in[\alpha,\beta]$, 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$

都收敛, 称为含参变量 u 的广义积分. 这种积分确定了区间 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数

$$u\in[\alpha,\beta]\longmapsto \varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx,$$

我们的目的就是要研究这类函数的连续性、可微性和可积性.

如果把第一节中的无穷区间上函数的积分, 类比于数项级数, 则含参变量的无穷区间上的积分, 可类比于函数项级数. 在函数项级数的理论中, 使得和函数具有连续性、可微性以及可积性一个重要条件是一致收敛性. 在讨论含参变量的广义积分所确定的函数 $\varphi(u)$ 的性质时, 类似的概念也具有决定性的意义.

所谓积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 收敛, 是指对于每个固定的 u, 有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx,$$

即对任意给定的正数 ε, 存在数 $X\ (>a)$, 当 $b>X$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x,u)dx-\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right|=\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon.$$

一般说来, 数 X 不仅依赖于 ε, 而且还依赖于参变量 u.

而一致收敛, 就是要寻找这样的尺度 X, 它对所有 $u\in[\alpha,\ \beta]$, 上式都 "一致地" 成立. 因此我们有

定义 1 如果存在函数 $\varphi(u)$ 使得对任意给定的正数 ε, 总能找到 $X\ (>a)$, 当 $b>X$ 时, 不等式

$$\left|\int_a^b f(x,u)dx-\varphi(u)\right|<\varepsilon$$

对任意 $u\in[\alpha,\beta]$ 成立, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(u)$. 这里的 $[\alpha,\beta]$ 还可以换成开区间或无穷区间.

定理 1 如果对任意给定的正数 ε, 总能找到 $X\ (>a)$, 当 $b>X$ 时, 不等式

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$$

对任意 $u\in[\alpha,\beta]$ 成立, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 这里的 $[\alpha,\beta]$ 还可以换成开区间或无穷区间.

根据前定理不难证明下列结果.

定理 2 无穷区间上含参变量的广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 是一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{b\to+\infty} \beta(b) = 0$$

其中

$$\beta(b) = \sup_{u\in[\alpha,\beta]} \left| \int_b^{+\infty} f(x,u)dx \right|$$

例 1 无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u+x^2}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

这是因为

$$\left| \int_b^{+\infty} \frac{1}{u+x^2}dx \right| \leqslant \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{b} \to 0,\ (b\to+\infty).$$

定理 3 (Cauchy **准则**) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对任意给定的正数 ε, 总存在一个仅与 ε 有关的数 B, 使得当 $b_1, b_2 > B$, 就有不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,u)dx\right| < \varepsilon$$

对区间 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u 值成立.

定理 4 (Weierstrass**判别法**) 设 $f(x,u)$ 在区域 $I=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续. 如果存在一个在 $[a,+\infty)$ 上广义可积的函数 $p(x)$, 使得对于一切充分大的 x 以及 $[\alpha,\beta]$ 上的任意 u 都有

$$|f(x,u)| \leqslant p(x),$$

则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. $p(x)$ 称为它的控制函数.

|◀　▶|　◀　▶　返回　全屏　关闭　退出

例 2 研究积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin ux}{x^2} dx$ 在 $-\infty < u < +\infty$ 上的一致收敛性.

解 对任意的 u, 当 $x \geqslant 1$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin ux}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2},$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故由比较判别法知原积分关于 u 在实轴上一致收敛.

例 3 证明当 $\alpha > 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 在 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 上一致收敛.

证明 由分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}\int_b^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx &= -\frac{x\cos\beta x}{\beta(\alpha^2+x^2)}\bigg|_b^{+\infty} + \frac{1}{\beta}\int_b^{+\infty} \cos\beta x d\frac{x}{\alpha^2+x^2} \\ &= \frac{b\cos b\beta}{\beta(\alpha^2+b^2)} + \frac{1}{\beta}\int_b^{+\infty} \cos\beta x \frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}dx,\end{aligned}$$

由

$$\left|\frac{b\cos b\beta}{\beta(\alpha^2+b^2)}\right| \leqslant \frac{1}{b\beta_0}$$

及

$$\left|\frac{\cos\beta x}{\beta}\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{\beta_0(\alpha^2+x^2)} < \frac{1}{\beta_0 x^2},$$

即知 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 在 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 上一致收敛.

例 4 设 $0 < p \leqslant 1$, 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 对 $u \geqslant 0$ 一致收敛.

证明 任给 $0 \leqslant u < +\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_b^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}dx \\
&= -\frac{e^{-ux}\cos x}{x^p}\bigg|_b^{+\infty} - \int_b^{+\infty}\left(\frac{ue^{-ux}\cos x}{x^p} + \frac{pe^{-ux}\cos x}{x^{p+1}}\right)dx \\
&= \frac{e^{-bu}\cos b}{b^p} - \int_b^{+\infty}\frac{ue^{-ux}\cos x}{x^p}dx - \int_b^{+\infty}\frac{pe^{-ux}\cos x}{x^{p+1}}dx,
\end{aligned}$$

$$\left|\int_b^{+\infty}\frac{ue^{-ux}\cos x}{x^p}dx\right| \leqslant \frac{1}{b^p}\int_b^{+\infty} ue^{-ux}dx = \begin{cases} 0, & u = 0; \\ \frac{e^{-bu}}{b^p}, & u > 0, \end{cases}$$

$$\left|\int_b^{+\infty} p\frac{e^{-ux}\cos x}{x^{p+1}}dx\right| \leqslant \int_b^{+\infty} p\frac{e^{-bu}}{x^{p+1}}dx \leqslant \frac{e^{-bu}}{b^p}.$$

故

$$\left|\int_b^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}dx\right| \leqslant 3\frac{e^{-bu}}{b^p} \leqslant \frac{3}{b^p}.$$

所以, 任给 $\varepsilon > 0$, 当 b 充分大时, 对任意的 $0 \leqslant u < +\infty$, 都有

$$\left|\int_b^{\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}dx\right| < \varepsilon.$$

因此, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ux}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 对 $u \geqslant 0$ 一致收敛.

例 5 证明积分 $\int_a^{+\infty} ue^{-ux}dx$ 在 $0 \leqslant u < +\infty$ 上不一致收敛.

证明 显然积分在 $u \geqslant 0$ 收敛. 因为

$$\left|\int_b^{+\infty} ue^{-ux}dx\right| = \begin{cases} 0, & u = 0; \\ e^{-ub}, & u > 0, \end{cases}$$

所以

$$\lim_{b\to+\infty}\beta(b) = \lim_{b\to+\infty}\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_b^{+\infty} ue^{-ux}dx\right| = 1 \neq 0,$$

故所给积分不一致收敛.

例 6 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xu}{x} dx$ 在 $0 < u < +\infty$ 上不一致收敛.

证明 由于

$$\begin{aligned}
\sup_{u>0} \beta(b) &= \sup_{u>0} \left| \int_b^{+\infty} \frac{\sin xu}{x} dx \right| \\
&= \sup_{u>0} \left| \int_{bu}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\
&\geqslant \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \\
&= \frac{\pi}{2} \not\to 0 \ (b \to +\infty),
\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xu}{x} dx$ 在 $0 < u < +\infty$ 上不一致收敛.

例 7 设对每个 $u \in I$ 函数 $f(x,u)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上非负, 且关于 x 单调递减. 若 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 I 上一致收敛, 则当 $x \to +\infty$ 时, $f(x,u)$ 在区间 I 上一致趋于零.

证明 因为 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间 I 上一致收敛, 所以 $\lim\limits_{b\to+\infty} \beta(b) = 0$, 其中

$$\beta(b) = \sup_{u\in I} \left| \int_b^{+\infty} f(x,u)dx \right|.$$

由于 $f(x,u)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上非负, 且关于 x 单调递减, 所以

$$\begin{aligned}\sup_{u\in I} |f(b,u)| &\leqslant \sup_{u\in I} \left| \int_{b-1}^{b} f(x,u)\,dx \right| \\ &\leqslant \beta(b-1) \to 0 \ (b \to +\infty).\end{aligned}$$

这说明 $f(x,u)$ 在区间 I 上一致趋于零.

例 8 证明积分 $\int_a^{+\infty} e^{-ux^2}dx$ 在 $0<u<1$ 上不一致收敛.

证明 对每个 $u\in(0,1)$ 函数 $f(x,u)=e^{-ux^2}$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上非负，且关于 x 单调递减. 由于

$$\sup_{u\in(0,1)} e^{-ux^2}=1\not\to 0\ (x\to+\infty),$$

所以根据例 7 的结论，积分 $\int_a^{+\infty} e^{-ux^2}dx$ 在 $0<u<1$ 上不一致收敛.

与函数项级数一样, 也有含参变量广义积分一致收敛的较精细的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

定理 5 (Dirichlet 判别法) 设函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 对每个 $u \in [\alpha,\beta]$ 在 $[a,+\infty)$ 中任意有限区间 $[a,b]$ 上可积, 若还满足下面两个条件:

1° 积分 $\int_a^b f(x,u)\,dx$ 关于 $b \geqslant a$ 和 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即, 存在 $M > 0$, 使得

$$\int_a^b f(x,u)\,dx < M,$$

对一切 $b \geqslant a$ 和 $u \in [\alpha,\beta]$ 成立;

2° 对每个固定的 $u \in [\alpha,\beta]$, $g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x \to +\infty$ 时, 关于 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致趋于 0,

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 应用第二积分中值定理, 对固定的 u, 存在 $\xi \in [A, A']$, 使得

$$\int_A^{A'} f(x,u)g(x,u)dx = g(A,u)\int_A^{\xi} f(x,u)dx + g(A',u)\int_{\xi}^{A'} f(x,u)dx.$$

根据条件 1°, 知

$$\left|\int_A^{\xi} f(x,u)dx\right| \leqslant 2M, \quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x,u)dx\right| \leqslant 2M.$$

由条件 2°, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 一定存在 $X > 0$, 使得当 $A,\ A' > X$ 时, 有

$$|g(A,u)| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |g(A',u)| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

所以只要 $A,\ A' > X$, 就有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,u)g(x,u)dx\right| < \varepsilon, \ \forall\, u \in [\alpha, \beta].$$

根据 Cauchy 收敛准则, 定理的结论成立.

定理 6 (Abel **判别法**) 设函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 对每个 $u\in[\alpha,\beta]$ 在 $[a,+\infty)$ 中任意有限区间 $[a,b]$ 上可积, 若还满足下面两个条件:

1° 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛;

2° 对每个固定的 $u\in[\alpha,\beta]$, $g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界,

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.