材料力学试题

（总分：100 分；时间：150 分钟）

第 1 题

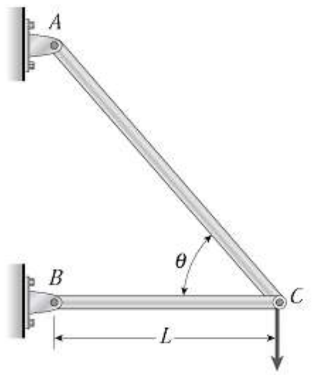
等直圆柱 AB 的长度为 L，直径为 D，材料弹性模量为 E，泊松比 v，剪切屈服应力为 τ_s，自重不计。该圆柱 A 端固定，B 端承受扭矩 M_T 的作用，使该圆柱外表面最大切应力达到 50%的剪切屈服应力。（10 分）

（1）求作用于圆柱上的扭矩 M_T;（5 分）

（2）应用第三强度理论，求在该圆柱 B 端同时最大施加多大的轴向拉伸应力而不产生屈服。（5 分）

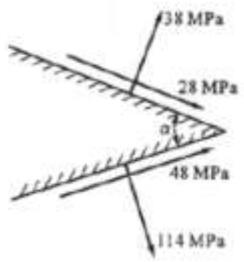
第 2 题

图示杆系中，AC 和 BC 两个杆的材料相同，C 端受竖直向下的力 F 作用，BC 杆长度为 l，AC 杆长度取决于夹角 θ，不计自重，且两杆的抗拉和抗压许用应力相同，均为$[\sigma]$，求为使杆系使用材料最省时的夹角 θ 的值和横截面比值。（10 分）



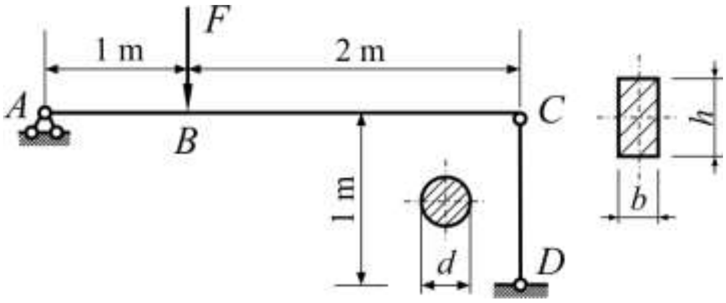
第 3 题

已知平面应力状态下某点处的两个截面上的应力如图所示，试利用应力圆求解该点处的主应力值和主平面方位，并求出两截面间的夹角 α 值。（10 分）



第 4 题

图示结构中，梁 AC 和杆 CD 的材料相同，自重不计，A 处简支，C 和 D 处均球铰连接，B 点受集中载荷 F。已知 $d = 20$ mm，$b = 100$ mm，$h = 180$ mm，$E = 200$ GPa，$\sigma_a = 235$ MPa，$\sigma_b = 400$ MPa，强度安全因数 $n = 2$，稳定安全因数 $n_{st} = 3$，试校核该结构在 B 点处的许可荷载。（10 分）

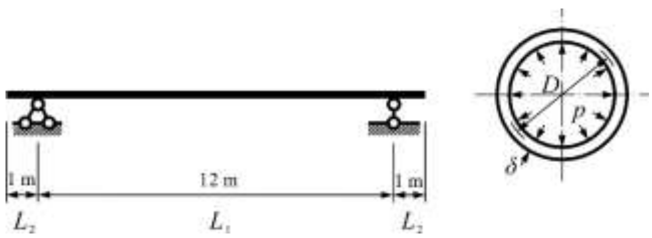


第 5 题

长度为 L 直径为 d 的竖直等截面圆杆 AB，惯性矩为 I，弯曲截面系数为 W，底端 A 处固定，B 端自由，在 C 点处受到质量为 m 的物体（重量为 mg）的水平冲击，冲击接触时的物体的速度为 v_0，AC 长度为 l，试求杆 AB 的危险点的冲击应力。（15 分）

第 6 题

一输气管支撑情况如图所示，管的平均直径 $D = 1$ m，壁厚 $\delta = 30$ mm，材料为钢，密度 $\rho = 7.80 \times 10^3$ kg/m^3，许用应力$[\sigma] = 100$ MPa，试按第三强度理论计算管的许可压强。（15 分）



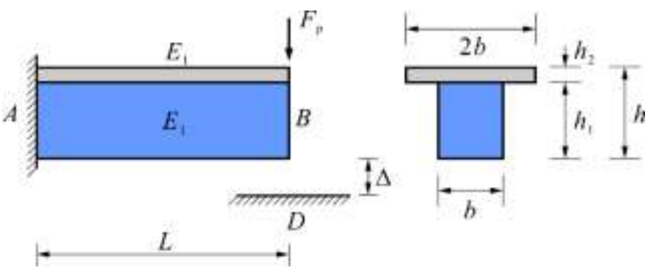
第 7 题

某 T 形截面悬臂梁 AB，弹性模量为 E_1，A 端固定，B 端自由，梁长度为 L，截面如图所示。平面 D 距离 B 端下表面的高度为 Δ，在 B 端作用铅垂向下的载荷 $\boldsymbol{F}_P$。不考虑各部分自重。（15 分）

（1）求组合截面中性轴的位置；（5 分）

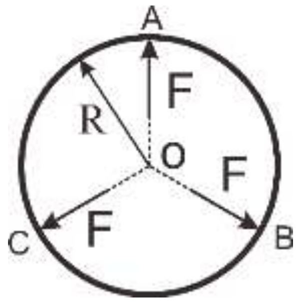
（2）求使梁 B 端下表面刚好接触平面 D 所需的力 $\boldsymbol{F}_P$；（7 分）

（3）计算此时梁 AB 的最大切应力值。（3 分）



第 8 题

半径为 R 的圆环，内侧受等圆心角(120°)的三个径向力 F 作用，圆环材料为线弹性，弯曲刚度 EI，试求圆环径向截面上的最大弯矩以及径向力 F 作用点处的径向位移。（15 分）



1. 等直圆柱 AB 的长度为 L，直径为 D，材料弹性模量为 E，泊松比 v，剪切屈服应力为 τ_s，自重不计。该圆柱 A 端固定，B 端承受扭矩 M_T 的作用，使该圆柱外表面最大切应力达到 50%的剪切屈服应力。(10 分)

（1）求作用于圆柱上的扭矩 M_T;（5 分）

（2）应用第三强度理论，求在该圆柱 B 端同时最大施加多大的轴向拉伸应力而不产生屈服。(5 分)

解：（1）由圆柱扭转剪切应力公式可得：

$$\tau = \frac{M_T}{W_P} = \frac{M_T}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{\tau_s}{2} \qquad (3\text{ 分})$$

因此，可得 B 端扭矩：

$$M_T = \frac{\pi D^3}{32}\tau_s \qquad (2\text{ 分})$$

（2）在圆柱外表面有最大应力，在剪切和轴向拉伸作用下，平面应力状态的主应力为：

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{cases} \qquad (2\text{ 分})$$

根据第三强度理论，有：

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad (2\text{ 分})$$

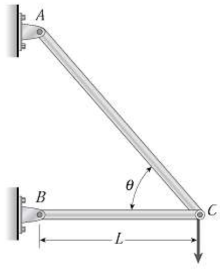
屈服临界条件：

$$\tau_{\max} = \tau_s \qquad ()$$

结合以上式子，可得临界拉伸应力为：

$$\sigma = \sqrt{3}\tau_s \qquad (1\text{ 分})$$

2. 图示杆系中，AC 和 BC 两个杆的材料相同，C 端受竖直向下的力 F 作用，BC 杆长度为 l，AC 杆长度取决于夹角 θ，不计自重，且两杆的抗拉和抗压许用应力相同，均为$[\sigma]$，求为使杆系使用材料最省时的夹角 θ 的值和横截面比值。(10 分)



解：假设 AC 和 BC 的轴力分别为 F_{N1} 和 F_{N2}，C 点处平衡条件为：

$$\sum F_x = 0,\quad F_{N2} - F_{N1}\cos\theta = 0$$
$$\sum F_y = 0,\quad F_{N1}\sin\theta - F = 0 \qquad (2\text{ 分})$$

因此

$$F_{N1} = \frac{F}{\sin\theta},\quad F_{N2} = F\cot\theta \qquad (1\text{ 分})$$

当两个杆同时达到许用应力值，即

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = [\sigma],\quad \sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = [\sigma] \qquad (1\text{ 分})$$

则截面面积为

$$A_1 = \frac{F}{\sin\theta[\sigma]},\quad A_2 = \frac{F\cot\theta}{[\sigma]} \qquad (1\text{ 分})$$

两个杆的体积

$$V = A_1L_1 + A_2L_2 = \frac{Fl}{\sin\theta[\sigma]\cos\theta} + \frac{Fl\cos\theta}{\sin\theta[\sigma]}$$
$$= \frac{Fl}{[\sigma]}\left(\tan\theta + 2\cot\theta\right) \qquad (1\text{ 分})$$

材料最省，即对 V 求极值

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{Fl}{[\sigma]}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{2}{\sin^2\theta}\right) = \frac{Fl}{[\sigma]}\frac{\sin^2\theta - 2\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0 \qquad (2\text{ 分})$$

因此有

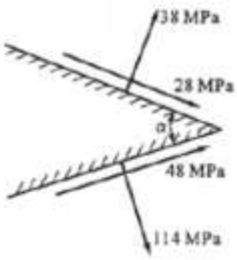
$$\sin^2\theta = 2\cos^2\theta \qquad ()$$

所以

$$\tan\theta = \sqrt{2},\quad \theta = 54.7^\circ \qquad (1\text{ 分})$$

$$A_1 / A_2 = \sqrt{3} \qquad (1\text{ 分})$$

3. 已知平面应力状态下某点处的两个截面上的应力如图所示，试利用应力圆求解该点处的主应力值和主平面方位，并求出两截面间的夹角 α 值。（10 分）



解：两个斜面上的坐标面应力为 A (38, 28)和 B (114, 48)，使用应力圆方法作图，AB 中点 C 为圆心，则

$$\sqrt{(x-38)^2+(0-28)^2}=\sqrt{(x-114)^2+(0+48)^2} \qquad (2\text{ 分})$$

可解得 $x = 86$，即圆心坐标（86, 0）

应力圆半径：

$$r=\sqrt{(86-38)^2+(0-28)^2}=55.57 \qquad (1\text{ 分})$$

因此，主应力为

$$\sigma_1 = x + r = 141.57\,MPa$$
$$\sigma_1 = x - r = 30.43\,MPa \qquad (2\text{ 分})$$

主方向角

$$\tan 2\alpha_2=\frac{28}{48} \qquad (1\text{ 分})$$

因此上斜面 A 与中间主应力平面间夹角为：

$$\alpha_2 = 15.13° \qquad ()$$

所以主方向角为 30.26°；

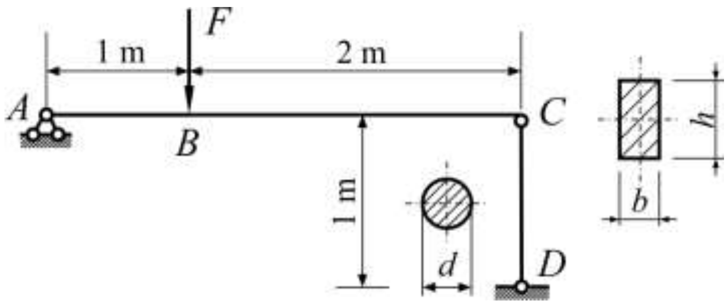
两截面间夹角

$$2\alpha=\left[180°-\left(90°-2\alpha_2\right)\right]+2\alpha_2=90°+4\alpha_2 \qquad (1\text{ 分})$$

所以夹角 $\alpha = 75.26°$（估算结果约为 75°）

本题需要画出应力圆图 (3 分)

4. 图示结构中，梁 AC 和杆 CD 的材料相同，自重不计，A 处简支，C 和 D 处均球铰连接，B 点受集中载荷 F。已知 $d = 20$ mm，$b = 100$ mm，$h = 180$ mm，$E = 200$ GPa，$\sigma_a = 235$ MPa，$\sigma_b = 400$ MPa，强度安全因数 $n = 2$，稳定安全因数 $n_{st} = 3$，试校核该结构在 B 点处的许可荷载。（10 分）



解：杆 CD 受压力：$F_{CD} = F/3$，梁 AC 中最大弯矩：$M_B = 2F/3$；

对于梁 AC，有

$$\sigma=\frac{M_B}{W}=\frac{4F}{bh^2}\le\frac{\sigma_a}{n} \qquad (1\text{ 分})$$

因此

$$F \le \frac{\sigma_a bh^2}{4n} = \frac{235\times10^6\times100\times180^2\times10^{-9}}{4\times2} = 95175N \qquad (2\text{ 分})$$

对于压杆 CD

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 200 > \lambda_p \qquad (1\text{ 分})$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E\pi d^4}{64l^2} = 15.5kN \qquad (3\text{ 分})$$

梁平衡，有 F = 3 F_{CD} =3 F_{cr}，因此

$$[F]_{st} = \frac{3F_{cr}}{n_{st}} = 15.5kN \qquad (1\text{ 分})$$

因此，考虑到压杆稳定，许可荷载为 15.5 kN。 (1 分)

5. 长度为 L 直径为 d 的竖直等截面圆杆 AB，惯性矩为 I，弯曲截面系数为 W，底端 A 处固定，B 端自由，在 C 点处受到质量为 m 的物体（重量为 mg）的水平冲击，冲击接触时的物体的速度为 v_0，AC 长度为 l，试求杆 AB 的危险点的冲击应力。（15 分）

解：冲击物动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (2\text{ 分})$$

假设杆在 C 点的冲击力为 F，冲击挠度为 Δ，由悬臂梁自由端受集中载荷模型可得

$$\Delta = \frac{Fl^3}{3EI} \qquad (2\text{ 分})$$

因此，杆的应变能

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}F\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{3EI}{l^3}\right)\Delta^2 \qquad (2\text{ 分})$$

由机械能守恒，$E_k = V_\varepsilon$，可得

$$\Delta = \sqrt{mv_0^2\left(\frac{l^3}{3EI}\right)} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{mgl^3}{3EI}\right)} \qquad (3\text{ 分})$$

重量 mg 产生的静挠度

$$\Delta_{st} = \frac{mgl^3}{3EI} \qquad (1\text{ 分})$$

因此

$$\Delta = \Delta_{st}\sqrt{\frac{v_0^2}{g\Delta_{st}}} \qquad (1\text{ 分})$$

因此，动荷因数

$$K=\frac{\Delta}{\Delta_{st}}=\sqrt{\frac{v_0^2}{g\Delta_{st}}} \qquad (2\text{ 分})$$

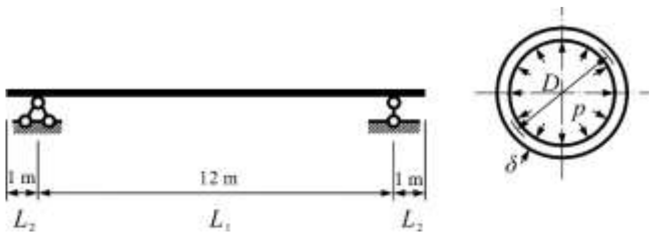
C 点处，外边缘为危险点，冲击物重量引起的静应力为

$$\sigma_{st}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{mgl}{W} \qquad (1\text{ 分})$$

因此，危险点处冲击应力

$$\sigma=K\sigma_{st}=\sqrt{\frac{v_0^2}{g\Delta_{st}}}\frac{mgl}{W} \qquad (1\text{ 分})$$

6. 一输气管支撑情况如图所示，管的平均直径 D = 1 m，壁厚 δ = 30 mm，材料为钢，密度 $\rho = 7.80\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，许用应力[σ] = 100 MPa，试按第三强度理论计算管的许可压强。（15 分）



解：由于要考虑自重，因此这是一个拉伸与弯曲的组合变形

设内压为 p，内压引起环向拉应力，自重是均布荷载，因此危险截面位于跨度中点的截面，最大弯矩为

$$M_{\max}=\frac{\rho gAL_1^2}{8}-\frac{\rho gAL_2^2}{2}=126.2\times10^3\,N\cdot m \qquad (4\text{ 分})$$

危险点位于跨度中点截面的上下边缘处，弯曲正应力

$$\sigma_x=\mp\frac{M_{\max}}{I_z}y_{\max}=\mp5.52\times10^6\,Pa \qquad (3\text{ 分})$$

环向拉应力

$$\sigma_t=\frac{pD}{2\delta}=\frac{100p}{6} \qquad (3\text{ 分})$$

许可压强计算：

应用第三强度理论，危险点在跨度中点截面的上边缘，主应力为

$$\sigma_1=\sigma_t,\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=-\sigma_x \qquad (1\text{ 分})$$

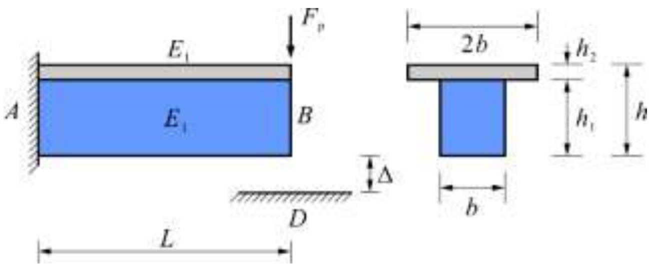
由第三强度理论，有

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\frac{100p}{6}+5.52\times10^6\,Pa\le[\sigma] \qquad (2\text{ 分})$$

所以

$$[p]=5.67MPa \qquad (2\text{ 分})$$

7. 某 T 形截面悬臂梁 AB，弹性模量为 E_1，A 端固定，B 端自由，梁长度为 L，截面如图所示。平面 D 距离 B 端下表面的高度为 Δ，在 B 端作用铅垂向下的载荷 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$。不考虑各部分自重。（15 分）



（1）求组合截面中性轴的位置；（5 分）
（2）求使梁 B 端下表面刚好接触平面 D 所需的力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$；（7 分）
（3）计算此时梁 AB 的最大切应力值。（3 分）

解：（1）截面形心位置

$$y_c=\frac{\int_A ydA}{A}=\frac{\dfrac{h_1^2b}{2}+2bh_2\left(h_1+\dfrac{h_2}{2}\right)}{h_1b+2bh_2}=0.592h_1 \qquad (5\text{ 分})$$

（2）根据等效的 T 形截面梁，计算其惯性矩，使用平行移轴公式和叠加原理

$$\begin{aligned}I_z&=\frac{bh_1^3}{12}+bh_1\left[(0.592-0.5)h_1\right]^2+\frac{2bh_2^3}{12}+2bh_2\left[(1-0.592)h_1+0.5h_2\right]^2\\&=(0.083+0.008)bh_1^3+0.167b(0.1)^3h_1^3+0.2bh_1^3(0.458)^2 \qquad (4\text{ 分})\\&=0.133bh_1^3\end{aligned}$$

由悬臂梁端部集中载荷挠度公式，有

$$\Delta=\frac{F_PL^3}{3E_1I_z} \qquad (2\text{ 分})$$

因此，铅垂力为

$$F_P=\frac{3E_1I_z\Delta}{L^3}=\frac{0.4E_1bh_1^3\Delta}{L^3} \qquad (1\text{ 分})$$

（3）最大切应力

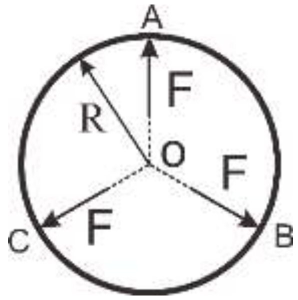
以截面形心的位置为中性轴，则梁 AB 的上下表面的相对位置为 h_1-y_c 和-y_c，因此梁 AB 的切应力计算公式

$$\begin{aligned}\tau&=\frac{F_SS}{bI_z}=\frac{F_S}{bI_z}\left[b(y_c-y)\left(y+\frac{1}{2}(y_c-y)\right)\right]\\&=\frac{F_S}{2I_z}\left(y_c^2-y^2\right)=\frac{3E_1\Delta}{2L^3}\left(y_c^2-y^2\right)\end{aligned} \qquad (2\text{ 分})$$

由该公式可以得到最大切应力

$$\tau_{\max} = \tau|_{y=y_c} = 0.53\frac{E_1 h_1^2 \Delta}{L^3} \qquad (1\ 分)$$

8. 半径为 R 的圆环，内侧受等圆心角(120°)的三个径向力 F 作用，圆环材料为线弹性，弯曲刚度 EI，试求圆环径向截面上的最大弯矩以及径向力 F 作用点处的径向位移。（15 分）



解：利用对称性，取弧 AB 段的一半 AD 进行研究（D 为弧 AB 中点），在截面 D 处存在轴向力 F_N 和弯矩 M_D，而剪力为 0，根据受力平衡，先求轴向力

$$\sum F_y = 0, \quad F/2 - F_N \sin\frac{\pi}{3} = 0 \qquad (1\ 分)$$

因此轴向力

$$F_N = \frac{F}{\sqrt{3}} \qquad (1\ 分)$$

截面 D 处转角为 0，根据卡式定理，有

$$\theta_D = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_D} ds = \int_0^{\pi/3} \frac{F_N R(1-\cos\theta) - M_D}{EI}(-1)(Rd\theta)$$
$$= \frac{\pi R}{3EI}M_D - \frac{FR^2}{\sqrt{3}EI}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \qquad (4\ 分)$$

因此，D 处截面弯矩为

$$M_D = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2\pi}\right)FR \qquad (2\ 分)$$

求截面最大弯矩：

AD 段任意截面的弯矩表达式

$$M = \frac{F}{\sqrt{3}}R(1-\cos\theta) - M_D = \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)FR \qquad (3\ 分)$$

因此，由上式可判断 M_D 为极值点，而最大值在 A 处：

$$M_{\max} = M_A = \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)FR \qquad (1\ 分)$$

径向力 F 作用点处的径向位移：

$$\Delta_A = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F}ds = 2\int_0^{\pi/3} \frac{\left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)FR}{EI} R\left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)(Rd\theta)$$

$$= \frac{2FR^3}{EI}\int_0^{\pi/3}\left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)^2 d\theta \qquad (3\text{ 分})$$

$$= \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{3}{2\pi}\right)\frac{FR^3}{EI}$$