数理方程作业题目解析

班　　级：2020 春数理方程 08 班

授课教师：谢如龙老师

课程助教：高源 张舒博

定稿时间：2020 年春

目录

1 第一章作业题目解析 …… 3
1.1 习题 1.1——求解常微分方程通解 …… 3
1.2 习题 1.2——验证偏微分方程通解 …… 5
1.3 习题 1.3——验证偏微分方程通解 …… 6
1.4 习题 1.4——求偏微分方程特定形式的解 …… 6
1.5 习题 1.5——验证形式解满足偏微分方程 …… 7
1.6 习题 1.6——求解偏微分方程通解 …… 7
1.7 习题 1.7——定解问题书写 …… 9
1.8 习题 1.8——定解问题的书写 …… 10
1.9 习题 1.9——利用通解法求解定解问题 …… 11
1.10 习题 1.10——叠加原理和齐次化原理的应用 …… 14
2 第二章作业题目解析 …… 16
2.1 习题 2.1——求解固有值问题 …… 16
2.2 习题 2.2——求解固有值问题 …… 18
2.3 习题 2.3——书写定解问题并用分离变量法求解 …… 20
2.4 习题 2.4——考察对于系数求解方法的理解 …… 21
2.5 习题 2.5——利用分离变量法求解定解问题 …… 23
2.6 习题 2.7——坐标系选取和高阶问题 …… 30
2.7 习题 2.8——书写定解问题并使用分离变量法求解 …… 34
2.8 习题 2.10——求解非齐次问题 …… 35
2.9 习题 2.11——环域内分离变量法求解定解问题及法向偏导数理解 …… 40
2.10 习题 2.12(3)——矩形区域内分离变量 …… 40
3 第三章作业题目解析 …… 42
3.1 习题 3.1——柱坐标系下分离变量 …… 42
3.2 习题 3.2(2)——贝塞尔函数的微分性质 …… 42
3.3 习题 3.6(1)——贝塞尔函数递推公式应用 …… 42
3.4 习题 3.9——贝塞尔函数积分计算 …… 43

3.5 习题 3.12——给定函数展开为贝塞尔级数 …… 43
3.6 习题 3.13——给定函数展开为贝塞尔级数 …… 44
3.7 习题 3.16——柱坐标系下定解问题的分离变量求解 …… 44
3.8 习题 3.18——定解问题求解 …… 46
3.9 习题 3.19——柱坐标系下定解问题的分离变量求解 …… 48
3.10 习题 3.20——勒让德多项式的重要函数值 …… 49
3.11 习题 3.22——勒让德多项式的积分计算 …… 50
3.12 习题 3.23——勒让德多项式的积分计算 …… 51
3.13 习题 3.24(1)(3)——给定函数的勒让德级数展开 …… 52
3.14 习题 3.25——球坐标系下分离变量求解定解问题 …… 53
3.15 习题 3.27——球坐标系下分离变量求解定解问题 …… 54
3.16 习题 3.28——半球问题 …… 54
3.17 习题 3.29——半空心球问题 …… 57
4 第四章作业题目解析 …… 59
4.1 习题 4.1——傅里叶变换求解定解问题 …… 59
4.2 习题 4.2(1)(2)(3)——拉普拉斯变换求解定解问题 …… 61
4.3 补充习题——余弦变换求解定解问题 …… 63
5 第五章作业题目解析 …… 65
5.1 习题 5.3——求解含有 δ 函数的定解问题 …… 65
5.2 习题 5.4(1)(2)——求解含有 δ 函数的定解问题 …… 66
5.3 习题 5.5——傅里叶变换法求解基本解 …… 67
5.4 习题 5.6——镜像法求解格林函数 …… 68
5.5 习题 5.7——镜像法求解格林函数 …… 69
5.6 习题 5.9——基本解方法求解定解问题 …… 70
5.7 习题 5.10——基本解方法求解定解问题 …… 72
5.8 习题 5.12——基本解方法求解定解问题 …… 72
6 2019 春数理方程 B 期末试题解析 …… 76

第一章作业题目解析

1.1 习题 1.1——求解常微分方程通解

(1) 在极坐标系下，求方程 $\Delta_2 u = 0$ 的形如 $u = u(r)(r = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0)$ 的解.
(2) 在球坐标系下，求方程 $\Delta_3 u + k^2 u = 0$(k 为正常数) 的形如 $u = u(r)$ 的解.
提示: $\Delta_3 u$ 在球坐标系下的形式为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

解：
(1) 由题意知，要求解得到一个形如 $u = u(r)$ 的解，即解与变量 θ 无关. 所以，方程

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0$$

可简化为

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0$$

可以发现这是一个可降阶的二阶常微分方程，令

$$v = \frac{du}{dr}$$

得

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0$$

进一步写成分离变量形式

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r}$$

两边积分得

$$v = \frac{C_0}{r} = \frac{du}{dr}$$

进而得到

$$u = C_0 \ln r + C_1$$

其中 C_0, C_1 为任意常数.

(2) 由题意知，要求解得到一个形如 $u = u(r)$ 的解，即解与变量 θ, φ 无关. 所以，方程

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

可简化为

$$\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 u = 0$$

可以发现，这个常微分方程是一般的二阶常微分方程，不属于可降阶类型，也不是常系数方程，即不属于可以直接求解类型. 因此只能通过变量代换或者函数变换将其转化为熟悉的类型进而求解. 对于这道题目，我们尝试通过函数变换进行求解.(常见的我们了解欧拉方程可以通过变量代换转化为常系数方程，其他类型的问题如果没有题目提示，只能通过尝试，这里我们选择尝试函数变换).

设 $u(r) = v(r)w(r)$(其中我们选择 $v(r)$ 作为函数变换因子，希望将 $w(r)$ 满足的方程转化为二阶常系数微分方程)，并代入方程得

$$v''w + 2v'w' + vw'' + \frac{2}{r}(v'w + vw') + k^2 vw = 0$$

进一步整理得到关于 $w(r)$ 的微分方程

$$w'' + \frac{2v' + \frac{2}{r}v}{v}w' + \frac{v'' + \frac{2}{r}v' + k^2 v}{v}w = 0$$

考虑到我们的目标是将其转化为二阶常系数线性微分方程，即要求 w 及其各阶导数的系数为常数，即

$$\frac{2v' + \frac{2}{r}v}{v} = C_1' \quad \frac{v'' + \frac{2}{r}v' + k^2 v}{v} = C_2'$$

亦即

$$\frac{v' + \frac{1}{r}v}{v} = C_1 \quad \frac{v'' + \frac{2}{r}v'}{v} = C_2$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

则我们只需要求解上述常微分方程组的一个解即可 (往往我们希望这个解尽可能简单). 注意到第一个方程是一阶方程而第二个是二阶方程，则我们首先要求解第一个方程，然后代入第二个方程验证即可 (要注意我们使用函数变换法是要解决一般的非常系数二阶线性常微分方程的求解，这种类型方程不易直接求解，所以我们选择通过函数变换法将其转化为容易求解的类型，即二阶常系数线性常微分方程. 第二个方程也属于这种类型，同样不易直接求解。而第一个方程是一阶方程，一般一阶方程求解相对容易，所以我们的一般做法是，先求解转化得到的一阶方程得到通解，代入二阶方程验证）.

另外注意到 C_1, C_2 为任意常数，即我们只需要找到一组合适的 C_1, C_2 使得方程组有解即可.
第一个方程属于可分离变量类型，分离变量得到

$$\frac{dv}{v} = \left(C_1 - \frac{1}{r}\right) dr$$

解得

$$v = C_3 \frac{e^{C_1 r}}{r}$$

将 v 代入第二个方程得

$$C_1^2 C_3 \frac{e^{C_1 r}}{r} = C_2 C_3 \frac{e^{C_1 r}}{r}$$

则当 $C_2 = C_1^2$ 时上述方程组有解。考虑到使得解尽可能简单，我们取 $C_1 = 0, C_3 = 1$. 则得到解

$$v = \frac{1}{r}$$

代入关于 w 的方程得

$$w'' + k^2 w = 0$$

对于这一二阶常系数线性常微分方程，可以直接通过特征根法求解.

$$w = A \cos kr + B \sin kr$$

进而由 $u(r) = v(r)w(r)$ 得方程的解为

$$u = vw = \frac{1}{r}(A \cos kr + B \sin kr)$$

其中 A, B 为任意常数.

1.2 习题 1.2——验证偏微分方程通解

设 $F(\xi), G(\xi)$ 是任意二次可微函数, λ_1, λ_2 为常数, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 验证:

$$u = F\left(x + \lambda_1 y\right) + G\left(x + \lambda_2 y\right)$$

满足方程

$$u_{yy} - \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) u_{xy} + \lambda_1 \lambda_2 u_{xx} = 0$$

证明：
这个题目要验证给定函数是偏微分方程的一个解，主要考察基本的偏微分计算，要注意偏微分基本概念以及链式法则的应用.

首先按照定义计算各阶偏导数

$$u_{yy}=\lambda_1^2F''+\lambda_2^2G'',u_{xy}=\lambda_1F''+\lambda_2G'',u_{xx}=F''+G''$$

代入等式左边得

$$\lambda_1^2F''+\lambda_2^2G''-(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1F''+\lambda_2G'')+\lambda_1\lambda_2(F''+G'')=0$$

即等式成立. 所以给定函数为偏微分方程的解.

1.3 习题 1.3——验证偏微分方程通解

验证：

$$u=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}(t>0)$$

满足方程

$$u_t=a^2u_{xx}$$

和

$$\lim_{t\to 0}u(t,x)=0(x\neq\xi)$$

证明：
首先计算 u 的各阶偏导数

$$\begin{aligned}
u_t&=-\tfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}+t^{-\frac{5}{2}}\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2}\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\\
u_x&=\tfrac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\left(-\tfrac{x-\xi}{2a^2t}\right)=-t^{-\frac{3}{2}}\left(\tfrac{x-\xi}{2a^2}\right)\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\\
u_{xx}&=-t^{-\frac{3}{2}}\left(\tfrac{1}{2a^2}\right)\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}+t^{-\frac{5}{2}}\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^4}\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}
\end{aligned}$$

代入方程得

$$u_t=a^2u_{xx}$$

即满足方程.
记 $k=\frac{(x-\xi)^2}{4a^2}$，由洛必达法则

$$\lim_{t\to 0}u=\lim_{t\to 0}\frac{\exp\left\{-\frac{k}{t}\right\}}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{\exp\left\{-\frac{k}{t^2}\right\}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{k}{t^2}}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2ke^{\frac{k}{t^2}}}=0$$

1.4 习题 1.4——求偏微分方程特定形式的解

求方程

$$u_{xx}-4u_{yy}=e^{2x+y}$$

的一个形如 $u = axe^{2x+y}$ 的特解.
解：
对于这类求解特定形式的解，只需要将形式解代入方程，比较系数进而得到形式解系数即可.
首先计算各阶偏导数

$$u_x = a(2x+1)e^{2x+y}, u_{xx} = 4a(x+1)e^{2x+y}, u_{yy} = axe^{2x+y}$$

代入方程得到

$$u_{xx} - 4u_{yy} = 4ae^{2x+y} = e^{2x+y}$$

比较系数得 $a = \frac{1}{4}$. 所以方程的形如 $u = axe^{2x+y}$ 的特解为

$$u = \frac{1}{4}xe^{2x+y}$$

1.5 习题 1.5——验证形式解满足偏微分方程

证明 : $u = f(xy)$ 满足方程

$$xu_x - yu_y = 0$$

证明：
首先计算所需偏导数

$$u_x = yf'(xy), u_y = xf'(xy)$$

代入方程得

$$xu_x - yu_y = xyf'(xy) - yxf'(xy) = 0$$

即 $u = f(xy)$ 满足方程

$$xu_x - yu_y = 0$$

1.6 习题 1.6——求解偏微分方程通解

设 $u = u(x, y, z)$, 求下列方程的通解:
(1) $\frac{\partial u}{\partial y} + a(x, y)u = 0$
(2) $u_{xy} + u_y = 0$
(3) $u_u = a^2u_{xx} + 3x^2$ (设$u = u(x, t)$)
提示：先求一个形如 $v(x)$ 的特解.
解：

求解偏微分方程通解常见有三种类型，分别是：可以通过积分直接求解类型，可以通过函数变换转化为可直接积分求解类型，可以通过变量代换转化为可直接积分求解

类型. 其中可直接积分求解类型比较简单，需要注意的是偏微分方程中的积分所带来的任意函数项 (形式上不同于常微分方程积分得到任意常数项，但本质相同)；函数变换和变量代换的方法需要特别掌握. 而对于非齐次方程，其通解的结构为齐次方程通解和非齐次方程特解的叠加，因此要首先根据非齐次项的特点求解出一个尽可能简单的特解，然后就转化为齐次方程通解的求解.

(1) 可分离变量类型. 由于方程中只含有对变量 y 的偏导数，所以可以写成分离变量形式

$$\frac{du}{u} = -a(x,y)dy$$

两边进行积分得

$$\ln u = -\int a(x,y)dy + C(x)$$

所以得到方程的解

$$u = f(x)\exp\left\{-\int a(x,y)dy\right\}$$

(2) 可以通过函数变换转化为可直接积分类型.

作函数变换，令 $p = u_y$, 则方程可化为可分离变量类型

$$p_x + p = 0$$

和第 (1) 小问类似，先进行分离变量，积分可得解

$$p = C(y)e^{-x}$$

即

$$u_y = C(y)e^{-x}$$

进一步积分得到方程的解

$$u = e^{-x}\int C(y)dy + g(x) = e^{-x}f(y) + g(x)$$

其中 f, g 为任意函数.

(3) 非齐次偏微分方程通解. 首先根据非齐次项特点求解一个形式简单的特解，再求解齐次方程通解.

由于非齐次项只含有变量 x，所以求解一个只含有变量 x 的特解.

记方程特解为 $v(x)$. 代入方程得

$$a^2 v''(x) + 3x^2 = 0$$

直接积分得特解

$$v(x) = -\frac{1}{4a^2}x^4$$

接着求解齐次方程通解. 齐次方程属于可通过变量代换转化为可直接积分类型.
通过变量代换可得齐次方程通解为

$$w(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$$

由叠加原理得，方程的通解为

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) - \frac{1}{4a^2}x^4$$

注：由于这个方程是常见方程，通解已知，所以直接写出结果. 对于一般问题使用变量代换方法，详见《数理方程复习指导》.

1.7 习题 1.7——定解问题书写

设有一根具有绝热的侧表面的均匀细杆，它的初始温度为 $\varphi(x)$, 两端满足下列边界条件之一:
(1) 一端 $(x=0)$ 绝热, 另一端 $(x=l)$ 保持常温 u_0
（2）两端分别有恒定的热流密度 q_1 及 q_2 进入
（3）一端 $(x=0)$ 温度为 $\mu(t)$, 另一端 $(x=l)$ 与温度为 $\theta(t)$ 的介质有热交换
试分别写出上述三种热过程的定解问题.
解：
定解问题的书写是需要熟练掌握的一类问题，在这门课程中主要需要掌握三类典型方程和定解条件的书写，及其物理意义.
记方程的解为 $u(t,x)$. 首先写出热传导方程

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

以及初始条件

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

接着根据自然语言描述，结合物理意义，写出边界条件.
(1) 绝热表示热流为 0，对应齐次的第二类边界条件. 保持常温即边界温度为给定的恒定温度分布，对应第一类边界条件. 所以可得边界条件

$$u_x(t,0) = 0, u(t,l) = u_0$$

(2) 恒定热流分布对应第二类边界条件. 记 k 为热传导系数. 边界条件可写作

$$u_x(t,0)=-\frac{q_1}{k},u_x(t,l)=\frac{q_2}{k}$$

(3) 恒定温度分布对应第一类边界条件. 和已知温度外界介质进行热交换，由牛顿冷却定律和傅里叶热传导定律可得，对应第三类边界条件.

$$u(t,0)=\mu(t),(ku_x+hu)|_{x=l}=h(l)\theta(t)$$

补充：
1. 对于波动方程：第一类边界条件的物理意义为对应边界以给定的运动规律进行振动，特别的齐次边界对应固定端；第二类边界条件的物理意义为对应的边界受到给定的外力，特别的齐次边界对应自由端；第三类边界条件的物理意义为对应边界受到弹性物体提供的外力.
2. 对于热传导方程：第一类边界条件的物理意义为对应边界温度分布服从给定分布，特别的当给定分布为常数时对应恒温；第二类边界条件的物理意义为对应边界的热流为给定值，特别的齐次边界对应绝热；第三类边界条件的物理意义为给定边界和已知温度外界介质进行热交换.
3. 对于泊松方程，以场势方程为例：常见的为第一类边界条件，物理意义为对应边界的电势分布为给定分布.

1.8 习题 1.8——定解问题的书写

一根长为 l 而两端（$x=0$ 和 $x=l$ ）固定的弦，用手把它的中点朝横向拨开距离 h，然后放手任其自由振动，试写出此弦振动的定解问题.
解：
记方程的解为 $u(t,x)$. 首先分析题目，所描述的为弦振动问题. 所以泛定方程为

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$

由于两端固定，即为齐次的第一类边界条件

$$u(t,0)=u(t,l)=0$$

按照题目所述分布，写出初始条件.
初始位移

$$u(0,x)=\tfrac{2h}{l}x,0\le x\le\tfrac{l}{2}$$
$$u(0,x)=\tfrac{2h}{l}(l-x),\tfrac{l}{2}<x\le l$$

初始速度

$$u_t(0,x)=0$$

综上所述，定解问题可写作

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \\ u(t,0)=0, u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0\leq x\leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l-x), & \frac{l}{2}\leq x\leq l \end{cases} \\ u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

注意：在书写定解问题时，要注意定解条件的个数和对应的物理意义是否满足题目要求.

1.9 习题 1.9——利用通解法求解定解问题

(1) $u_t=x^2, u(0,x)=x^2$

(2) 球对称的三维波动方程的初始问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta_3 u \\ u|_{t=0}=\varphi(r) \\ u_t|_{t=0}=\phi(r) \end{cases}$$

提示：利用球坐标可将方程化为

$$u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)$$

再令 $v=ru$, 就可化为弦振动方程.

(3)

$$\begin{cases} \Delta_3 u=0\,(x^2+y^2+z^2<1) \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1}=(5+4y)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

提示：当 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>1$ 时

$$u=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

满足方程.

(4) 古尔萨 ($Goursat$) 问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u|_{t+x=0} = \varphi(x), \varphi(0) = \phi(0) \\ u|_{t-x=0} = \phi(x) \end{cases}$$

解：

通解法求解定解问题的步骤为：首先求解泛定方程通解；代入定解条件构建已知函数和未知函数之间的联系；用已知函数表达未知函数代入通解形式解可得定解问题的解.

(1) 首先对泛定方程积分可得

$$u(t,x) = x^2 t + C(x)$$

代入定解条件

$$u(0,x) = C(x) = x^2$$

所以得到定解问题的解

$$u(t,x) = x^2(t+1)$$

(2) 三维波动方程问题，由于定解条件具有对称性，可知解具有对称性. 可以考虑转化为一维波动方程问题，进而利用行波法求解.

首先计算拉普拉斯算子 Δ_3 在球坐标下的表达.

由 $x = r\cos\theta\sin\varphi$ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ 和 $z = r\cos\varphi$, 有 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \theta = \operatorname{arccot}\frac{x}{y}$ $\varphi = \arccos\frac{z}{r}$. 由链式法则，得

$$\begin{aligned} u_x =& u_r\frac{\partial r}{\partial x} + u_\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + u_\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ =& \frac{x}{r}u_r - \frac{y}{x^2+y^2}u_\theta + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{xz}{r^2}u_\varphi \\ u_{xx} =& -\frac{x^2}{r^3}u_r + \frac{1}{r}u_r + \frac{x^2}{r^2}u_{rr} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}u_\theta + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}u_{\theta\theta} \\ & - \frac{x^2z}{r^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}u_\varphi + \frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}u_\varphi - \frac{2x^2z}{r^4\sqrt{x^2+y^2}}u_\varphi + \frac{x^2z^2}{r^4(x^2+y^2)}u_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

类似地计算可知,

$$\begin{aligned} u_{yy} =& -\frac{y^2}{r^3}u_r + \frac{1}{r}u_r + \frac{y^2}{r^2}u_{rr} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}u_\theta + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}u_{\theta\theta} \\ & - \frac{y^2z}{r^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}u_\varphi + \frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}u_\varphi - \frac{2y^2z}{r^4\sqrt{x^2+y^2}}u_\varphi + \frac{y^2z^2}{r^4(x^2+y^2)}u_\varphi \end{aligned}$$

和

$$u_{zz} = -\frac{z^2}{r^3}u_r + \frac{1}{r}u_r + \frac{z^2}{r^2}u_{rr} + \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{r^4}u_\varphi + \frac{x^2+y^2}{r^4}u_{\varphi\varphi}$$

整理后得

$$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$$

由三维拉普拉斯算子的球坐标表达

$$\Delta_3 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

结合对称性，可得泛定方程的球坐标表达

$$u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)$$

可以发现，方程不符合行波法求解要求，需要通过函数变换转化为可使用行波法求解类型.

这里由题目提示可知，函数变换因子可取 $w=\frac{1}{r}$. 如果没有题目提示，可以进行待定函数变换，按照转化目标确定一个合适的函数变换因子，具体方法类似习题 1.1（2）.

引入函数变换 $u=v\cdot w=\frac{1}{r}\cdot v$，将定解问题转化为

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{rr}(t>0,r>0)\\ v|_{t=0}=r\varphi(r)\\ v_t|_{t=0}=r\psi(r)\end{cases}$$

可以发现，转化后 v 满足一维半无界区域弦振动问题，利用延拓法和行波法可得

$$v(t,r)=\begin{cases}\frac{1}{2}[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)]+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi & r>0,0<t\le\frac{r}{a}\\ \frac{1}{2}[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)]+\frac{1}{2a}\int_{at-r}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi & r>0,t>\frac{r}{a}\end{cases}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,r)=\begin{cases}\frac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi & r>0,0<t\le\frac{r}{a}\\ \frac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)]+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi & r>0,t>\frac{r}{a}\end{cases}$$

(3) 由题目提示，定解问题有形如

$$u=\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

的解，其中 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>1$.

代入定解条件得

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2=1\\&(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=5+4y\end{aligned}$$

整理得

$$-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2+1=5+4y$$

比较对应项系数得

$$x_0=z_0=0,y_0=-2$$

验证

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=4>1$$

满足要求. 所以得到定解问题的解

$$u=\left[x^2+(y+2)^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

(4) 首先求解泛定方程通解得

$$u=f(x+t)+g(x-t)$$

代入定解条件得

$$\begin{aligned} u|_{t+x=0}&=f(0)+g(2x)=\varphi(x)\\ u|_{t-x=0}&=f(2x)+g(0)=\psi(x)\end{aligned}$$

则可用已知函数表达未知函数

$$f(x)=\psi\left(\frac{x}{2}\right)-g(0),g(x)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)$$

代入通解得

$$u=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)-g(0)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-f(0)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)$$

1.10 习题 1.10——叠加原理和齐次化原理的应用

利用叠加原理和齐次化原理求解

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=f(t,x)(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u(0,x)=\varphi(x)(a\neq 0,a\text{ 为常数})\end{cases}$$

提示：求齐次方程的通解时，作变量代换 $\xi=x-at,\eta=t$
解：齐次化原理用于求解非齐次发展方程，可以将其转化为齐次问题进而求解. 除了必须是非齐次发展方程外，齐次化原理还有使用条件，即初始条件必须是齐次的. 当初始条件不满足齐次要求时，可以使用叠加原理将其转化为齐次，进而符合齐次化原理使用要求.

首先, 利用叠加原理把问题转换成如下两个问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + a\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ u_1(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} + a\frac{\partial u_2}{\partial x} = f(t,x) \\ u_2(0,x) = 0 \end{cases}$$

令 $\xi = x - at, \eta = t$, 则

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -a\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}.$$

则 u_1 满足的方程可变为

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0$$

解得

$$u_1 = \psi(\xi) = \psi(x - at)$$

代入定解条件得

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

所以

$$u_1 = \varphi(x - at)$$

利用齐次化原理求解 u_2 . w 满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ w(\tau,x) = f(\tau,x) \end{cases}$$

解得

$$w = f(\tau, x + a(\tau - t))$$

由积分公式得

$$u_2 = \int_0^t f(\tau, x + a(\tau - t))d\tau.$$

所以定解问题的解为

$$u = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x + a(\tau - t))d\tau$$

第二章作业题目解析

2.1 习题 2.1——求解固有值问题

求方程 $y'' + \lambda y = 0 (0 < x < l)$ 在下列边界条件下的固有值和固有函数：(1)
$y'(0) = 0, y(l) = 0$
(2) $y'(0) = 0, y'(l) + hy(l) = 0$
(3) $y'(0) - ky(0) = 0, y'(l) + hy(l) = 0 (k, h > 0)$
解：
首先要注意，固有值问题本质上是常微分方程定值问题，只不过含有未知参数 λ. 求解固有值问题的方法就是，求解一般常微分方程定值问题的方法. 首先求解常微分方程，进而根据定解条件得到解. 由于我们主要研究二阶线性偏微分方程，所以固有值问题主要是二阶线性常微分方程问题. 其中我们熟悉的常微分方程问题主要是可降阶的二阶常微分方程和常系数线性微分方程，其他的一般类型则需要尝试利用函数变换或变量代换进行求解，例如欧拉方程.

对于本题所述固有值问题
当 $\lambda = 0$ 时, $y = Ax + B$
当 $\lambda < 0$ 时, 令 $\lambda = -k^2 (k > 0), y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$
当 $\lambda > 0$ 时, 令 $\lambda = k^2 (k > 0), y = A\cos kx + B\sin kx$.
我们需要分情况讨论, 代入边界条件来确定待定参数 λ 的取值范围以及对应的解的形式和系数值.
(1) $\lambda = 0$ 时，由定解条件得 $y'(0) = A = 0, y(l) = B = 0$, 即只有零解，不成立.
$\lambda < 0$ 时, 由定解条件得

$$\begin{cases} Ak - Bk = 0 \\ Ae^{kl} + Be^{-kl} = 0 \end{cases}$$

解得 $A = B = 0$, 即只有零解，不成立.
$\lambda > 0$ 时，由定解条件得

$$\begin{cases} -kA\sin 0 + kB\cos 0 = 0 \\ A\cos kl + B\sin kl = 0 \end{cases}$$

由第一个式子得 $B=0$, 则由非零解知 $A\neq 0$. 由第二个式子得 $\cos kl=0$ ，得

$$k=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}$$

所以得到，固有值

$$\lambda_n=\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\right]^2$$

固有函数

$$y_n(x)=A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$$

(2) $\lambda=0$ 时，由定解条件得

$$y'(0)=A=0, y'(l)+hy'(l)=hB=0$$

由 $h>0$ 得 $B=0$,，即只有零解，不成立.
$\lambda<0$ 时，由定解条件得

$$\begin{cases}Ak-Bk=0\\ Ake^{kl}-Bke^{-kl}+h\left(Ae^{kl}+Be^{-kl}\right)=0\end{cases}$$

由第一个式子，解得 $A=B$. 代入第二个式子得

$$A\left(ke^{kl}-ke^{-kl}+he^{kl}+he^{-kl}\right)=0$$

由 $k,l>0$ 知 $e^{kl}>e^{-kl}$, 从而

$$ke^{kl}-ke^{-kl}+he^{kl}+he^{-kl}>0$$

所以 $A=0$, 即只有零解，不成立.
$\lambda>0$ 时，由定解条件得

$$\begin{cases}-kA\sin 0+kB\cos 0=0\\ -kA\sin kl+kB\cos kl+h(A\cos kl+B\sin kl)=0\end{cases}$$

由第一个式子得 $B=0$, 故 $A\neq 0$, 由第二个式子得

$$\tan kl=\frac{h}{k}$$

即固有值 λ_n 为

$$\tan\sqrt{\lambda}l=\frac{h}{\sqrt{\lambda}}$$

的正根.
固有函数为

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x$$

(3) $\lambda = 0$ 时, 由定解条件得

$$\begin{cases} A - kB = 0 \\ A + h(Al + B) = 0 \end{cases}$$

由第一个式子得 $A = kB$. 代入第二个式子得

$$(hkl + h + k)B = 0$$

由 $k, h > 0$ 得 $B = 0$, 从而 $A = 0$ ，即只有零解，不成立.
$\lambda < 0$ 时, 设 $\lambda = -t^2 (t > 0)$ 原方程通解为 $y = Ae^{tx} + Be^{-tx}$ 由定解条件得

$$\begin{cases} -2Bk = 0 \\ (Ak + Ah)e^{tl} + (Bh - Bk)e^{-tl} = 0 \end{cases}$$

由第一个式子，解得 $B = 0$, 代入第二个式子得 $A(k + h)e^{tl} = 0$, 所以 $A = 0$，即只有零解，不成立.
$\lambda > 0$ 时, 设 $\lambda = t^2 (t > 0)$, 原方程通解为 $y = A\cos tx + B\sin tx$ 由定解条件得

$$\begin{cases} Bt - Ak = 0 \\ (Ah + Bt)\cos tl + (Bh - At)\sin tl = 0 \end{cases}$$

由第一个式子得 $B = \frac{Ak}{t}$，代入第二个式子解得

$$\cot tl = \frac{1}{h + k}\left(t - \frac{kh}{t}\right)$$

得固有值 λ_n 为

$$\cot\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{h + k}\left(\sqrt{\lambda} - \frac{kh}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

的正根.
固有函数

$$y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x + \frac{k}{t_n}\sin\sqrt{\lambda_n}x$$

2.2 习题 2.2——求解固有值问题

解下列固有值问题：

(1)

$$\begin{cases} y''-2ay'+\lambda y=0(0<x<1, a \text{ 为常数}) \\ y(0)=y(1)=0; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} (r^2R')'+\lambda r^2R=0(0<r<a) \\ |R(0)|<+\infty, R(a)=0 \end{cases}$$

提示: 令 $y=rR$

解:

(1) 常微分方程为二阶常系数线性常微分方程，利用特征根法求解.

特征方程 $\mu^2-2a\mu+\lambda=0$, 其判别式 $\Delta=4a^2-4\lambda$

当 $\Delta=0$ 时，特征根为 $\mu_1=\mu_2=a$，方程的解为 $y(x)=(A+Bx)e^{\mu x}$ 由定解条件得 $A=B=0$，即只有零解，不成立.

当 $\Delta>0$ 时，有两个互异特征根 μ_1,μ_2 ，方程的解为 $y(x)=Ae^{\mu_1 x}+Be^{\mu_2 x}$, 由定解条件得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ Ae^{\mu_1}+Be^{\mu_2}=0 \end{cases}$$

解得 $A=B=0$, 即只有零解，不成立.

当 $\Delta<0$ 时, 特征根 $\mu=a\pm\sqrt{\lambda-a^2}i$. 记 $\beta=\sqrt{\lambda-a^2}$，方程的解为

$$y(x)=e^{ax}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$

代入定解条件得 $A=0$. 又 $B\neq 0$，则 $\sin\beta=0$，解得 $\beta=n\pi$

所以，固有值为

$$\lambda_n=a^2+(n\pi)^2$$

固有函数为

$$y_n(x)=e^{ax}\sin n\pi x$$

(2) 泛定方程写作

$$r^2R''+2rR'+\lambda r^2R=0$$

按照提示作变量代换，令 $y=rR$. 代入方程得

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(a)=0 \end{cases}$$

此固有值问题参考第一小题，类似地可以解得

固有值

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

固有函数

$$R_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{a}$$

2.3 习题 2.3——书写定解问题并用分离变量法求解

一条均匀的弦固定于 $x=0$ 及 $x=l$, 在开始的一瞬间，它的形状是一条以 $\left(\frac{l}{2},h\right)$ 为顶点的抛物线, 初速度为零, 且没有外力作用，求弦作横振动的位移函数.

解：

首先写出定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{0x} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \frac{4h}{l^2}x(l-x), u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(t,x) = T(t)X(x)$.

代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求解得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}$$

进而得到

$$u_n(t,x) = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l} + D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

累加得到形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi at}{l} + D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

即完成了解在固有函数系上的展开. 下一步则是定解条件在固有函数系上的展开.

代入初始条件得

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{-4h}{l^2}x(x-l)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$$

和

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

利用正交性求解系数得

$$C_n=\frac{16h}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\frac{32h}{(n\pi)^3}, & n=2k+1\\ 0 & ,n=2k\end{cases}$$

和 $D_n=0$.
所以，定解问题的解为

$$u(t,x)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$$

说明：这道题目的系数求解过程涉及复杂的积分运算，主要利用分部积分进行求解. 读者要注意相关计算的训练.

2.4 习题 2.4——考察对于系数求解方法的理解

利用圆内狄氏问题的一般解式，解边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0(r<a)\\ u|_{r=a}=f\end{cases}$$

其中，f 分别为：
(1) $f=A$(常数)
(2) $f=A\cos\theta$
(3) $f=Axy$
(4) $f=\cos\theta\sin 2\theta$
(5) $f=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta$
解：
这道题目主要考察分离变量法中形式解的系数的求解，即考察对于施刘定理所述固有函数系正交性的理解.

按照教材 2.2 节的方法，首先求得形式解

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_kr^k+B_kr^{-k}\right)\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)$$

由于在圆内解题，结合函数性质及解的有界性得

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}r^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)$$

(1) 代入边界条件得

$$u(a,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)=A$$

比较对应项系数得

$$A_0=A, C_k=D_k=0, k>0$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=A$$

(2) 代入边界条件得

$$u(a,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)=A\cos\theta$$

比较对应项系数得

$$A_0=0, C_1=\frac{A}{a}, D_1=0, C_k=D_k=0, k>1$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=A\cdot\frac{r}{a}\cos\theta$$

(3) 代入边界条件得

$$u(a,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)=\frac{1}{2}Aa^2\sin 2\theta$$

比较对应项系数得

$$A_0=0, C_2=0, D_2=\frac{A}{2}, C_k=D_k=0, k\neq 2$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{A}{2}r^2\sin 2\theta$$

(4) 代入边界条件得

$$u(a,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin 3\theta)$$

比较对应项系数得

$$D_1=\frac{1}{2a},\quad D_3=\frac{1}{2a^3},\qquad \text{其他系数为}0$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\sin\theta+\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin 3\theta\right)$$

(5) 代入边界条件得

$$u(a,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2}\cos 2\theta$$

比较对应项系数得

$$A_0=\frac{A+B}{2},C_2=\frac{B-A}{2a^2},\quad \text{其他系数为}0$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2}\frac{r^2}{a^2}\cos 2\theta$$

说明：这道题目考察对于系数求解方法的理解，其本质是比较对应项系数. 这道题目由于定解条件具有特殊性——是固有函数的某一项的常数倍或者某几项的线性组合，因而可以直接比较系数得到解. 对于一般的问题，我们希望比较系数，进而希望能够将其变为这种基本的情形，所以利用正交性，通过积分消去无关项，进而得到其中一项及其系数，从而可以直接比较系数求解.

2.5 习题 2.5——利用分离变量法求解定解问题

解下列定解问题

(1)

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}(0<x<l,t>0)\\ u(t,0)=u_x(t,l)=0\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=x\end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}(0<x<l,t>0) \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=x(l-x) \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_u = a^2u_{xx}-2hu_t \\ \left(0<x<l,t>0,0<h<\frac{\pi a}{l},h\text{ 为常数}\right) \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=\varphi(x),u_t(0,x)=\phi(x) \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}(0<x<l,t>0) \\ u_x(t,0)=0,u_x(t,l)+hu(t,l)=0(h>0,h\text{ 为常数}) \\ u(0,x)=\varphi(x),u_t(0,x)=\phi(x) \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0(r<a) \\ u_r(a,\theta)-hu(a,\theta)=f(\theta)(h>0) \end{cases}$$

特别地，计算 $f(\theta)=\cos^2\theta$ 时 u 的值.

(6) 环域内的狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0(a<r<b) \\ u(a,\theta)=1,u(b,\theta)=0 \end{cases}$$

(7) 扇形域内的狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0(r<a,0<\theta<\alpha) \\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0 \\ u(a,\theta)=f(\theta) \end{cases}$$

解：

(1) 写出分离变量形式，令 $u(t,x)=T(t)X(x)$.

代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at+B_n\sin\frac{2n+1}{2l}\pi at$$

进而得到形式解

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(A_n\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at+B_n\sin\frac{2n+1}{2l}\pi at\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

代入初始条件得

$$u(0,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x=0$$

和

$$u_t(0,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2l}\pi aB_n\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x=x$$

进而得到

$$A_n=0,\quad B_n=\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^l x\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx=(-1)^n\frac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3 a}$$

所以得到定解问题的解

$$u(t,x)=\frac{16l^2}{a\pi^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

(2) 写出分离变量形式，令 $u(t,x)=T(t)X(x)$.
代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

进而得到形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a^2}{l}\right)} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = x(l-x)$$

进而得到

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{4l^2}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)$$

所以得到定解问题的解

$$u(t,x) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\left(\frac{2n+1}{l}\pi a\right)^2 t}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x$$

(3) 写出分离变量形式，令 $u(t,x) = T(t)X(x)$.
代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} + \frac{2h}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = e^{-ht}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)$$

进而得到形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ht}\cdot\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\varphi(x)$$

和

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\omega_nB_n-hA_n)\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)$$

进而得到

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n=\frac{A_n}{w_n}h+\frac{2}{w_nl}\int_o^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

所以，定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-ht}\cdot(A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n=\frac{A_n}{w_n}h+\frac{2}{w_nl}\int_o^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

(4) 写出分离变量形式，令 $u(t,x)=T(t)X(x)$.

代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=0,X'(l)+hX(l)=0\end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$k_n\tan k_nl=h,\lambda_n=k_n^2,\quad X_n(x)=\cos k_nx$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t)=A_n\cos k_nat+B_n\sin k_nat$$

进而得到形式解

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)x_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos k_nat+B_n\sin k_nat)\cos k_nx$$

代入初始条件得

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos k_nx=\varphi(x)$$

和

$$u_t(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}k_naB_n\sin k_nx=\psi(x)$$

计算积分

$$\int_0^l\cos^2k_nxdx=\frac{1}{2}\int_0^l(1+\cos 2k_nx)\,dx=\frac{1}{2}\left(l+\frac{\sin 2k_nl}{2k_n}\right)=\frac{l}{2}+\frac{1}{2k_n}\cdot\frac{k_nh}{k_n^2+h^2}=\frac{l}{2}+\frac{h}{2\left(k_n^2+h^2\right)}$$

进而得到

$$A_n=\frac{2\int_0^l\varphi(x)\cos k_nxdx}{\frac{l}{2}+\frac{h}{2(k_n^2+h^2)}},\quad B_n=\frac{2\int_0^l\psi(x)\cos k_nxdx}{k_na(\frac{l}{2}+\frac{h}{2(k_n^2+h^2)})}$$

所以，定解问题的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)x_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos k_nat+B_n\sin k_nat)\cos k_nx$$

其中

$$A_n=\frac{2\int_0^l\varphi(x)\cos k_nxdx}{\frac{l}{2}+\frac{h}{2(k_n^2+h^2)}},\quad B_n=\frac{2\int_0^l\psi(x)\cos k_nxdx}{k_na(\frac{l}{2}+\frac{h}{2(k_n^2+h^2)})}$$

(5) 按照教材 2.2 节所述，有形式解

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_kr^k+B_kr^{-k}\right)(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta)$$

由于在圆内解题，由解的有界性, 形式解可简化为

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}r^k\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)$$

代入边界条件得

$$\begin{aligned}u_r(a,\theta)-hu(a,\theta)&=\sum_{k=1}^{+\infty}ka^{k-1}\left(c_k\cos k\theta+D_R\sin k\theta\right)-[hA_0+h\sum_{k=1}^{+\infty}a^k\left(c_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)]\\&=-hA_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(k-ha)a^{k-1}\left(C_k\cos k\theta+D_k\sin k\theta\right)\end{aligned}$$

进而得到

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi h}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

和

$$C_k = \frac{1}{\left(ka^{k-1} - ha^k\right)\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos k\theta d\theta, \quad D_k = \frac{1}{\left(ka^{k-1} - ha^k\right)\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin k\theta d\theta$$

特别地，$f(\theta) = \cos^2\theta$ 时，有

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta = -hA_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(k - ha)a^{k-1}\left(C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta\right)$$

比较对应项系数得

$$A_0 = -\frac{1}{2h}, C_2 = \frac{1}{2\left(2a - ha^2\right)}, \quad \text{其他系数为0}$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2h} + \frac{r^2\cos 2\theta}{2\left(2a - ha^2\right)}\cos 2\theta$$

(6) 按照教材 2.2 节所述，有形式解

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0\ln r + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k r^k + B_k r^{-k}\right)\left(C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta\right)$$

由于在环域内解题，各项都有界，所以形式解为最简.
代入边界条件得

$$u(a,\theta) = A_0 + B_0\ln a + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k a^k + B_k a^{-k}\right)\left(C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta\right) = 1$$

和

$$u(b,\theta) = A_0 + B_0\ln b + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k b^k + B_k b^{-k}\right)\left(C_k\cos k\theta + D_k\sin k\theta\right) = 0$$

进而得到

$$A_0 = \frac{-\ln b}{\ln a - \ln b}, \quad B_0 = \frac{1}{\ln a - \ln b}, C_k = D_k = 0$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{\ln r - \ln b}{\ln a - \ln b}$$

(7) 写出分离变量形式，令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=\frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0\\ \Theta(0)=\Theta(\alpha)=0\end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2,\quad \Theta(\theta)=\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_n(r)=A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_nr^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$$

由有界性知 $B_n=0$，即

$$R_n(r)=A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}$$

进而得到形式解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

代入边界条件得

$$u(a,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}=f(\theta)$$

进而得到

$$A_n=\frac{2}{\alpha}a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\int_0^\alpha f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha f(\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}d\theta\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

2.6 习题 2.7——坐标系选取和高阶问题

解下列定解问题

(1)

$$\begin{cases}u_t=a^2\Delta_3u\\ u|_{r=R}=0,u(t,0)\text{ 有限,}\\ u|_{t=0}=f(r)\end{cases}$$

[提示：采用球坐标系，由定解条件可知 $u=u(t,r)$]

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} (t > 0, 0 < x < l) \\ u(0,x) = x(l-x), u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0 \end{cases}$$

解：

(1) 由定解条件知，问题关于 r 具有对称性，所以在球坐标系下求解.

由球坐标系下拉普拉斯算子表达

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

结合对称性，泛定方程可写作

$$u_t = a^2 u_{rr} + \frac{2a^2}{r} u_r$$

写出分离变量形式，令 $u(t,r) = T(t)R(r)$.

代入方程得

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{2}{r}R'(r)}{R(r)} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} (r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0 \\ |R(0)| < +\infty, R(R) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2, \quad R_n(r) = \frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{R}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n = e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t}$$

进而得到形式解

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{r} e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi r}{R}$$

代入初始条件得

$$u(0,r) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{r}\sin\frac{n\pi r}{R} = f(r)$$

进而得到系数

$$A_n = \frac{2}{R}\int_0^R r f(r) \sin\frac{n\pi r}{R} dr$$

(2) 写出分离变量形式，令 $u(t,r)=T(t)X(x)$.
代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=\frac{X^{(4)}}{X}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X^{(4)}+\lambda X=0 \\ X(0)=X(l)=X''(0)=X''(l)=0 \end{cases}$$

当 $\lambda=0$ 时, $X(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. 代入边界条件知道此时只有零解.
当 $\lambda>0$ 时, 特征方程为 $p^4+\lambda=0$. 解得

$$p_k=\sqrt[4]{\lambda}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(k-1)\pi}{2}\right)},k=1,\dots,4,$$

即

$$p_1=\sqrt[4]{\lambda}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),p_2=\sqrt[4]{\lambda}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$p_3=-\sqrt[4]{\lambda}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right),p_4=-\sqrt[4]{\lambda}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

记 $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{\lambda}$，则方程的解可写作

$$X(x)=e^{\omega x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)+e^{-\omega x}(C\cos\omega x+D\sin\omega x)$$

计算得到

$$\begin{aligned} X' &=\omega e^{\omega x}((A+B)\cos\omega x+(B-A)\sin\omega x)-\omega e^{-\omega x}((C-D)\cos\omega x+(C+D)\sin\omega x) \\ X'' &=2\omega^2e^{\omega x}(B\cos\omega x-A\sin\omega x)+2\omega^2e^{-\omega x}(D\cos\omega x+C\sin\omega x) \end{aligned}$$

代入定解条件得到方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e^{\omega l}\cos\omega l & e^{\omega l}\sin\omega l & e^{-\omega l}\cos\omega l & e^{-\omega l}\sin\omega l \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -e^{\omega l}\sin\omega l & e^{\omega l}\cos\omega l & e^{-\omega l}\sin\omega l & e^{-\omega l}\cos\omega l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}=0$$

计算得到系数矩阵行列式不为 0，即方程组只有零解. 对应固有函数只有零解，不成立.
当 $\lambda<0$ 时, 特征方程解为

$$p_k=\sqrt[4]{-\lambda}e^{i\frac{(k-1)\pi}{2}},k=1,\dots,4$$

即

$$p_1=\sqrt[4]{-\lambda}(=\omega), p_2=-\sqrt[4]{-\lambda}, p_3=i\sqrt[4]{-\lambda}, p_4=-i\sqrt[4]{-\lambda}$$

常微分方程的解可以写作

$$X(x)=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}+C\cos\omega x+D\sin\omega x$$

计算得到

$$\frac{1}{\omega}X'=Ae^{\omega x}-Be^{-\omega x}-C\sin\omega x+D\cos\omega x$$
$$\frac{1}{\omega^2}X''=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}-C\cos\omega x-D\sin\omega x$$

代入定解条件得到方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{\omega l} & e^{-\omega l} & \cos\omega l & \sin\omega l \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ e^{\omega l} & e^{-\omega l} & -\cos\omega l & -\sin\omega l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}=0$$

令系数行列式为 0，解得 $\sin\omega l=0$ 和 $A=B=C=0$. 即得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$$

此时可以发现，固有函数系为三角函数系，是完备的，且满足正交性. 另外可以发现，固有函数系和教材 2.1 节所述典型的波动方程问题的固有函数系相同，因而满足完备性和正交性等性质. 进而，虽然固有值问题不满足施刘定理要求，但固有函数系满足完备性，进而可以将解在固有函数系上展开——级数形式解存在；固有函数系满足正交性，进而可以将定解条件在固有函数系上展开——可以利用正交性求解系数. 所以，可以使用分离变量法求解这个定解问题.

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t)=A_ne^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}+B_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}$$

进而得到形式解

$$u=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_ne^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}+B_ne^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi x}{l}=x(l-x)$$

和

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 aA_n - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 aB_n \right) \sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

进而得到

$$A_n = B_n = \frac{1}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

解得

$$A_{2k} = B_{2k} = 0, A_{2k+1} = B_{2k+1} = \frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4l^2}{(2k+1)^3\pi^3} \left(e^{\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 at} + e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}\right)^2 at} \right) \sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x$$

说明：这道题目比较特殊，其固有值问题不满足施刘定理，这类特殊问题的求解方法建议读者了解.

2.7 习题 2.8——书写定解问题并使用分离变量法求解

一半径为 a 的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持 $u(a,\theta) = T\theta(\pi-\theta)$，而直径边界上的温度为零度，板的侧面绝缘, 试求板内的稳定温度分布.

解：

由题意知，定解问题描述稳定的温度分布，所以为泊松方程. 结合边界条件写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \\ u(a,\theta) = T\theta(\lambda-\theta) \\ u(a,0) = u(a,\pi) = 0 \end{cases}$$

由定解问题知，可以使用分离变量法求解.

写出分离变量形式，令 $u(t,r) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = \frac{\Theta'}{\Theta} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \sin n\theta$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_0 = A_0 + B_0 \ln r, R_n = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

由于在圆内解题，由解的有界性知 $B_n = 0$. 则形式解可以写作

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n r^n \sin n\theta$$

代入边界条件解得

$$A_{2k} = 0, A_{2k+1} = \frac{8T}{\pi(2k+1)^3 a^{2k+1}}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,x) = \frac{8T}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \sin(2n+1)\theta$$

2.8 习题 2.10——求解非齐次问题

解下列非齐次的定解问题

(1)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0) = u_0, u_x(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = -\frac{q}{k} \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$$

并求 $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$.

(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial u}{\partial t} + A\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = T_0 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \operatorname{sh} x \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

(5)

$$
\begin{cases}
u_u = u_{xx} + g(g \text{ 为常数}) \\
u(t,0) = 0, u_x(t,l) = E(E \text{ 为常数}) \\
u(0,x) = Ex, u_t(0,x) = 0;
\end{cases}
$$

(6)

$$
\begin{cases}
\Delta_2 u = a + b\left(x^2 - y^2\right)(a, b \text{ 为常数}, r < R) \\
u(R,\theta) = c(c \text{ 为常数})
\end{cases}
$$

解：

分离变量法的使用条件为有界区域的齐次方程和齐次边界问题，对于非齐次问题不能直接使用. 但是我们可以利用一些方法将其转化为齐次问题，进而可以使用分离变量法. 对于齐次边界非齐次方程，可以选择固有函数展开法、齐次化原理方法、特解法；对于非齐次边界，可以选择利用基于叠加原理的特解法. 这里为了突出非齐次项的处理，并且转化后的齐次问题使用分离变量法求解和前面的题目过程类似，所以这里不详细说明分离变量法求解的步骤.(但是考试的时候是要完整书写过程的，请读者注意)

(1) 非齐次边界，利用叠加原理.

令 $w = u - u_0$，则定解问题转化为

$$
\begin{cases}
w_t = a^2 w_{xx} \\
w(t,0) = 0, \quad w_x(t,l) = 0 \\
w(0,x) = \varphi(x) - u_0
\end{cases}
$$

解得

$$
u = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \exp\left\{-a^2\omega_n^2 t\right\} \sin\omega_n x
$$

其中

$$
\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\omega_n x dx - \frac{4u_0}{(2n+1)\pi}
$$

(2) 非齐次边界，利用叠加原理.

令 $w = u + \frac{q}{k}x$, 则定解问题转化为

$$
\begin{cases}
w_t = a^2 w_{xx} \\
w(t,0) = 0, \quad w_x(t,l) = 0 \\
w(0,x) = u_0 + \frac{q}{k}x
\end{cases}
$$

解得

$$
u = -\frac{q}{k}x + \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left\{-\omega_n^2 a^2 t\right\} \sin\omega_n x
$$

其中

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, C_n = \frac{2u_0}{(2n+1)\pi} + \frac{(-1)^n 8ql}{k[(2n+1)\pi]^2}$$

所以

$$\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = -\frac{q}{k}x$$

(3) 非齐次方程齐次边界，且由于非齐次项只含有变量 x，所以利用特解法，其中特解只含有变量 x.

令 $u(t,x) = v(x) + w(t,x)$. 其中 $v(x)$ 满足

$$\begin{cases} v'' + Ae^{-2x} = 0 \\ v(0) = 0, v(l) = 0 \end{cases}$$

解得

$$v = -\frac{A}{4}\left(e^{-2x} - 1 - \frac{x}{l}\left(e^{-2l} - 1\right)\right)$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \\ w(t,0) = w(t,l) = 0 \\ w(0,x) = T_0 + \frac{A}{4}\left(e^{-2x} - 1 - \frac{x}{l}\left(e^{-2l} - 1\right)\right) \end{cases}$$

直接使用分离变量法解得

$$w = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2 t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

所以定解问题的解为

$$u = -\frac{A}{4}\left(e^{-2x} - 1 - \frac{x}{l}\left(e^{-2l} - 1\right)\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2 t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(T_0 + \frac{A}{4}\left(e^{-2x} - 1 - \frac{x}{l}\left(e^{-2l} - 1\right)\right)\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x$$

对于这种复杂积分，我的习惯是先对三角函数中的部分作变量代换. 令 $y = \frac{n\pi x}{l}$，则有

$$C_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{n\pi} \left(T_0 + \frac{A}{4}\left(e^{-\frac{2ly}{n\pi}} - 1 - \frac{y}{n\pi}\left(e^{-2l} - 1\right)\right)\right) \sin y \mathrm{d}y$$

其中

$$\int_0^{n\pi} \left(T_0 - \frac{A}{4}\right) \sin y \mathrm{d}y = \left(T_0 - \frac{A}{4}\right)\left(1 - (-1)^n\right)$$

利用分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} e^{-\frac{2ly}{n\pi}} \sin y \mathrm{d}y &= -\int_0^{n\pi} e^{-\frac{2ly}{n\pi}} \mathrm{d}\cos y \\
&= - \left. e^{-\frac{2\pi y}{n\pi}} \cos y \right|_0^{n\pi} + \left(-\frac{2l}{n\pi}\right) \int_0^{n\pi} e^{-\frac{2ly}{n\pi}} \cos y \\
&= \left(1-(-1)^n e^{-2l}\right) - \left(-\frac{2l}{n\pi}\right)^2 \int_0^{n\pi} e^{-\frac{2ly}{n\pi}} \sin y \mathrm{d}y \\
&= (n\pi)^2 \frac{1-(-1)^n e^{-2l}}{4l^2+n^2\pi^2}
\end{aligned}
$$

和

$$
\int_0^{n\pi} y \sin y \mathrm{d}y = -\left. y\cos y\right|_0^{n\pi} = (-1)^n n\pi
$$

整理可得

$$
\begin{aligned}
C_n &= 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\left(T_0-\frac{A}{4}\right) + \frac{A}{4}\cdot\frac{n\pi\left(1-(-1)^n e^{-2l}\right)}{4l^2+n^2\pi^2} + \frac{(-1)^n\left(e^{-2l}-1\right)}{n\pi} \\
&= 2\frac{\left(4l^2+n^2\pi^2\right)\left(T_0-\frac{A}{4}\right)\left(1-(-1)^n\right) + \frac{A}{4}(n\pi)^2\cdot\left(1-(-1)^n e^{-2l}\right) + \frac{A}{4}\left(n^2\pi^2+4l^2\right)\cdot(-1)^n\left(1-e^{-2l}\right)}{n\pi(4l^2+n^2\pi^2)} \\
&= \frac{2T_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] - \frac{2Al^2\left[1-(-1)^n e^{-2l}\right]}{n\pi\left(4l^2+n^2\pi^2\right)}
\end{aligned}
$$

(4) 非齐次方程齐次边界，且由于非齐次项只含有变量 x，所以利用特解法，其中特解只含有变量 x.

令 $u(t,x)=v(x)+w(t,x)$. 其中 $v(x)$ 满足

$$
\begin{cases}
a^2 v'' + b\sinh x = 0 \\
v(0)=0, v(l)=0
\end{cases}
$$

解得

$$
v = -\frac{b}{a^2}\left(\sinh x - \frac{\sinh l}{l}x\right)
$$

则定解问题转化为

$$
\begin{cases}
w_{tt} = a^2 w_{xx} \\
w(t,0)=w(t,l)=0 \\
w(0,x)=-v(x), w_t(0,x)=0
\end{cases}
$$

直接使用分离变量法得

$$
w = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi\left(n^2\pi^2+l^2\right)} \cos\frac{n\pi a t}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}
$$

所以定解问题的解为

$$u=\frac{b\sinh l}{a^2 l}x-\frac{b}{a^2}\sinh x+\frac{2bl^2\sinh l}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi\left(n^2\pi^2+l^2\right)}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(5) 非齐次方程，非齐次边界. 使用特解法求解.
令 $u(t,x)=v(x)+w(t,x)$. 其中 $v(x)$ 满足

$$\begin{cases} v''+g=0 \\ v(0)=0, v'(l)=E \end{cases}$$

解得

$$v=-\frac{g}{2}x^2+(E+gl)x$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx} \\ w(t,0)=w_x(t,l)=0 \\ w(0,x)=\frac{g}{2}x^2-glx, w_t(0,x)=0 \end{cases}$$

直接使用分离变量法得

$$w=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi l}{2l}$$

所以定解问题的解为

$$u=Ex+glx-\frac{1}{2}gx^2-\frac{16gl^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi l}{2l}$$

(6) 非齐次方程，非齐次边界. 使用特解法求解.
令 $u=v+w$，其中设 $v=A\left(x^4-y^4\right)+B\left(x^2+y^2\right)$ 满足

$$\Delta_2 v=a+b\left(x^2-y^2\right)$$

解得

$$v=\frac{b}{12}\left(x^4-y^4\right)+\frac{a}{4}\left(x^2+y^2\right)$$

在极坐标系下表达为

$$v=\frac{b}{12}r^4\cos 2\theta+\frac{a}{4}r^2$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases} \Delta_2 w=0(r<R) \\ w|_{r=R}=c-\frac{b}{12}R^4\cos 2\theta-\frac{a}{4}R^2 \end{cases}$$

直接使用分离变量法求得 w 并和 v 叠加得到定解问题的解为

$$u=c+\frac{a}{4}\left(r^2-R^2\right)^2+\frac{b}{12}r^2\left(r^2-R^2\right)\cos 2\theta$$

2.9 习题 2.11——环域内分离变量法求解定解问题及法向偏导数理解

在下列条件下，求环域 $a<r<b$ 内泊松方程 $\Delta_2 u=A$ (A 为常数) 的解：
(1) $u(a,\theta)=u_1, u(b,\theta)=u_2(u_1,u_2$ 为常数)
(2) $u(a,\theta)=u_1, \frac{\partial u(b,\theta)}{\partial n}=u_2$
解：
非齐次方程，非齐次边界. 使用特解法求解.
令 $u=v+w$，其中 $v=\frac{A}{4}r^2$.
则泛定方程转化为 $\Delta_2 w=0$，对应定解条件也要作相应转化.
由于边界条件和 θ 无关，则解与 θ 无关. 由教材 2.2 节所述，极坐标系下拉普拉斯方程的形式解可写作

$$w=A_0+B_0\ln r$$

(1) 代入边界条件得

$$u=u_2+\frac{A}{4}\left(r^2-b^2\right)+\frac{u_1-u_2+\frac{A}{4}\left(b^2-a^2\right)}{\ln b-\ln a}(\ln b-\ln r)$$

(2) 代入边界条件得

$$u=u_1+\frac{1}{4}A\left(r^2-a^2\right)+b\left(u_2-\frac{1}{2}Ab\right)\ln\frac{r}{a}$$

说明：这里考察了方向导数的概念，建议读者熟练掌握.

2.10 习题 2.12(3)——矩形区域内分离变量

解矩形区域内的定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta_2 u\,(t>0,0<x<l_1,0<y<l_2) \\ \left.u\right|_{x=0}=\left.u\right|_{x=l_1}=\left.u\right|_{y=0}=\left.u\right|_{y=l_2}=0 \\ \left.u\right|_{t=0}=\varphi(x,y) \end{cases}$$

解：
写出分离变量形式，令 $u(t,x,y)=T(t)X(x)Y(y)$.

代入方程得

$$\frac{-T'(t)}{a^2T(t)}+\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0$$

令

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\mu,\quad \frac{-T'(t)}{a^2T(t)}=\lambda+\mu$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l_1)=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} Y''(y)+\mu Y(y)=0 \\ Y(0)=Y(l_2)=0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\begin{aligned} \lambda_m=\left(\tfrac{m\pi}{l_1}\right)^2, &\quad X_m(x)=A_m\sin\tfrac{m\pi x}{l_1} \\ \mu_n=\left(\tfrac{n\pi}{l_2}\right)^2, &\quad Y_n(y)=B_n\sin\tfrac{n\pi y}{l_2} \end{aligned}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_{mn}(t)=e^{-a^2(\lambda_m+\mu_n)t}$$

进而得到形式解

$$u(t,x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{mn}e^{-\left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)a^2t}\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$$

代入初始条件得

$$u(0,x,y)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}=\varphi(x,y)$$

进而得到

$$C_{mn}=\frac{4}{l_1l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}dxdy$$

所以定解问题的解为

$$u(t,x,y)=\frac{4}{l_1l_2}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}dydx\right)e^{-\left(\left(\frac{m\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2\right)a^2t}\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$$

第三章作业题目解析

3.1 习题 3.1——柱坐标系下分离变量

在柱坐标系下对拉普拉斯方程分离变量，写出各个常微分方程.

解：

柱坐标系下拉普拉斯算子表达为

$$\Delta_3 u(r,\theta,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

写出分离变量形式，令 $u(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$.

代入方程得

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}+\frac{Z''}{Z}=0$$

进而得到

$$\begin{cases} Z''-\lambda Z=0 \\ \Theta''+\mu\Theta=0 \\ r^2R''+rR'+\left(\lambda r^2-\mu\right)R=0 \end{cases}$$

3.2 习题 3.2(2)——贝塞尔函数的微分性质

计算 $\frac{d}{dx}\left[xJ_1(ax)\right]$.

解：利用贝塞尔函数微分性质得

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_1(ax)\right]=J_1(ax)+axJ_1'(ax)=axJ_0(ax)$$

3.3 习题 3.6(1)——贝塞尔函数递推公式应用

利用递推公式证明：

$J_2(x)=J_0''(x)-\frac{1}{x}J_0'(x)$

证明：

这类题目的求解方法就是，按照目标，选择合适的递推公式直接代入整理即可.

根据目标，选择使用递推公式

$$J_v'(x) = \frac{v}{x}J_v(x) - J_{v+1}(x)$$

令 $v=1$ 代入，得

$$J_2(x) = \frac{1}{x}J_1(x) - J_1'(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)$$

3.4 习题 3.9——贝塞尔函数积分计算

计算积分

$$\int J_3(x)\mathrm{d}x$$

解：
利用贝塞尔函数的递推公式和性质可得

$$\begin{aligned}\int J_3(x)dx &= \int \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x)dx \\ &= \int -4d\left(\frac{1}{x}J_1(x)\right) + J_0(x) \\ &= J_0(x) - \frac{4}{x}J_1(x) + C\end{aligned}$$

3.5 习题 3.12——给定函数展开为贝塞尔级数

设 ω_n 是 $J_0(2\omega)=0$ 的正实根, 把函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0<x<1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ 0 & (1<x<2) \end{cases}$$

展开成贝塞尔函数 $J_0(\omega_n x)$ 的级数.
解：
设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(w_n x)$$

由题意知，为第一类边界条件. 则有

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N_{01}^2}\int_0^2 xfJ_0(\omega_n x)\,dx = \frac{1}{N_{01}^2}\int_0^1 xJ_0(\omega_n x)\,dx \\ &= \frac{1}{N_{01}^2\omega_n^2}\int_0^{\omega_n} tJ_0(t)dt = \frac{1}{N_{01}^2\omega_n^2}tJ_1(t)\bigg|_0^{\omega_n} = \frac{J_1(\omega_n)}{N_{01}^2\omega_n} \end{aligned}$$

其中

$$N_{01}^2 = \frac{2^2}{2}J_1^2(2\omega_n) = 2J_1^2(2\omega_n)$$

3.6 习题 3.13——给定函数展开为贝塞尔级数

设 ω_n 是 $J_1(x)=0$ 的正实根, 把 $f(x)=x(0<x<1)$ 展开成贝塞尔函数 $J_1(\omega_n x)$ 的级数.

解：

设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_1(\omega_n x)$$

由题意知，为第一类边界条件. 则有

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N_{11}^2}\int_0^1 x^2 J_1(\omega_n x)\,dx = \frac{1}{N_{11}^2\omega_n^3}\int_0^{\omega_n} t^2 J_1(t)dt \\ &= \frac{1}{N_{11}^2\omega_n^3}t^2J_2(t)\bigg|_0^{\omega_n} = \frac{J_2(\omega_n)}{N_{11}^2\omega_n} \end{aligned}$$

其中

$$N_{11}^2 = \frac{1}{2}J_2^2(\omega_n)$$

3.7 习题 3.16——柱坐标系下定解问题的分离变量求解

半径为 R 的无限长圆柱体的侧表面保持一定的温度 u_0 柱内的初始温度为零，求柱内的温度分布.

解：

由题意知，问题具有对称性，即 $u=u(t,r)$.

首先写出定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)(r<R, t>0) \\ u|_{r=R} = u_0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

非齐次边界问题，利用特解法求解.

令 $u(t,r)=v(t,r)+u_0$. 则定解问题转化为

$$\begin{cases} v_t=a^2\left(v_{rr}+\frac{1}{r}v_r\right)(r<R,t>0) \\ v|_{r=R}=0 \\ v|_{t=0}=0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(t,r)=T(t)R(r)$.
代入方程得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} (rR'(r))'+\lambda rR(r)=0 \\ |R(0)|<+\infty, R(R)=0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=w_n^2(n=1,2,\ldots), \quad R(r)=J_0\left(w_n r\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $J_0(wR)=0$ 的所有正根.
将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T(t)=C_n e^{-w_n^2a^2t}$$

进而得到形式解

$$v(t,r)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n e^{-w_n^2a^2t}J_0\left(w_n r\right)$$

代入初始条件得

$$v(0,r)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n J_0\left(\omega_n r\right)=-u_0$$

进而得到

$$\begin{aligned} C_n&=\frac{1}{N_{01n}^2}\int_0^R -u_0 rJ_0\left(\omega_n r\right)dr=\frac{-2u_0}{R^2J_1^2\left(\omega_n R\right)}\int_0^R rJ_0\left(\omega_n r\right)dr \\ &=\frac{-2u_0}{\omega_n^2R^2J_1^2\left(\omega_n R\right)}\int_0^{\omega_n R}xJ_0(x)dx \\ &=\frac{-2u_0}{\omega_n^2R^2J_1^2\left(\omega_n R\right)}\cdot\omega_n RJ_1\left(\omega_n R\right)=\frac{-2u_0}{\omega_n RJ_1\left(\omega_n R\right)} \end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,r)=u_0-2u_0\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{w_nRJ_1\left(w_nR\right)}e^{-w_n^2a^2t}J_0\left(w_n r\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $J_0(wR)=0$ 的所有正根.

3.8 习题 3.18——定解问题求解

解下列定解问题

(1)

$$\begin{cases} u_r+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0(0<r<a,0<z<l) \\ u(a,z)=0 \\ u(r,0)=0,u(r,l)=T_0(\text{ 常数}) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt}+2hu_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)(h\ll l) \\ u(0,t)=\text{ 有限},u_r(l,t)=0 \\ u(r,0)=\varphi(r),u_t(r,0)=0 \end{cases}$$

解:

(1) 写出分离变量形式，令 $u(r,z)=R(r)Z(z)$.

代入方程得

$$\frac{R''(x)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} rR''+R'+\lambda rR=(rR')'+\lambda rR=0 \\ |R(0)|<+\infty,R(a)=0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=w_n^2(n=1,2,\ldots),\quad R_n(r)=J_0\left(w_nr\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $J_0(wa)=0$ 的所有正根.

将固有值问题代入关于变量 z 的常微分方程并求解得到

$$Z_n=C_n\cosh\omega_nz+D_n\sinh\omega_nz$$

进而得到形式解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cosh\omega_nz+D_n\sinh\omega_nz\right)J_0\left(\omega_nr\right)$$

代入边界条件得

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0\left(w_nr\right)=0$$

和

$$u(r,l)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(D_n\sinh w_n l\right)J_0\left(w_n r\right)=T_0$$

进而得到 $C_n=0$ 和

$$\begin{aligned}D_n&=\frac{2T_0}{a^2J_1^2\left(aw_n\right)w_nl}\int_0^a rJ_0\left(w_nr\right)dr\\&=\frac{2T_0}{a^2J_1^2\left(aw_n\right)}\frac{1}{w_n^2}aw_nJ_1\left(aw_n\right)\\&=\frac{2T_0}{aw_nJ_1\left(aw_n\right)}\end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u(r,z)=\frac{2T_0}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{w_nJ_1\left(\omega_na\right)}\cdot\frac{\sinh w_nz}{\sinh w_n}\cdot J_0\left(\omega_nr\right)$$

(2) 写出分离变量形式，令 $u(t,r)=T(t)R(r)$.
代入方程得

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{T''(t)}{T(t)}+2h\frac{T'(t)}{T(t)}\right)=\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}rR''+R'+\lambda rR=(rR')'+\lambda rR=0\\|R(0)|<+\infty,R'(l)=0\end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_0=0,\lambda_n=w_n^2(n=1,2,\ldots),\quad R_0(r)=1,R_n(r)=J_0\left(w_nr\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $J_0'(wl)=0$ 的所有正根.
将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_0(t)=A_0e^{-2ht}+B_0$$

和

$$T_n(t)=e^{-ht}\left(C_n\cos\mu_nt+D_n\sin\mu_nt\right)$$

进而得到形式解

$$u(t,r)=\left(A_0e^{-2ht}+B_0\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-ht}\left(A_n\cos\mu_nt+B_n\sin\mu_nt\right)J_0\left(\omega_nr\right)$$

代入初始条件得

$$u(0,r)=A_0+B_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\omega_n r\right)=\varphi(r)$$

和

$$u_t(0,r)=-2hA_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-hA_n+\mu_n B_n\right) J_0\left(\omega_n r\right)=0$$

进而得到

$$A_0=0, B_0=\frac{2}{l^2}\int_0^l r\varphi(r)dr$$

和

$$A_n=\frac{2}{l^2 J_0^2\left(w_n l\right)}\int_0^l r\varphi(r) J_0\left(w_n r\right) dr, B_n=\frac{hA_n}{\mu_n}(n=1,2,\ldots)$$

3.9 习题 3.19——柱坐标系下定解问题的分离变量求解

圆柱的半径为 R，高为 h ，侧面在温度为零的空气中自由冷却，下底温度恒为零, 上底温度为 $f(r)$, 求柱内温度分布.

解：

首先依据题意写出定解问题

$$\begin{cases} u_r+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0 \\ u(0,z)=\text{ 有限}, u_r(R,z)+ku(R,z)=0 \\ u(r,0)=0, u(r,h)=f(r) \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(r,z)=R(r)Z(z)$.

代入方程得

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} rR''+R'+\lambda rR=(rR')'+\lambda rR=0 \\ |R(0)|<+\infty, R'(R)+kR(R)=0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=w_n^2(n=1,2,\ldots),\quad R_0(r)=1, R_n(r)=J_0\left(w_n r\right)$$

其中 $w_n(n=1,2,3,\ldots)$ 为方程 $kJ_0(wR)+wJ_0'(wR)=0$ 的所有正根.

将固有值问题代入关于变量 z 的常微分方程并求解得到

$$Z_n(z)=A_n\cosh wz+B_n\sinh wz$$

进而得到形式解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cosh wz+B_n\sinh wz)J_0(w_nR)$$

代入初始条件，得到系数

$$A_n=0,B_n=\frac{1}{\sinh w_nh}\frac{1}{N_{03}^2}\int_0^R rf(r)J_0\left(w_nr\right)dr$$

所以定解问题的解为

$$u(r,z)=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\int_0^R rf(r)J_0\left(w_nr\right)dr}{\left(1+\frac{k^2}{w_n^2}\right)J_0^2\left(w_nR\right)}\cdot\frac{\sinh w_nz}{\sinh w_nh}\cdot J_0\left(w_nr\right)$$

3.10 习题 3.20——勒让德多项式的重要函数值

求 $p_n(0)$ 和 $p_n'(0)$ 的值.

解：

勒让德多项式的级数表达为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(2n-2k)!}{2^n\cdot k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

代入 $x=0$ 得

$$p_n(0)=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}, & n=2k\end{cases}$$

其中 k 为整数.

对勒让德多项式求一次导数得

$$p_n'(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!(n-2k)}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k-1}$$

代入 $x=0$ 得

$$p_n'(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k)!!}, & n=2k+1\end{cases}$$

其中 k 为整数.

3.11 习题 3.22——勒让德多项式的积分计算

求下列积分

(1) $\int_{-1}^{1} x^m p_n(x)\mathrm{d}x$(分别考虑 $m < n$ 及 $m \geq n$ 两种情形)

(2) $\int_{-1}^{1} x p_m(x) p_n(x)\mathrm{d}x$

解：

(1) 奇数阶勒让德多项式为奇函数，偶数阶勒让德多项式为偶函数. 对于对称区间积分

$$\int_{-1}^{1} x^m p_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m,n \text{ 奇偶性不同} \\ 2\int_0^1 x^m p_n(x)dx & m,n \text{ 奇偶性相同} \end{cases}$$

所以我们只考虑 m,n 奇偶性相同的情况. 记

$$\int_0^1 x^m p_n(x)dx = f(m,n)$$

利用勒让德多项式的递推公式，结合分部积分可得

$$f(m,n) = \frac{m}{m+n+1} f(m-1,n-1)$$

当 $m < n$ 时

$$f(m,n) = \frac{m!(n-m+1)!!}{(n-m+3)!!} f(0,n-m)$$

由于 $n-m$ 为偶数, 所以 $f(0,n-m) = 0$.

当 $m \geq n$ 时,

$$f(m,n) = \frac{m!(m-n+1)!!}{(m-n)!(m+n+1)!!} f(m-n,0)$$

此时,

$$f(m-n,0) = \int_0^1 x^{m-n}dx = \frac{1}{m-n+1} x^{m-n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{m-n+1}$$

所以

$$f(m,n) = \frac{m!(m-n-1)!!}{(m-n)!(m+n+1)!!} = \frac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}$$

此时

$$\int_{-1}^{1} x^m p_n(x)\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{m!}{(m-n)!!(m+n+1)!!}$$

综上所述

$$\int_{-1}^{1} x^m p_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m < n \\ \frac{m!\left[1+(-1)^{m-n}\right]}{(m-n)!!(m+n+1)!!} & m \geq n \end{cases}$$

(2) 利用勒让德多项式的递推公式得

$$\int_{-1}^{1} xp_m(x)p_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{m+1}{2m+1}p_{m+1}(x) + \frac{m}{2m+1}p_{m-1}(x)\right] p_n(x)dx$$

由勒让德多项式的正交性可知

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

所以可得

$$I = \int_{-1}^{1} xp_m(x)p_n(x)dx = \begin{cases} \frac{2m+2}{(2m+1)(2m+3)} & n = m+1 \\ \frac{2m}{(2m+1)(2m-1)} & n = m-1 \\ 0 & n \neq m \pm 1 \end{cases}$$

总结：这类题目考察对于勒让德多项式的级数形式表达、递推公式以及基本性质的掌握. 在处理对称区间积分的时候需要注意被积函数的奇偶性. 另外特别注意勒让德多项式作为正交函数系的正交积分表达.

3.12 习题 3.23——勒让德多项式的积分计算

计算积分

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\left[p_n'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

解：

分部积分得

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\left[p_n'(x)\right]^2 dx = p_n(x)\left(1-x^2\right)p_n'(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} p_n(x)d\left[\left(1-x^2\right)p_n'(x)\right]$$

其中第一项为 0. 由勒让德多项式满足勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0$$

可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)p_n'(x)\right] = -\lambda_n p_n$$

所以

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\left[p_n'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 0 - \int_{-1}^{1} p_n(x)\mathrm{d}\left[\left(1-x^2\right)p_n'(x)\right] = \lambda_n \int_{-1}^{1} p_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

3.13 习题 3.24(1)(3)——给定函数的勒让德级数展开

把下列函数按勒让德函数系展开

(1) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=|x|$

解：

设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_np_n(x)$$

其中

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)\mathrm{d}x$$

(1) 将 $f(x)=x^3$ 代入系数公式得

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}x^3p_n(x)\mathrm{d}x$$

由上一小题的结论

$$C_1=\frac{3}{5},\quad C_3=\frac{2}{5},\quad \text{其他系数为0}$$

所以

$$f(x)=x^3=\frac{3}{5}p_1(x)+\frac{2}{5}p_3(x)$$

(2) 将 $f(x)=|x|$ 代入系数公式得

$$\begin{aligned}C_0&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=\int_0^1x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\\C_n&=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|p_n(x)\mathrm{d}x=\frac{2n+1}{2}\int_0^1x\left[p_n(x)+p_n(-x)\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当 n 为奇数时，由于对称区间积分的被积函数为奇函数，所以积分结果为 0.

当 n 为偶数时，有

$$\begin{aligned}C_{2k}&=(4k+1)\int_0^1xp_{2k}(x)dx=\frac{4k+1}{2k+2}\int_0^1p_{2k-1}(x)dx\\&=\frac{4k+1}{(2k+2)(4k-1)}\left[p_{2k-2}(0)-p_{2k}(0)\right]\end{aligned}$$

由

$$p_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(4n-2k)!}{2^{2n}k!(2n-k)!(2n-2k)!}x^{2n-2k}$$

可知

$$p_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

进而可得

$$\begin{aligned}C_{2k}&=\frac{4k+1}{(2k+2)(4k-1)}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k}(k!)^2}\left[4k^2+2k(2k-1)\right]\\&=(-1)^{k-1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=|x|=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2k-3)!!}{(2k+2)!!}(4k+1)p_{2k}(x)$$

3.14 习题 3.25——球坐标系下分离变量求解定解问题

在半径为 a 的球内求调和函数 u，使

$$u|_{r=a}=\cos^2\theta$$

解：

由定解条件可知，问题具有对称性，$u=u(r,\theta)$. 泛定方程可写作

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

写出分离变量形式，令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\lambda$$

令 $x=\cos\theta$，记 $\Theta(\theta)=y(x)$. 即得到勒让德方程.

得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=n(n+1),\quad y_n(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_n(r)=A_n(r)r^n+B_n(r)r^{-(n+1)}$$

进而得到形式解

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_nr^n+B_nr^{-(n+1)}\right]p_n(\cos\theta)$$

由于在球内解题，由解的有界性可知，形式解可简化为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos\theta)$$

代入边界条件

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n p_n(\cos\theta)=\cos^2\theta$$

进而可得

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta p_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta p_n(\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta\\&=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}x^2p_n(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由上面小题的结论可知

$$A_0=\frac{1}{3},\quad A_2=\frac{2}{3},\quad \text{其他系数为0}$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2p_2(\cos\theta)$$

3.15 习题 3.27——球坐标系下分离变量求解定解问题

在半径为 a 的球外部求调和函数 u，使

$$u|_{r=a}=\cos^2\theta$$

解：

和上一小题类似，区别在于这道题目要求在球外解题，所以形式解写作

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}B_nr^{-(n+1)}p_n(\cos\theta)$$

类似上题可解得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}r^{-1}+\frac{2}{3}r^{-3}p_2(\cos\theta)$$

3.16 习题 3.28——半球问题

半球的球面保持一定的温度 u_0 ，分别在下列条件下, 求这个半球内的稳定温度分布

(1) 半球底面保持常温零度

(2) 半球底面绝热

解：

(1) 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \left(0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \\ u(a,\theta) = u_0 \\ u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\lambda$$

令 $x = \cos\theta$，记 $\Theta(\theta) = y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad y_n(x) = p_{2n+1}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n+1}(\cos\theta)$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_n(r) = A_n(r)r^{2n+1} + B_n(r)r^{-(2n+2)}$$

进而得到形式解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_n r^{2n+1} + B_n r^{-(2n+2)}\right] p_{2n+1}(\cos\theta)$$

由于在球内解题，由解的有界性可知，形式解可简化为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} p_{2n+1}(\cos\theta)$$

代入边界条件

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n p_{2n+1}(\cos\theta) = u_0$$

进而可得

$$A_n = (4n+3)\int_0^1 u_0 \cdot p_{2n+1}(x)dx = u_0 \cdot \frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{3u_0}{2a} r\cos\theta + u_0 \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} p_{2n+1}(\cos\theta)\right]$$

(2) 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \left(0<r<a, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \\ u(a,\theta) = u_0 \\ u_\theta(r,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$.
代入方程得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\lambda$$

令 $x=\cos\theta$，记 $\Theta(\theta) = y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right] + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n = (2n)(2n+1), \quad y_n(x) = p_{2n}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n)(2n+1), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n}(\cos\theta)$$

进而得到形式解

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_n r^{2n} + B_n r^{-(2n+1)}\right] p_{2n}(\cos\theta)$$

由于在球内解题，由解的有界性可知，形式解可简化为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} p_{2n}(\cos\theta)$$

代入边界条件

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n p_{2n}(\cos\theta) = u_0$$

进而可得

$$A_0=\int_0^1 u_0p_0(x)\mathrm{d}x=u_0,\quad A_n=(4n+1)\int_0^1 u_0p_{2n}(x)\mathrm{d}x=0$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=u_0$$

3.17 习题 3.29——半空心球问题

一个半径为 R、厚度为 $\frac{R}{2}$ 的半空心球, 外球面和内球面上的温度始终保持为

$$f(\theta)=A\sin^2\frac{\theta}{2}\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

而底面上的温度则保持为 $\frac{R}{2}$ ，求空心球内部各点的定常温度.
解：
根据题意写出定解问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0\\ u|_{r=R}=A\sin^2\frac{\theta}{2},\quad u|_{r=\frac{R}{2}}=A\sin^2\frac{\theta}{2}\\ u\left(\frac{\pi}{2},r\right)=\frac{A}{2}\end{cases}$$

非齐次边界条件，使用特解法求解.
由于定解条件具有对称性，则解具有对称性.$u=u(r,\theta)$. 令 $u(r,\theta)=v(r,\theta)+\frac{A}{2}$. 则定解问题可转化为

$$\begin{cases}\Delta_3 v=0\\ v|_{r=R}=A\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{A}{2},\quad v|_{r=\frac{R}{2}}=A\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{A}{2}\\ v\left(\frac{\pi}{2},r\right)=0\end{cases}$$

写出分离变量形式，令 $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$.
代入方程得

$$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=-\lambda$$

令 $x=\cos\theta$，记 $\Theta(\theta)=y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)y'\right]+\lambda y=0\\ y(0)=0,|y(1)|<+\infty\end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n=(2n+1)(2n+2),\quad y_n(x)=p_{2n+1}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n+1}(\cos\theta)$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_n(r) = A_n(r) r^{2n+1} + B_n(r) r^{-(2n+2)}$$

进而得到形式解

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[A_n r^{2n+1} + B_n r^{-(2n+2)}\right] p_{2n+1}(\cos\theta)$$

代入边界条件可得

$$-\frac{A}{2}x = A\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{A}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[A_{2n+1} R^{2n+1} + B_{2n+1} R^{-(2n+2)}\right] p_{2n+1}(x)$$

和

$$-\frac{A}{2}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[2^{-(2n+1)} A_{2n+1} R^{2n+1} + 2^{2n+2} B_{2n+1} R^{-(2n+2)}\right] p_{2n+1}(x)$$

进而可得

$$A_{2n+1} R^{2n+1} + B_{2n+1} R^{-(2n+2)} = -(2(2n+1)+1)\frac{A}{2}\int_0^1 x p_{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

和

$$2^{-(2n+1)} A_{2n+1} R^{2n+1} + 2^{2n+2} B_{2n+1} R^{-(2n+2)} = -(2(2n+1)+1)\frac{A}{2}\int_0^1 x p_{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

解得

$$A_1 = -\frac{3A}{7R}, \quad B_1 = -\frac{AR^2}{14}, \quad \text{其他系数为0}$$

所以得到

$$v(r,\theta) = -(\frac{3A}{7R}r + \frac{AR^2}{14}r^{-2})\cos\theta$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{A}{2} - (\frac{3A}{7R}r + \frac{AR^2}{14}r^{-2})\cos\theta$$

第四章作业题目解析

4.1 习题 4.1——傅里叶变换求解定解问题

用傅里叶变换求解下列定解问题

(1)

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0(-\infty < x < +\infty, y > 0) \\ u(x,0) = f(x) \\ \text{当} x^2 + y^2 \to +\infty \text{ 时}, u(x,y) \to 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x)(t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}(0 < x < +\infty, t > 0) \\ u(t,0) = \varphi(t), u(0,x) = 0, \\ u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0 \end{cases} \qquad (\text{用正弦变换})$$

解:

积分变换法是一种重要的求解定解问题的方法，核心思想是转化思想，通过积分变换将偏微分方程问题转化为常微分方程问题. 积分变换法的具体操作为：根据定解问题选择合适的变量进行积分变换，求解像函数满足的常微分方程问题得到像函数，作反变换得到解.

(1) 作傅里叶变换

$$u(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x$$

由傅里叶变换性质知

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -\lambda^2 \bar{u}, F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 \bar{u}}{\mathrm{d}y^2}$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 \bar{u}}{\mathrm{d}y^2} - \lambda^2 \bar{u} = 0 \\ \bar{u}\big|_{y=0} = \bar{f}(\lambda) \end{cases}$$

常微分方程通解为

$$\bar{u}(\lambda, y) = C_1 e^{|\lambda| y} + C_2 e^{-|\lambda| y}$$

结合定解条件得

$$\bar{u}(\lambda, y) = \bar{f}(\lambda) e^{-|\lambda| y}$$

利用反变换的定义及性质得到，定解问题的解为

$$u(x, y) = f(x) * \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{y^2 + (x - \xi)^2} \mathrm{d}\xi$$

(2) 作傅里叶变换

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x$$

方程变为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{u} = -a^2\lambda^2\bar{u} + \bar{f}(\lambda, t) \\ \bar{u}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其中

$$\bar{f}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x$$

解得

$$\bar{u} = C e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \bar{f}(\lambda, \tau) e^{a^2\lambda^2\tau} \mathrm{d}\tau \cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$$

代入定解条件得 $C = 0$ ，则

$$\bar{u} = \int_0^t \bar{f}(\lambda, \tau) e^{a^2\lambda^2\tau} d\tau \cdot e^{-a^2\lambda^2 t}$$

作反变换得

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \int_0^t \bar{f}(\lambda, \tau) e^{a^2\lambda^2\tau} \mathrm{d}\tau e^{-a^2\lambda^2 t} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{a^2\lambda\tau} \bar{f}(\lambda, \tau) \mathrm{d}x \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t F^{-1}\left[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\right] * F^{-1}[\bar{f}(\lambda, \tau)] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(\tau, x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, \xi) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

(3) 作正弦变换

$$\bar{u}(t,\lambda)=\int_0^{+\infty}u(t,x)\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

计算

$$\begin{aligned}\bar{u}_{xx}=&\int_0^{+\infty}u_{xx}\sin\lambda x\mathrm{d}x=u_x\sin\lambda x|_0^{+\infty}-\lambda\int_0^{+\infty}u_x\cos\lambda x\mathrm{d}x\\=&-\lambda u\cos\lambda x|_0^{+\infty}-\lambda^2\int_0^{+\infty}u\sin\lambda x\mathrm{d}x\\=&\lambda\varphi(t)-\lambda^2\bar{u}\end{aligned}$$

定解问题转化为

$$\begin{cases}\frac{d\bar{u}}{dt}=a^2\lambda\varphi(t)-a^2\lambda^2\bar{u}\\ \bar{u}(0,\lambda)=0\end{cases}$$

解得

$$\bar{u}=Ce^{-a^2\lambda^2t}+\int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{a^2\lambda^2\tau}d\tau\cdot e^{-a^2\lambda^2t}$$

代入定解条件得 $C=0$，即

$$\bar{u}=\int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{a^2\lambda^2\tau}d\tau\cdot e^{-a^2\lambda^2t}$$

按照正弦反变换定义计算得到定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(t,x)=&\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{a^2\lambda^2\tau}\mathrm{d}\tau\cdot e^{-a^2\lambda^2t}\mathrm{d}\lambda\\=&\frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\cdot a^2\lambda\varphi(\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\tau\\=&\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a(t-\tau)}\right\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

4.2 习题 4.2(1)(2)(3)——拉普拉斯变换求解定解问题

用拉普拉斯变换求解下列定解问题

(1)

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=1(x>0,y>0)\\ u(0,y)=y+1,u(x,0)=1\end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}(t>0,0<x<l)\\ u_x(t,0)=0,u(t,l)=u_0(\text{ 常数})\\ u(0,x)=u_1(\text{ 常数})\end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu (x>0, t>0, h>0, h \text{ 为常数}) \\ u(0,x) = b(\text{ 常数}), u(t,0) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} u_x = 0 \end{cases}$$

解：

(1) 对变量 x 作拉普拉斯变换

$$U(p,y) = L[u(x,y)] = \int_0^{+\infty} u(x,y) e^{-px} \mathrm{d}x$$

计算

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y} L\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(pU - u(+0,y)) = p\frac{dU}{dy} - 1$$

由于 $L[1] = \frac{1}{p}$，方程变成

$$p\frac{\mathrm{d}U}{dy} - 1 = \frac{1}{p}$$

解得

$$U = \frac{1+p}{p^2} y + F(p)$$

作拉普拉斯逆变换得

$$u(x,y) = (1+x)y + f(x)$$

代入定解条件得

$$u(x,y) = xy + y + 1$$

(2) 对 t 作拉普拉斯变换，设

$$U(t,x) = \int_0^{+\infty} u(t,x) e^{-pt} \mathrm{d}t$$

计算

$$L\left[u_t\right] = pU - u(0,x) = pU - u_1, U_x(p,0) = 0, U(p,l) = \frac{u_0}{p}$$

定解问题转化为

$$\begin{cases} a^2 U_{xx} = pU - u_1 \\ U_x(p,0) = 0, U(p,l) = \frac{u_0}{p} \end{cases}$$

解得

$$U(p,x) = \frac{u_0 - u_1}{p \cosh \frac{l\sqrt{p}}{a}} \cosh \frac{\sqrt{p}x}{a} + \frac{u_1}{p}$$

其极点为

$$p_0 = 0, p_k = -\frac{a^2\pi^2(2k+1)^2}{4l^2}$$

利用结合留数定理的拉普拉斯变换反演公式

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(p)\mathrm{e}^{pt},p_k\right]$$

得到定解问题的解

$$u=L^{-1}[U(p,x)]=u_0+\frac{4}{\pi}\left(u_1-u_0\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}\exp\left\{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right)^2 t\right\}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]$$

(3) 对 t 作拉普拉斯变换

$$U(t,x)=\int_0^{+\infty}u(t,x)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

计算

$$L\left[u_t\right]=pU-u(0,x)=pU-b,U_x(p,0)=0$$

定解问题转化为

$$\begin{cases}a^2U_{xx}=(p+h)U-b\\ U_x(p,0)=0\end{cases}$$

解得

$$U(p,x)=\frac{b}{p+h}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}\right)$$

作反变换得

$$u(t,x)=L^{-1}\left[-\frac{b}{p+h}e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}+\frac{b}{p+h}\right]=be^{-ht}\left[1-\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

4.3 补充习题——余弦变换求解定解问题

用余弦定理求解定解问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\quad x>0,y>0\\ u|_{y=0}=f(x),\quad u_x|_{x=0}=0,\quad u(x,y)\text{ 有界.}\end{cases}$$

解：

首先计算

$$
\begin{aligned}
F_c\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \cos\lambda x d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \cos\lambda x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \lambda\frac{\partial u}{\partial x}\sin\lambda x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda\sin x dx \\
&= \lambda\sin\lambda x u|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \lambda^2 u\cos\lambda x\mathrm{d}x \\
&= -\lambda^2\hat{u}
\end{aligned}
$$

进而可得

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}y^2} - \lambda^2\hat{u} = 0 \\
\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda)
\end{cases}
$$

解得

$$
\hat{u}(\lambda, y) = \hat{f}(\lambda)e^{-|\lambda|y}
$$

按照余弦反变换的定义作反变换得定解问题的解

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f^{\wedge}(\lambda)e^{-|\lambda|y}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi e^{-\lambda y}\cos\lambda x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_0^{+\infty}[\cos(x+\xi)\lambda + \cos(x-\xi)\lambda]e^{-\lambda y}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

注意：使用正弦变换和余弦变换解题的时候，反变换的时候要严格按照定义进行求解.

第五章作业题目解析

5.1 习题 5.3——求解含有 δ 函数的定解问题

求解下列定解问题

(1)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}(0 < x < l, t > 0) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \delta(x-\xi)(0 < \xi < l) \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}(0 < x < l, t > 0) \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = \delta(x-\xi)(0 < \xi < l) \end{cases}$$

解：

(1) 齐次方程齐次边界，可以使用分离变量法求解.

分离变量求解得到形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入定解条件得

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \delta(x-\xi)$$

进而可得

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,x) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\frac{n\pi\xi}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

(2) 分离变量法得到形式解

$$u(t,x)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{n\pi x}{l}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)$$

代入初始条件得

$$u(0,x)=B_0+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\cos\frac{n\pi x}{l}=0$$

和

$$u_t(0,x)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi a}{l}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\delta(x-\xi)$$

进而可得 $B_n=0$ 和

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{l}\int_0^l\delta(x-\xi)dx=\frac{1}{l}\\A_n&=\frac{l}{n\pi a}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l\cos\frac{n\pi x}{l}\delta(x-\xi)dx=\frac{2}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l},n\geq 1\end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u(t,x)=\frac{t}{l}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi a}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

5.2 习题 5.4(1)(2)——求解含有 δ 函数的定解问题

利用拉普拉斯方程的基本解，求下列方程的基本解：

(1) $u_{xx}+\beta^2u_{yy}=0(\beta>0,\beta$ 为常数)

(2) $\Delta_2\Delta_2u=0$ (二维双调和方程)

解：

(1) 令 $\xi=x,\eta=\frac{y}{\beta}$，则有

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=u_{xx}+\beta^2u_{yy}=\delta(x,y)=\delta(\xi,\beta\eta)=\frac{1}{\beta}\delta(\xi,\eta)$$

由拉普拉斯方程基本解知

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi\beta}\ln\left(\xi^2+\eta^2\right)$$

所以方程的基本解为

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi\beta}\left[\ln\left(\beta^2x^2+y^2\right)-2\ln\beta\right]$$

(2) 令 $v=\Delta_2 u$, 则 $\Delta_2 v=0$ 的基本解为

$$v=\frac{1}{2\pi}\ln r$$

所以只需求出

$$\Delta_2 u=\frac{1}{2\pi}\ln r$$

对于 $u=u(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln r$$

进而可得

$$\begin{aligned} r\frac{du}{dr}&=\frac{1}{2\pi}\int r\ln r dr=\frac{1}{4\pi}r^2\ln r-\frac{1}{8\pi}r^2+C_1 \\ u&=\frac{1}{8\pi}r^2\ln r-\frac{1}{8\pi}r^2+C_1\ln r+C_2 \end{aligned}$$

注意：这道题目主要考察变量代换和函数变换，为基本解的求解提供一种思路. 另外注意 δ 函数的尺度变换性质.

5.3 习题 5.5——傅里叶变换法求解基本解

利用傅里叶变换，求三维亥姆霍兹方程

$$\Delta_3 u+k^2 u=0$$

的基本解.

解：

作傅里叶变换

$$\bar{u}(\lambda,\mu,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,z)e^{-i(\lambda x+\mu y+vz)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由傅里叶变换性质可得

$$F\left[\Delta_3 u\right]=-\left(\lambda^2+\mu^2+v^2\right)\bar{u},\quad F\left[k^2 u\right]=k^2\bar{u},\quad F[\delta(x,y,z)]=1$$

则基本解满足的方程可以转化为

$$-\left(\lambda^2+\mu^2+v^2\right)\bar{u}+k^2\bar{u}=1$$

解得

$$\bar{u}=\frac{1}{k^2-\left(\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right)}$$

作反变换

$$u = F^{-1}[\bar{u}] = F^{-1}\left[\frac{1}{k^2-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}\right] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu$$

由于对称性，不妨把 ν 轴的方向为向径 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的方向. 记向量 $\boldsymbol{\rho}=(\lambda,\mu,\nu)$. 作球坐标变换

$$\begin{cases} \lambda = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \mu = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \nu = \rho\cos\theta \end{cases}$$

因

$$\lambda x+\mu y+\nu z = \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r} = \rho r\cos\theta$$

可得

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{k^2-\rho^2}e^{-i\rho r\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho\sin\rho r}{k^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(kr)^2-x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{(kr)^2-x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(kx)^2-x^2}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\left\{\pi i(\operatorname{Res}[\frac{xe^{ix}}{(kr)^2-x^2},kr]+\operatorname{Res}[\frac{xe^{ix}}{(kr)^2-x^2},-kr])\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\left\{xi\left(-\left.\frac{xe^{ix}}{br+x}\right|_{x=kr}+\left.\frac{xe^{ix}}{kr-x}\right|_{x=-kr}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\left\{\pi i\left(-\frac{1}{2}e^{ikr}-\frac{1}{2}e^{-ikr}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 r}\operatorname{Im}\{-\pi i\cos kr\} \\
&= -\frac{\cos kr}{4\pi r}
\end{aligned}$$

5.4 习题 5.6——镜像法求解格林函数

6. 求下列空间区域内第一边值问题的格林函数

(1) 四分之一空间：$x>0,y>0$

(2) 上半球内：$x^2+y^2+z^2<a^2,z>0$

(3) 层状空间：$0<z<H$

解：

(1) 设在 $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ 处有一个点电荷 $+\varepsilon$，为保证边界 xoz 平面和 yoz 平面电势为 0，需要在 $M_1(\xi,-\eta,\zeta), M_2(-\xi,\eta,\zeta), M_3(-\xi,-\eta,\zeta)$ 处分别放两个 $-\varepsilon$ 的点电荷和一个 $+\varepsilon$ 的点电荷.
所以得到格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

其中

$$r_0=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r_1=\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r_2=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$
$$r_3=\sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

(2) 设在 $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ 处有一个点电荷 $+\varepsilon$，为保证半球面上电势为 0，需要在 M_0 关于球面的对称点 M_1 处放一个 $-\frac{a}{\rho_0}\varepsilon$ 的点电荷. 其中

$$\rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

为保证 xoy 平面电势为 0, 需要在 $M_2(\xi,\eta,-\zeta)$ 处放一个 $-\varepsilon$ 的点电荷, M_1 关于 $z=0$ 的对称点 M_3 处放一个 $+\frac{a}{\rho_0}\varepsilon$ 的点电荷. 所以得到格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r\left(M,M_0\right)}-\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{r\left(M,M_1\right)}-\frac{1}{r\left(M,M_2\right)}+\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{r\left(M,M_3\right)}\right)$$

(3) 平面 $z=0$ 和平面 $z=H$ 好比两面镜子反复反射, 造成无限多电像, 所有点 $(\xi,\eta,2nH+\zeta)$ 处放置正电荷, 所有点 $(\xi,\eta,2H-\zeta)$ 处放置负电荷 $(n=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots)$. 所以格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r'_n}\right)$$

其中

$$r_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH-\zeta)^2}$$
$$r'_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH+\zeta)^2}$$

5.5 习题 5.7——镜像法求解格林函数

求下列平面区域内第一边值问题的格林函数
(1) 四分之一平面：$x>0,y>0$
(2) 二分之一单位圆内：$x^2+y^2<1,y>0$
解：

(1) 设在 $M_0(\xi,\eta)$ 处放置一个点电荷 $+\varepsilon$, ，为保证边界 ox 和 oy 电势为 0，需要在 $M_1(\xi,-\eta), M_2(-\xi,-\eta), M_3(-\xi,\eta)$ 处分别放两个 $-\varepsilon$ 的点电荷和一个 $+\varepsilon$ 的点电荷.
所以，格林函数为

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_1r_3}{r_0r_2}$$

其中

$$r_i=\overline{MM_i},\quad i=0,1,2,3.\quad M(x,y), M_0(\xi,\eta), M_1(\xi,-\eta), M_2(-\xi,-\eta), M_3(-\xi,\eta)$$

(2) 设在 $M_0(\xi,\eta)$ 处一个点电荷 $+\varepsilon$.
为保证半圆弧上电势为 0，需要在 M_0 关于半圆弧的对称点 $M_1\left(\frac{\xi}{\rho_0^2},\frac{\eta}{\rho_0^2}\right)$ 处放一个 $-\frac{1}{\rho_0}\varepsilon\left(\rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)$ 的点电荷.
为保证 x 轴电势为 0，需要在 M_1 关于 $y=0$ 的对称点 $M_2\left(\frac{\xi}{\rho_0^2},-\frac{\eta}{\rho_0^2}\right)$ 处放一个 $+\frac{1}{\rho_0}\varepsilon$ 的点电荷，在 M_0 关于 $y=0$ 的对称点 $M_3(\xi,-\eta)$ 处放一个 $-\varepsilon$ 的点电荷.
所以格林函数为

$$\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{1}{\rho_0r_1}+\ln\frac{1}{\rho_0r_2}-\ln\frac{1}{r_3}\right)$$

其中

$$r_i=\overline{MM_i},\quad i=0,1,2,3.\quad M(x,y), M_0(\xi,\eta), \rho_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}, M_1\left(\frac{\xi}{\rho_0^2},\frac{\eta}{\rho_0^2}\right), M_2\left(-\frac{\xi}{\rho_0^2},-\frac{\eta}{\rho_0^2}\right), M_3(-\xi,$$

5.6 习题 5.9——基本解方法求解定解问题

用基本解方法求解下列柯西问题

(1)

$$\begin{cases} u_t+au_x=f(t,x)(t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}-2u(t>0,-\infty<x<+\infty,a>0)\\ u|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

提示：要用到

$$F^{-1}\left[\frac{\sin a\sqrt{\lambda^2+b}}{\sqrt{\lambda^2+b}}\right]=\frac{1}{2}J_0(b\sqrt{a^2-x^2})h(a-|x|)$$

解：

(1) 首先根据定解问题写出格林函数满足的定解问题

$$\begin{cases} U_t+aU_x=0\\ U|_{t=0}=\delta(x)\end{cases}$$

利用傅里叶变换求解这一定解问题. 作傅里叶变换

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{U}+ia\lambda\bar{U}=0 \\ \bar{U}(0,x)=1 \end{cases}$$

解得

$$\bar{U}=\exp\{-ia\lambda t\}$$

作反变换得

$$U=\delta(x-at)$$

即为格林函数. 代入基本解的积分公式即可得定解问题的解

$$\begin{aligned} u(t,x) &= U(t,x)*\varphi(x)+\int_0^t U(t-\tau,x)*f(\tau,x)d\tau \\ &= \varphi(x-at)+\int_0^t f(\tau,x-a(t-\tau))d\tau \end{aligned}$$

(2) 首先根据定解问题写出格林函数满足的定解问题

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx}-2U_t-2U \\ U\big|_{t=0}=0, U_t\big|_{t=0}=\delta(x) \end{cases}$$

利用傅里叶变换求解这一定解问题. 作傅里叶变换

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{U}}{dt^2}+2\frac{d\bar{U}}{dt}=-\left(\lambda^2a^2+2\right)\bar{U} \\ \bar{U}\Big|_{t=0}=0,\ \frac{d\bar{U}}{dt}\Big|_{t=0}=1 \end{cases}$$

解得

$$\bar{U}=e^{-t}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda^2a^2+1}t}{\sqrt{\lambda^2a^2+1}}$$

利用提示的反变换公式，作反变换得

$$U=\frac{e^{-t}}{2a}J_0\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)h(at-|x|)$$

即为格林函数. 代入基本解的积分公式即可得定解问题的解

$$u(t,x)=U(t,x)*\psi(x)=\frac{e^{-t}}{2a}\int_{-at}^{at}J_0\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)d\xi$$

5.7 习题 5.10——基本解方法求解定解问题

试写出定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(t,x,y) \\ u(0,x,y)=0, u_t(0,x,y)=0 \end{cases}$$

的解的积分表达式.

解:

首先根据定解问题写出格林函数满足的定解问题

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2\left(U_{xx}+U_{yy}\right) \\ U(0,x,y)=0, U_t(0,x,y)=\delta(x,y) \end{cases}$$

利用傅里叶变换求解这一定解问题. 作傅里叶变换

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{U}}{dt^2}=-\left(\lambda^2+\mu^2\right)a^2\bar{U} \\ \bar{U}\Big|_{t=0}=0, \frac{d\bar{U}}{dt}\Big|_{t=0}=1 \end{cases}$$

解得

$$\bar{U}=\frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\mu^2}at}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}+a}$$

作反变换得

$$U=\begin{cases} \frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^t t^2-x^2-y^2}}, & x^2+y^2\leq a^2t^2 \\ 0, & x^2+y^2>a^2t^2 \end{cases}$$

即为格林函数. 代入基本解的积分公式即可得定解问题的解

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t U(t-\tau,x,y)*f(\tau,x,y)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{f(\tau,\xi,\eta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta d\tau \end{aligned}$$

5.8 习题 5.12——基本解方法求解定解问题

根据已知的公式直接写出下列定解问题的解

(1)

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} \\ u(0,x)=\exp\left\{-x^2\right\} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_2 u \\ u(0,x,y) = x^2(x+y), u_t(0,x,y) = 0 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_2 u + x + y \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = x + y \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u + x + y + z \\ u|_{t=0} = x + y + z \\ u_t|_{t=0} = x + y + z \end{cases}$$

解：

(1) 这个定解问题的基本解为

$$U(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\right\}$$

所以，定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(t,x) &= U(t,x) * \exp\left\{-x^2\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{4a^2 t} + 1\right)\left(\xi - \frac{4a^2 tx}{1+4a^2 t}\right)^2 - \frac{x^2}{1+4a^2 t}\right\} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{1+aa^2 t}} \end{aligned}$$

(2) 这个定解问题的基本解为

$$U = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^t t^2 - x^2 - y^2}}, & x^2 + y^2 \le a^2 t^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > a^2 t^2 \end{cases}$$

所以，定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(t,x,y) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[U * x^2(x+y)\right] = -\frac{at}{2\pi} \iint_D \frac{(x-\xi)^2(x+y-\xi-\eta)}{(a^2t^2 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \\ &= -\frac{at}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(x+y) + (3x+y)\xi^2}{(a^2t^2 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \\ &= -\frac{at}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^2(x+y) + (3x+y)r^2\cos^2\theta}{(a^2t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} rdr \\ &= x^2(x+y) + a^2t^2(3x+y) \end{aligned}$$

(3) 这个定解问题的基本解为

$$U(t,x,y)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}}\frac{\delta(x,y)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{1}{2\pi a}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}},x^2+y^2<a^2t^2$$

所以，定解问题的解可表示为

$$\begin{aligned}u(t,x,y)&=U(t,x,y)*(x+y)+\int_0^t U(t-\tau,x,y)*(x+y)\mathrm{d}\tau\\&=U(t,x,y)*(x+y)+\int_0^t U(\tau,x,y)*(x+y)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}U(t,x,y)*(x+y)&=\frac{1}{2\pi a}\iint_{D_{at}}\frac{x+y-\xi-\eta}{\sqrt{a^2t^2-\xi^2-\eta^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{x+y-r(\sin\theta+\cos\theta)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{a}\int_0^{at}\frac{x+y}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}r\mathrm{d}r\\&=(x+y)t\end{aligned}$$

所以，定解问题的解为

$$u(t,x,y)=(x+y)t+\int_0^t(x+y)\tau\mathrm{d}\tau=(x+y)\left(t+\frac{t^2}{2}\right)$$

(4) 这个定解问题的基本解为

$$U(t,x,y,z)=\frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at)$$

令 $\varphi=x+y+z$，计算卷积积分

$$\begin{aligned}U(t,M)*\varphi(M)&=\iiint\frac{1}{4\pi a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\delta(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}-at)(x+y+z-\xi-\eta-\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&=\iiint\frac{1}{4\pi a\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\delta(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}-at)(x+y+z)d\xi d\eta\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{x+y+z}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\delta(r-at)\mathrm{d}r\\&=t(x+y+z)\end{aligned}$$

所以，定解问题的基本解为

$$
\begin{aligned}
u(t,x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial t}[U*\varphi(M)] + U*\varphi(M) + \int_0^t U(t-\tau,M)*\varphi(M)\mathrm{d}\tau \\
&= (x+y+z)\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)
\end{aligned}
$$

2019 春数理方程 B 期末试题解析

一、设有一个均匀圆柱物体，半径为 a, 高为 h，侧面在温度为零的空气中自由冷却. 上底绝热，下底温度为 $g(t,x,y)$，初始温度为 $\varphi(x,y,z)$, 试写出圆柱体内温度所满足的定解问题.(不用求解)

解：

首先建立合适的坐标系. 由题意知，描述圆柱体的温度问题，所以选择建立柱坐标系. 其中坐标原点选择圆柱下底的圆心，z 轴为中心高线所在直线.

然后分析题意写出泛定方程. 由题意知，描述温度变化问题，则可知满足热传导方程. 因此可以写出泛定方程

$$u_t = b^2\Delta_3 u \quad (t>0, x^2+y^2<a^2, 0<z<h)$$

接着分析定解条件. 书写定解条件的时候，首先要确定定解条件个数，然后根据物理意义书写正确的定解条件. 对于发展方程，定解条件分为两部分，分别是初始条件和边界条件.

初始条件的个数由对时间变量 t 的偏导数阶数决定. 对于这个热传导方程来说，只需要一个初始条件，表达物体初始温度. 则由题可知，可写出初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$$

边界条件的个数由边界具体形状决定. 对于这个定解问题来说，圆柱体的边界包括上底、下底和柱面 (即侧面). 其中第一类边界条件表达边界处的温度分布，第二类边界条件表达边界处热流密度分布——特别地齐次的第二类边界条件表达绝热，第三类边界条件表达边界处的热交换情形 (例如如题所述，物体在给定的外界介质中自由冷却). 则由题可知，侧面为第三类边界条件，上底为第二类边界条件，下底为第一类边界条件.

侧面的热交换描述要利用牛顿冷却定律和傅里叶热传导定律，由牛顿冷却定律

$$q = h(u-\theta)$$

和傅里叶热传导定律

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}$$

则有

$$q = h(u-0) = -k\frac{\partial u}{\partial n}$$

由于侧面的外法向为径向，且对应 r 增加的方向，所以

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

即

$$(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu)\Big|_{r=a} = 0$$

上底为齐次的第二类边界条件，其中上底的外法向为 z 增加的方向，

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

则上底处的边界条件可写作

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$$

下底为第一类边界条件，可直接写出. 所以可得边界条件

$$(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu)\Big|_{r=a} = 0, \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, z|_{z=h} = g(t,x,y)$$

所以定解问题可以写作

$$\begin{cases} u_t = b^2\Delta_3 u, (t>0, x^2+y^2<a^2, 0<z<h) \\ u|_{z=0} = g(t,x,y), \frac{\partial u}{\partial z}\big|_{z=h} = 0 \\ \left(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

二、求解一维无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4t + 2x(-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = \sin 3x \end{cases}$$

解：

分析定解问题，为一维无界区域弦振动问题，考虑使用行波法求解. 但泛定方程为非齐次方程，不满足直接使用行波法的条件，考虑首先处理非齐次项. 非齐次项中虽然同时含有变量 x 和 t，但由于二者不交叉，即非齐次项为 $f(t)+g(x)$ 形式，则有叠加原理可知，可以将其等价的转化为两个非齐次方程问题，并且非齐次项只和一个变量有关，因此考虑使用特解法处理非齐次项.

令 $u = v + w$，并设特解 $w = f(t) + g(x)$，代入解得

$$w = -\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{3}x^3$$

进而定解问题转化为

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, t > 0, -\infty < x < +\infty \\ v|_{t=0} = x^2 + \frac{1}{3}x^3,\ v_t|_{t=0} = \sin 3x \end{cases}$$

由达朗贝尔公式

$$\begin{aligned} v &= \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{(x-t)^3 + (x+t)^3}{6} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin 3\xi d\xi \\ &= x^2 + t^2 + \frac{x^3}{3} + xt^2 + \frac{1}{3}\sin 3x \sin 3t \end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u = v + w = x^2 + t^2 - \frac{2}{3}t^3 + xt^2 + \frac{1}{3}\sin 3x \sin 3t$$

三、求解固有值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 (0 < x < 9) \\ y(0) = y(9) = 0 \end{cases}$$

解：

固有值问题中的常微分方程为二阶线性常系数微分方程，则可以使用特征根法求解.

由题意可得到特征根方程

$$\mu^2 + 2\mu + \lambda = 0$$

解得

$$\mu = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

当 $\lambda > 1$ 时可得通解

$$y = Ae^{-x}\cos\sqrt{\lambda-1}x + Be^{-x}\sin\sqrt{\lambda-1}x$$

代入边界条件进而可得固有值和固有函数

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{9}\right)^2, \quad y_n(x) = e^{-x}\sin\frac{n\pi}{9}x$$

对于 $\lambda \le 1$ 的情形类似分析，可知无解.

所以有

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{9}\right)^2, \quad y_n(x) = e^{-x}\sin\frac{n\pi}{9}x$$

说明：这道题目的解析过程省略了部分计算过程，读者在答题时要严谨地书写过程.

四、求解一维有界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(0 < x < 1, t > 0) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 1 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：

由题意知，有界的问题，可以考虑使用分离变量法. 由于定解问题为非齐次边界问题，需要使用特解法将其转化为齐次问题进而可以使用分离变量法.
令 $u = v + w$. 由于非齐次项的特点，可以选择特解 $w = 1$. 则定解问题可以转化为

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, t > 0 \quad (0 < x < 1) \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=1} = 0 \\ v|_{t=0} = -x - 1, v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

分离变量得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

求解得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

将固有值代入关于变量 t 的常微分方程并解得

$$T_n(t) = C_n\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2} + D_n\sin\frac{(2n+1)\pi t}{2}$$

进而可得

$$v_n(t,x) = \left(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2} + D_n\sin\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

叠加可得形式解

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2} + D_n\sin\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

代入初始条件可得 $D_n = 0$ 和

$$C_n = -2\int_0^1 (x+1)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}dx = -\frac{4}{2n+1}\pi + (-1)^n\frac{8}{((2n+1)\pi)^2}$$

所以可得定解问题的解

$$u(t,x)=x+1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{(2n+1)\pi}-(-1)^n\frac{8}{((2n+1)\pi)^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

五、求解如下泊松方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0(x^2+y^2<1,0<z<1)\\ u|_{x^2+y^2=1}=0\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=1}=1-(x^2+y^2)\end{cases}$$

解：

由题意知，选取柱坐标系表达定解问题

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0(r<1,0<z<1)\\ u|_{r=1}=0\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=1}=1-r^2\end{cases}$$

使用分离变量法求解.
分离变量得到固有值问题

$$\begin{cases}r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0\\ |R(0)|<+\infty,R(1)=0\end{cases}$$

求解得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=\omega_n^2(n=1,2,\ldots),\quad R_n(r)=J_0(\omega_n r)$$

其中 $\omega_n(n=1,2,3,\cdots)$ 为方程 $J_0(\omega)=0$ 的所有正根.
将固有值代入关于 z 的常微分方程并求解得到

$$Z_n(z)=A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z$$

进而得到形式解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z\right)J_0(\omega_n r)$$

代入边界条件得 $A_n=0$ 和

$$B_n=\frac{1}{sh\omega_n||J_0(\omega_n r)||^2}\int_0^1 r\left(1-r^2\right)J_0(\omega_n r)\,dr=\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1(\omega_n)}$$

所以可得定解问题的解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1\left(\omega_n\right)}\right) sh\omega_n z J_0\left(\omega_n r\right)$$

六、求解热传导问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u(-\infty<x+\infty,t>0) \\ u(0,x)=e^{-x^2} \end{cases}$$

解：

由题意知，可以使用傅里叶变换法求解.

作傅里叶变换得

$$\begin{cases} \bar{u}_t=-\lambda^2\bar{u}+\bar{u}(t>0) \\ \bar{u}(0,\lambda)=\hat{f}(\lambda) \end{cases}$$

其中 $\hat{f}(\lambda)$ 为 $f(x)=e^{-x^2}$ 的傅里叶变换.

求解得到像函数

$$\bar{u}=e^t\hat{f}(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$$

作反变换得定解问题的解

$$\begin{aligned} u(t,x)&=e^t\left(e^{-x^2}*F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}\right]\right) \\ &=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}*e^{-x^2} \\ &=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}e^{-(x-\xi)^2}\mathrm{d}\xi \\ &=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{t-\frac{1}{1+4t}x^2} \end{aligned}$$

七、设平面区域 $\Omega=\{(x,y)|x+y>0\}$

1. 求出区域 Ω 的格林函数。

2. 求出区域 Ω 上的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0 \quad (x,y)\in\Omega \\ u(x,-x)=\varphi(x) \end{cases}$$

解：

(1) 使用镜像法求解.

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r\left(M,M_0\right)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r\left(M,M_1\right)}$$

其中 $M=(x,y), M_0=(\xi,\eta)\in\Omega, M_1=(-\eta,-\xi)$ 为 M_0 关于边界 $x+y=0$ 的对称点.
所以格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

(2) 由题意知，有

$$u(M)=-\int_l\varphi\left(M_0\right)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}_0}\mathrm{d}l_0$$

其中 l_0 为直线 $\xi+\eta=0, \overrightarrow{n_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,-1), \mathrm{d}l_0=\sqrt{2}\mathrm{d}\xi$
其中法向偏导数为

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\vec{n}_0}\right|_{l_0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left.\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}+\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)\right|_{\eta=-\xi}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x+y}{\pi(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}$$

所以定解问题的解为

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}\mathrm{d}\xi$$

八、计算积分

$$\int_{-1}^1 P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x$$

解：

特殊函数的积分计算主要利用特殊函数的性质、递推公式、重要结论以及固有函数系的正交性.

法一：看到积分区间以及被积函数的形式可以联想到一个**重要的结论** (课堂作业第三章第 22 题第一小问)

$$\int_{-1}^1 x^m P_n(x)=0\quad(m<n)$$

所以

$$\int_{-1}^1 P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3\right)\mathrm{d}x=0$$

进一步利用**重要递推公式** (教材 P280 例 1)

$$f(m,n)=\frac{m}{m+n+1}f(m-1,n-1)$$

即

$$(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x=m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x &= 2\cdot\int_0^1 P_4(x)4x^4\mathrm{d}x\\ &= 8\cdot\frac{4}{4+4+1}\cdot\frac{3}{3+3+1}\cdot\frac{2}{2+2+1}\cdot\frac{1}{1+1+1}\\ &= \frac{64}{315}\end{aligned}$$

法二：由于勒让德多项式是 x 的多项式形式，看到积分区间以及被积函数的形式可以联想到将右侧的多项式用勒让德多项式表达，对于低阶部分直接应用正交性得积分值为 0，只剩下 $p_4(x)$ 的模长计算.

设

$$1+x+2x^2+3x^3=\sum_{k=1}^{3}a_kP_k(x)$$

则由正交性可知

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3\right)\mathrm{d}x=0$$

由于

$$x^4=\frac{8}{35}P_4(x)+\sum_{k=1}^{3}b_kP_k(x)$$

所以

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x=4\int_{-1}^{1}x^4P_4(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{35}\int_{-1}^{1}P_4^2(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{35}\frac{2}{(2\times4+1)}=\frac{64}{315}$$

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2. Legendre 方程: $[(1-x^2)\,y']'+\lambda y=0$; n 阶 Legendre 多项式：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Legendre 多项式的母函数: $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$
Legendre 多项式满足的递推公式 ($n\geq 1$)

$$\begin{aligned}&(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\ &nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0\\ &nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0\\ &P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)\end{aligned}$$

3。3. ν 阶 Bessel 方程: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=0$;$\nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
Bessel 函数的的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方分别为

$$\begin{aligned}N_{\nu 1n}^2&=\tfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right)\\ N_{\nu 2n}^2&=\tfrac{1}{2}\left[a^2-\tfrac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right)\\ N_{\nu 3n}^2&=\tfrac{1}{2}\left[a^2-\tfrac{\nu^2}{\omega_{3n}^2}+\tfrac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)\end{aligned}$$

Bessel 函数满足的微分关系和递推公式:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)\\ &\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\tfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}\end{aligned}$$

4. 傅里叶变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$; 傅里叶逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda;\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t, p=\sigma+is$

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}; L\left[t^{\alpha}\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解:
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7. Green 第一公式: $\iint_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V u\Delta v\mathrm{d}V+\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V$
Green 第二公式: $\iint_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint_V(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V$