1. 记 $\theta(x)=\sum_{p\le x}\log p$，这里 p 为质数. $\psi(x)=\sum_{p^m\le x}\log p$.（$p$ 为质数，$m\in\mathbb{N}^*$）

证明：① $\psi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\theta(x^{1/m})$.

② $\psi(x)=\theta(x)+O(x^{1/2}(\log x)^2)$.

③ $\exists A_1, A_2, B_1, B_2$ 使

$$A_1 x\le\theta(x)\le A_2 x.$$

$$B_1 x\le\psi(x)\le B_2 x$$

④ $\exists C$ 使 $\forall x\in\mathbb{N}^*$，$\exists$ 质数 p 使

$$x<p\le Cx.$$

附加：④中可取 $C=2$.

2. 定义：F_n 是全体分母不超过 n 的最简分数（0-1之间）按从小到大排列.（$0=\frac{0}{1}$，$1=\frac{1}{1}$）

① 写出 F_5

② 已知 h/k，h'/k' 是相邻两项. 证明：$h'k-hk'=1$

③ 已知 h/k，h'/k'，h''/k'' 是相邻三项. 证明：$\frac{h'}{k'}=\frac{h+h''}{k+k''}$

3. 请写出一位助教的姓名，与任课教师的姓名. 完整写出（至少三个）~~由人名命名~~包含人名的定理或定义.（本门课中出现的）

（如 Newton-Leibniz 公式）

4. I 是交换环 R 的理想，定义：

$$\sqrt{I}=\{r\in R:\ \exists\, n\geq 1,\ r^n\in I\}.$$

证明：(1) $\sqrt{I}\lhd R$　(2) $\sqrt{I}=R\Leftrightarrow I=R$.

(3) $\sqrt{\sqrt{I}}=\sqrt{I}$　(4) $\sqrt{I+J}=\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$，$\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}=\sqrt{IJ}$.

5. R 是交换环．$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^n\in R[x]$．证明：

(1) $f(x)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ a_0 可逆，且 $\forall\, i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$\exists\, m>0$ 使 $a_i^{m_i}=0$

(2) $\exists\, m>0$ 使 $f^m(x)=0\Leftrightarrow\forall\, i\in\{0,1,\cdots,n\}$，$\exists\, m_i>0$ 使 $a_i^{m_i}=0$

(3) $\exists\, g(x)\neq 0$ 使 $f(x)g(x)=0\Leftrightarrow\exists\, 0\neq a\in R$，使 $af(x)=0$.

6. 当 $2\nmid n$ 时，证明 $D_{2n}\simeq D_n\times\{0,1\}\simeq D_n\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$．并举例 $2\mid n$ 不成立.

7. 记 $Inn(G)=\{\varphi\in Aut\ G:\ \exists\, x\in G$ 使 $\forall g,\ \varphi(g)=xgx^{-1}\}$　证明 $Inn(G)\lhd Aut(G)$.

8. $A,B,H\leq G$，且 $H\subseteq A\cup B$．证明 $H\subseteq A$ 或 $H\subseteq B$.